MEMORIE
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TORINO

SERIE III, TOMO 4,
e dell'intiera collezione Tomo 115.

PARTE PRIMA:
CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1963

INDICE DELLA PARTE PRIMA

DEL TOMO 4, SERIE III

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

[* Pagine dell'estratto e ** pagine del Tomo, poste in calce fra ( )].

RELAZIONE

LETTA ED APPROVATA NELL'ADUNANZA DEL 15 MAGGIO 1959
SULLA MEMORIA DI MARIA PIA COLAUTTI INTITOLATA

SUL PROBLEMA DI NEUMANN PER L'EQUAZIONE $\Delta_2 u - \lambda c u = f$, IN UN DOMINIO PIANO A CONTORNO ANGOLOSO

In questa Memoria, con due metodi diversi, uno basato sui recenti teoremi di Analisi funzionale, dati dal Fichera, l'altro sulla classica teoria delle equazioni integrali del tipo di Fredholm, si perviene al teorema dell'alternativa per il problema considerato in ipotesi di grande larghezza per i dati del problema, supponendo, tuttavia, il coefficiente della funzione incognita non positivo ed il contorno del dominio privo di cuspidi e dimostrando l'esistenza di una successione di autovalori non positivi, per il parametro λ che compare nell'equazione.

Nel corso della interessante e ben condotta trattazione si ha occasione di studiare la chiusura, sul contorno del dominio, con contorno privo di cuspidi, ma angoloso, del sistema formato dalle derivate normali dei polinomii armonici, pervenendo alla determinazione di due diverse classi di funzioni nelle quali il detto sistema è chiuso, l'una nel caso che le aperture degli angoli al contorno del dominio e a questo appartenenti, siano tutte minori di π, l'altra — più ristretta — nell'altro caso.

La Commissione

TOMMASO BOGGIO
MAURO PICONE, *relalore.*
FRANCESCO TRICOMI

1 — *Mem. Cl. di Scienze fisiche.* Serie 3ª, Tomo 4, Parte I.

SUL PROBLEMA DI NEUMANN PER L'EQUAZIONE $\Delta_2 u - \lambda c u = f$ IN UN DOMINIO PIANO A CONTORNO ANGOLOSO

Memoria di MARIA PIA COLAUTTI
presentata dal Socio nazionale non residente Mauro PICONE
nell'adunanza del 15 Aprile 1959

Riassunto. — *Si studia il problema di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda c u = f$ *in un dominio piano il cui contorno presenti degli angoli non cuspidali. Si determina in funzione dell'ampiezza degli angoli sul contorno, la classe delle soluzioni generalizzate nel senso di Amerio, in cui vale il teorema dell'alternativa e quindi, in particolare, quello di esistenza ed unicità, se* λ *non è autovalore. Preventivamente si ottengono particolari teoremi di chiusura per i polinomi in una variabile complessa e per le derivate normali dei polinomi armonici.*

INTRODUZIONE

Sia D un dominio del piano x, y e sia C la sua frontiera che supponiamo, per adesso, costituita da un'unica curva semplice e chiusa, dotata di retta tangente e curvatura variabili con continuità.

Se $z = x + iy$ è un punto di C, con n_z^+ o — come più spesso faremo — semplicemente con n_z denoteremo la normale *interna* nel punto z di C e con n_z^- quella esterna.

Indicheremo con $\mathfrak{L}^{(p)}(D)$ $(p \geq 1)$ lo spazio delle funzioni complesse u, definite quasi ovunque in D, tali che $|u|^p$ sia sommabile secondo Lebesgue in D e così normato:

$$\|u\| = \left(\int_D |u|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

e con $\mathfrak{L}^{(p)}(C)$ $(p \geq 1)$, lo spazio delle funzioni complesse m, definite q. o. su C, tali che $|m|^p$ sia una funzione dell'arco s su C, sommabile secondo Lebesgue e così normato:

$$\|m\| = \left(\int_C |m|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Indicheremo infine con $\mathcal{C}(D)$ la classe delle funzioni reali v, di classe uno in D, di classe due in $D - C$, tali che per ciascuna di esse esista una funzione, continua in D, che in $D - C$ coincide con il $\Delta_2 v$.

Sia λ un fissato numero complesso, e consideriamo la classe $\{u\}_\lambda$ costituita dalle funzioni u, appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, tali che in corrispondenza a ciascuna di esse esistano tre funzioni $m(z)$, $g(z)$ ed $f(z)$, le prime due appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, la terza ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, tali che riesca:

$$\int_{C}\left[m \frac{\partial v}{\partial n_z} - gv\right] d_z s + \int_{D}[u(\Delta_2 v - \lambda v) - fv] d_z \tau = 0 \,, \tag{1}$$

per ogni v di $\mathcal{C}(D)$.

Amerio [1], nel 1944, ha dimostrato che, supposta la f hölderiana in in tutto il dominio D, ogni funzione di $\{u\}_\lambda$ è q. o. uguale ad una u tale che:

1) u è di classe due in $D - C$.

2) Fissato z q. o. su C, e assunto $\zeta = \xi + i\eta$ su n_z^+ e interno a D, riesce:

$$\lim_{\zeta \to z\,(\text{su}\, n_z^+)} u(\zeta) = m(z) \,, \qquad \lim_{\zeta \to z\,(\text{su}\, n_z^+)} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_z} = g(z) \,.$$

3) In $D - C$ la u verifica l'equazione:

$$\Delta_2 u - \lambda u = f \,. \tag{2}$$

Per l'equazione (2) si possono considerare i vari problemi al contorno in $\{u\}_\lambda$ e, in particolare, il problema di Dirichlet, che consiste, assegnate le funzioni m ed f, nel ricercare sotto quali condizioni si ha l'esistenza e l'unicità di due funzioni u e g verificanti la (1) per ogni v di $\mathcal{C}(D)$.

Il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ riguarda, invece, come dati nella (1) le funzioni g ed f e come incognite u ed m.

In modo analogo si pongono gli altri problemi al contorno in $\{u\}_\lambda$ (problema misto, etc.).

La considerazione di tali problemi al contorno nella classe $\{u\}_\lambda$ si inquadra nella teoria delle « soluzioni deboli » per detti problemi, secondo un ordine di idee introdotto da Friedrichs e Sobolev. Sempre in questo ordine di idee, tali questioni erano state considerate da Picone, da un punto di vista avente principalmente per scopo il calcolo delle soluzioni.

L'importanza del risultato su riportato di Amerio, consiste nella « regolarizzazione » che esso fornisce delle soluzioni degli anzidetti problemi al contorno, appartenenti ad $\{u\}_\lambda$, cioè di tipo « debole ».

---

[1] Cfr. [3]. I numeri fra parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia alla fine del presente lavoro.

Un altro motivo che rende interessante lo studio degli anzidetti problemi al contorno in $\{u\}_\lambda$, risiede nel fatto che l'unicità della soluzione di un determinato di tali problemi nella classe $\{u\}_\lambda$, è condizione necessaria e sufficiente per la chiusura di certi sistemi di vettori che intervengono essenzialmente nei procedimenti di approssimazione delle soluzioni. Ad esempio, le soluzioni polinomiali dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda u = 0$, costituiscono un sistema di funzioni, chiuso su C rispetto alle funzioni sommabili (²), se e solo se il problema di Dirichlet in $\{u\}_\lambda$ ammette un teorema di unicità.

Ciò fa comprendere perchè alle ricerche di Amerio hanno fatto séguito numerosi lavori di altri Autori e dell'Amerio stesso, intesi a stabilire i teoremi di esistenza e di unicità in $\{u\}_\lambda$.

Il primo a studiare tale tipo di questioni è stato Fichera (³), che, nel 1947, ha dimostrato il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Neumann e i teoremi di unicità per il problema di Dirichlet e per il problema misto, nel caso $\lambda = 0$.

Il procedimento di Fichera si fonda essenzialmente su due punti. In primo luogo, in una nuova «regolarizzazione» delle funzioni di $\{u\}_\lambda$ (per $\lambda = 0$). Precisamente, Fichera dimostra che tutte e sole le funzioni di $\{u\}_0$ (nel caso $f = 0$, al quale ci si può sempre ricondurre) sono quelle espresse da potenziali logaritmici di strato semplice a densità sommabile. Secondariamente, le questioni di esistenza ed unicità in $\{u\}_0$, vengono connesse con lo studio delle classiche equazioni di Fredholm della teoria del potenziale sulla curva C, considerate, però, in classi di funzioni sommabili.

Servendosi di tali tipi di equazioni Albertoni (⁴), nel 1954, ha studiato il problema di Neumann nella classe $\{u\}_\lambda$, supponendo la f hölderiana nel dominio D.

Precisamente, l'Albertoni si serve dell'equazione:

$$\pi m(t) = \int_C m(z) \frac{\partial S(z,t)}{\partial n_z} d_z s - \int_C g(z) S(z,t) d_z s - \int_D f(z) S(z,t) d_z \tau \tag{3}$$

(t q. o. su C), nella quale con $S(z, t)$ si è indicata la classica soluzione fondamentale dell'equazione: $\Delta_2 u - \lambda u = 0$.

Si dimostra facilmente che, posto:

$$\Theta(\zeta) \begin{cases} = 1 & \text{per } \zeta \in D - C \\ = 0 & \text{per } \zeta \text{ esterno a } D, \end{cases}$$

(²) Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema $\{u_k\}$ sia chiuso su C, rispetto alle funzioni sommabili è che per ogni φ di $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ tale che: $\int_C \varphi \bar{u}_k ds = 0$ segua $\varphi = 0$ q. o. su C.

(³) Cfr. [6].

(⁴) Cfr. [1].

le (1) sono equivalenti alle seguenti equazioni:

$$(4) \qquad 2\pi\Theta(\zeta)u(\zeta) = \int_C \left[m(z)\,\frac{\partial S(z,\zeta)}{\partial n_z} - g(z)S(z,\zeta)\right] d_z s - \int_D f(z)S(z,\zeta)d_z\tau$$

valide per ogni ζ del piano non appartenente a C.

Pertanto la (3) è una conseguenza della (4), scritta per ζ esterno a D, quando si passa al limite in un punto t di C. Una sua soluzione m fornisce quindi, tramite la (4) scritta per ζ interno a D, una soluzione del problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$, se e solo se il verificarsi della (3) implica quello della (4) per ζ esterno a D. Ora, tale circostanza, come è prevedibile, non sempre si verifica. Pur potendosi facilmente ottenere le condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza fra la (3) e la (4) (per ζ esterno a D) (5), tuttavia, come il prof. Fichera mi ha fatto notare, l'impostazione adottata da Albertoni, introduce nella discussione del problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$, complicazioni estranee al problema stesso. È da notare però, che la ricerca di Albertoni conserva tutto il suo interesse per le molte, notevoli proprietà in essa conseguite, relative alle equazioni integrali da lui considerate.

Desidero qui esporre due diversi procedimenti, il primo fondato sui metodi dell'Analisi funzionale, il secondo sui procedimenti classici della teoria delle equazioni integrali, con entrambi i quali, rapidamente si consegue una completa trattazione del problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$.

Il primo di essi è fondato su un principio di esistenza nell'Analisi funzionale lineare, dovuto a Fichera (6).

---

(5) Per il caso $f \equiv 0$, cfr. [18]. Alla fine del presente lavoro, nell'Appendice I, dimostreremo un teorema che include i risultati ottenuti in [18].

(6) Sia V un insieme astratto lineare rispetto al corpo complesso e $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ due spazi di Banach complessi. In V siano definite due trasformazioni $M_1(v)$ ed $M_2(v)$, entrambe lineari, le quali mutano un elemento di V, rispettivamente in un elemento di $\mathfrak{B}_1$ ed in un elemento di $\mathfrak{B}_2$. Sia Φ un funzionale lineare continuo definito in $\mathfrak{B}_1$ e consideriamo la seguente equazione funzionale:

$$(\mathrm{I}) \qquad \Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)]\,.$$

In essa l'incognita è il funzionale lineare e continuo Ψ, definito in $\mathfrak{B}_2$. Sussiste il seguente teorema (Cfr. [7]): *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista la soluzione Ψ dell'equazione* (I), *dato comunque Φ, è che esista una costante K, tale che, qualunque sia $v \subset V$, si abbia*:

$$(\mathrm{II}) \qquad \|M_1(v)\| \leq K\|M_2(v)\|\,.$$

Soddisfatta la (II), *esiste una soluzione Ψ della* (I) *verificante la disuguaglianza: $\|\Psi\| \leq K\|\Phi\|$, e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio della trasformazione M_2.*

Cominciamo intanto con l'osservare che, detta λ_0 una fissata costante positiva, assegnate le funzioni g ed f appartenenti, rispettivamente, ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, non può esistere più di una soluzione $[m, u]$ delle (1) per $\lambda = \lambda_0$, con m appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed u ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$ (7).

Assunta come classe V la classe $\mathcal{C}(D)$, e posto in un primo momento $\lambda = \lambda_0$, sia $\mathcal{B}_1$ lo spazio di Banach dei vettori $W \equiv [w_1, w_2]$ a due componenti complesse, la prima, w_1, continua su C, la seconda, w_2, continua in D, così normato:

$$\|W\| = \max_C |w_1| + \max_D |w_2| .$$

Sia invece $\mathcal{B}_2$ lo spazio di Banach dei vettori $U \equiv [u_1, u_2]$ a due componenti complesse, la prima, u_1, appartenente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$, la seconda, u_2, ad $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$, così normato:

$$\|U\| = \left(\int_C |u_1|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D |u_2|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} .$$

La trasformazione $M_1(v)$ sia quella che alla funzione v di $\mathcal{C}(D)$ fa corrispondere il vettore $[v, v]$ di $\mathcal{B}_1$, la $M_2(v)$ quella che a v fa corrispondere il vettore $\left[\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \Delta_2 v - \lambda_0 v\right]$ di $\mathcal{B}_2$.

Detta g una funzione di $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed f una funzione di $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, poniamo:

$$\Phi[M_1(v)] = \int_C g v ds + \int_D f v d\tau .$$

---

(7) Siano m ed u due funzioni appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, e per ogni v di $\mathcal{C}(D)$ riesca:

(III) $$\int_C m \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_D u(\Delta_2 v - \lambda_0 v) d\tau = 0 .$$

Sia D_0 un campo circolare contenente nel suo interno D e sia $G(z, \zeta; \lambda_0)$ la funzione di Green per il problema di Dirichlet, considerato in D_0, relativo all'equazione: $\Delta_2 u - \lambda_0 u = 0$. Dalla (III) si trae, per ogni ζ di $D_0 - D$: $\int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} G(z, \zeta; \lambda_0) d_z s = 0$,

e da questa, passando al limite su C, si deduce, per t q. o. su C:

(IV) $$\pi m(t) = \int_C m(z) \frac{\partial G(z, t; \lambda_0)}{\partial n_z} d_z s .$$

Ripetendo un ragionamento perfettamente analogo a quello contenuto a pag. 17 di [6], si prova che la (IV) non può avere autosoluzioni in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, e quindi $m = 0$ q. o. su C. Dalle (III), assumendo: $v(z) = \int_{D_0} \gamma(\zeta) G(z, \zeta; \lambda_0) d_\zeta \tau$, con $\gamma(\zeta)$ arbitraria funzione hölderiana in D_0, si trae $u = 0$ in D.

L'esistenza di un funzionale Ψ, verificante l'equazione:

$$\Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)] ,$$

equivale all'esistenza di due funzioni m ed u, rispettivamente appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$ e verificanti le (1) per $\lambda = \lambda_0$. Ora siffatte funzioni m ed u esistono, se e solo se, sussiste, per ogni v di $\mathcal{C}(D)$, la seguente disuguaglianza:

$$\max_D |v| \leq K \left\{ \left(\int_C \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D |\Delta_2 v - \lambda_0 v|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\} . \tag{5}$$

La (5), nella ipotesi assunta per λ_0, si consegue facilmente ([8]).

Sia $[m_0, u_0]$ la soluzione delle (1) $[m_0$ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ ed u_0 ad $\mathfrak{L}^{(2)}(D)]$, ottenuta per g appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, $f \equiv 0$ e $\lambda = \lambda_0$ col procedimento ora descritto. Posto: $\mu = m - m_0$, $w = u - u_0$, il vettore $[m, u]$ verifica le (1) se e solo se il vettore $[\mu, w]$ verifica le seguenti:

$$\int_C \mu \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_D [w(\Delta_2 v - \lambda v) - \varphi v] d\tau = 0 \qquad [\varphi \equiv f + (\lambda - \lambda_0) u_0] , \tag{6}$$

per ogni v della classe $\mathcal{C}(D)$.

Le (6) ammettono una ed una sola soluzione per $\lambda = \lambda_0$. Diciamo $T(\varphi)$ la funzione w che verifica le (6) per $\lambda = \lambda_0$. È evidente che le (6) ammettono soluzioni se e solo se esiste una funzione w soluzione dell'equazione funzionale:

$$w = \sigma T(w) + T(\varphi) \qquad [\sigma = \lambda - \lambda_0] .$$

Si dimostra facilmente che la trasformazione T, ovviamente lineare, considerata in $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$, è totalmente continua ([9]). Essa è altresì hermitiana, si ha cioè: $(T(u), v) = (u, T(v))$, $[u$ e v appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(2)}(D)]$. Basta verificare ciò in corrispondenza ad ogni coppia u e v di vettori di una particolare base di $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$ cioè di vettori tali che $u = \Delta_2 v_1 - \lambda_0 v_1$, $v = \Delta_2 v_2 - \lambda_0 v_2$, con v_1 e v_2 appartenenti a $\mathcal{C}(D)$ e $\frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0$ su C. Si ha infatti:

$$(T(u), v) = \int_D v_1 (\Delta_2 \bar{v}_2 - \lambda_0 \bar{v}_2) d\tau = \int_D \bar{v}_2 (\Delta_2 v_1 - \lambda_0 v_1) d\tau = (u, T(v)) .$$

([8]) Cfr. Appendice II alla fine del presente lavoro.

([9]) Cfr. Appendice III alla fine del presente lavoro.

Resta così provato che il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ ammette una successione di autovalori reali: $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}, \ldots$ ([10]), per modo che, per $\lambda \neq \lambda^{(n)} (n = 1, 2, \ldots)$, assegnate g ed f rispettivamente in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, le (1) ammettono una ed una sola soluzione $[m, u]$ con m ed u appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$. Se $\lambda = \lambda^{(n)}$, le (1) ammettono soluzione se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

$$(T(\varphi), w_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n) , \tag{7}$$

essendo le w_k un sistema completo di autosoluzioni — che possiamo supporre reali — dell'equazione:

$$w = (\lambda^{(n)} - \lambda_0) T(w) .$$

Cioè, detta μ_k la traccia di w_k su C, deve essere:

$$\int_C \mu_k \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_D w_k (\Delta_2 v - \lambda^{(n)} v) d\tau = 0 .$$

Dal teorema d'Amerio, tenendo presente la regolarità di μ_k ([11]), si trae che w_k è una funzione di classe uno in D, due in $D - C$, verificante l'equazione $\Delta_2 w_k - \lambda^{(n)} w_k = 0$ in $D - C$ e tale che $\dfrac{\partial w_k}{\partial n} = 0$ su C. Ricordando il significato di u_0, si ha allora:

$$(T(\varphi), w_k) = (\varphi, T(w_k)) = \int_D f w_k d\tau + \int_D (\lambda^{(n)} - \lambda_0) u_0 w_k d\tau =$$

$$= \int_D f w_k d\tau + \int_D u_0 (\Delta_2 w_k - \lambda_0 w_k) d\tau = \int_D f w_k d\tau + \int_C g \mu_k ds ,$$

e quindi, dalle (7):

$$\int_D f w_k d\tau + \int_C g \mu_k ds = 0 \tag{8}$$

che esprimono le condizioni di compatibilità del problema di Neumann quando λ è autovalore.

Nel caso che la f sia hölderiana in D e, in particolare, identicamente nulla, si ritrovano i risultati stabiliti, per il problema interno di Neumann,

---

([10]) Che gli autovalori non siano in numero finito, segue dal fatto che l'equazione $T(w) = 0$ è sprovvista di autosoluzioni.

([11]) Si veda, a tale riguardo, l'osservazione finale alla fine dell'Appendice III.

da Albertoni (12) e da Amerio (13). Analoga trattazione potremmo dare del problema esterno di Neumann, in una classe analoga alla $\{u\}_\lambda$ (14).

Il procedimento ora esposto si fonda su metodi generali dell'Analisi funzionale e non fa ricorso alla teoria classica delle equazioni integrali (15).

Il secondo procedimento, concettualmente equivalente al primo, e che ora veniamo ad esporre, è invece esclusivamente fondato sulla teoria delle equazioni integrali di Fredholm. Se da una parte esso ha il vantaggio, rispetto al precedente, di fondarsi su risultati più classici ed elementari, d'altro canto esso implica una maggiore complicazione algoritmica.

Esponiamo questo secondo metodo senza soffermarci sui dettagli, perchè, questo stesso procedimento sarà quello che noi adotteremo, nel corso del presente lavoro, per risolvere un problema di Neumann più generale di quello finora considerato, e del quale verremo fra breve a parlare.

Sia D_0 un campo circolare contenente D nel suo interno e, come già nella nota (7), indichiamo con $G(z, \zeta; \lambda_0)$ la funzione di Green per il problema di Dirichlet, considerato in D_0, relativo all'equazione $\Delta_2 u - \lambda_0 u = 0$, con λ_0 fissato numero positivo. Per ogni fissato ζ in $D - C$, indichiamo con $\beta(t, \zeta)$ la funzione hölderiana di $t (t \in C)$, unica soluzione dell'equazione integrale di Fredholm:

$$-\pi\beta(t, \zeta) + \int_C \beta(\eta, \zeta) \frac{\partial G(t, \eta; \lambda_0)}{\partial n_t} d_\eta s = \frac{\partial G(t, \zeta; \lambda_0)}{\partial n_t}.$$

---

(12) Cfr. [1].

(13) Cfr. [4].

(14) Volendo applicare lo stesso procedimento al problema di Dirichlet in $\{u\}_\lambda$, si arriverebbe subito alla conclusione che, anche nel caso in cui λ non è autovalore (ad esempio $\lambda > 0$), non si possono prescrivere arbitrariamente m ed f per ottenere la soluzione $[g, u]$ delle (1). Infatti, supposto che m ed f appartengano rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$, se esistessero g ed u, la prima in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, la seconda in $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, il principio della nota (6) assicurerebbe l'esistenza di una costante K tale che, per ogni v di $\mathfrak{C}(D)$, si avrebbe:

$$\left(\int_C \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D |v|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq K \left\{\max_C |v| + \max_D |\Delta_2 v - \lambda v|\right\},$$

la quale è certamente falsa come segue facilmente dal fatto che esistono funzioni w_0 continue assieme a $\Delta_2 w_0 - \lambda w_0$ in D, ma non dotate di derivata normale sommabile su C.

Amerio, nel caso $f = 0$ (cfr. [4]), ha determinato le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare m per l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet in $\{u\}_\lambda$.

(15) Cfr. Appendice II.

Posto:

$$N_0(z, \zeta; \lambda_0) = \int_C \beta(t, \zeta) G(z, t; \lambda_0) d_t s\,, \qquad N(z, \zeta; \lambda_0) = G(z, \zeta; \lambda_0) - N_0(z, \zeta; \lambda_0)\,,$$

la funzione N è definita per ogni z e ζ [con $z \neq \zeta$] di D_0, è simmetrica, è una soluzione fondamentale, relativa a $D - C$, per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda_0 u = 0$, riesce $N(z, \zeta; \lambda_0) = O\left(\log \dfrac{K}{|z - \zeta|}\right)$, con K costante positiva, ed inoltre, fissato ζ in $D - C$, si ha $\dfrac{\partial}{\partial n_z} N(z, \zeta; \lambda_0) = 0$ su C.

Si può ora dimostrare che, date le funzioni m, g, u ed f, le prime due di $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, le ultime due di $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, condizione necessaria e sufficiente perchè esse verifichino le (1) per ogni v di $\mathfrak{C}(D)$ è che u sia soluzione della seguente equazione integrale:

$$u(\zeta) = -\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\pi} \int_D u(z) N(z, \zeta; \lambda_0) d_z \tau - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_C g(z) N(z, \zeta; \lambda_0) d_z s + \int_D f(z) N(z, \zeta; \lambda_0) d_z \tau \right\}. \tag{9}$$

Soddisfatta la (9), riesce, per t q. o. su C:

$$m(t) = -\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\pi} \int_D u(z) N(z, t; \lambda_0) d_z \tau - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_C g(z) N(z, t; \lambda_0) d_z s + \int_D f(z) N(z, t; \lambda_0) d_z \tau \right\}.$$

La dimostrazione di questo risultato non presenta difficoltà di ordine concettuale, ma occorre eseguire con cura alcune verifiche algoritmiche. Comunque, un teorema più generale, di questo tipo, sarà dimostrato a pag. 41 del presente lavoro.

La (9) è un'equazione integrale di Fredholm a nucleo simmetrico e chiuso, quindi il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ ammette una infinità di autovalori reali $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)}, \dots$. Se $\lambda \neq \lambda^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$, assegnate comunque g ed f rispettivamente in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, le (1) ammettono una ed una sola soluzione $[m, u]$ (con m appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, u ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$). Se $\lambda = \lambda^{(n)}$, si prova che le (1) ammettono soluzione se e solo se per un sistema completo di autosoluzioni w_k $(k = 1, 2, \dots, \nu_n)$ dell'equazione:

$$w(\zeta) = -\frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\pi} \int_D w(z) N(z, \zeta; \lambda_0) d_z \tau\,,$$

sono soddisfatte le condizioni (8).

Recentemente, Albertoni [16] ha ripreso la trattazione del problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$, nelle ipotesi che la frontiera C di D sia dotata di punti angolosi, non cuspidali. Il procedimento è lo stesso di quello seguito nella precedente ricerca di questo Autore, in questo caso, però, l'equazione (3) non è più un'equazione di Fredholm, ma un'equazione integrale singolare del tipo di Carleman. Oltre quindi alle questioni relative all'equivalenza fra la (3) e la (4) [per ζ esterno a D], si aggiungono le difficoltà relative alla discussione dell'equazione integrale singolare anzidetta. Assai interessanti sono i risultati conseguiti da Albertoni in tale discussione.

Tuttavia, per quanto riguarda il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$, nelle ipotesi anzidette per C, risultati più completi ed esaurienti possono ottenersi trattando il problema con differente metodo. Precisamente, nel presente lavoro, noi adotteremo una estensione del secondo dei procedimenti, in precedenza descritti, per il caso di C regolare. Studieremo inoltre il problema di Neumann per una classe $[u]_\lambda$ relativa alla più generale equazione $\Delta_2 u - \lambda c u = f$, essendo c una funzione continua in D, non identicamente nulla ed ivi mai negativa.

La traduzione del problema in una equazione integrale di Fredholm, sarà ottenuta trasformando il dominio D in uno provvisto di frontiera regolare. Pur non essendo ciò essenziale, la trasformazione che si è scelta, è conforme, il che permette una notevole semplificazione algoritmica. Desidero però avvertire — anche in vista di eventuali estensioni dei risultati ottenuti agli spazi a più dimensioni — che, a patto di servirsi dei risultati della teoria delle equazioni di tipo ellittico di forma generale, si sarebbe potuto anche usare una trasformazione non conforme.

Le proprietà della trasformazione che verrà impiegata e che si trovano stabilite nella prima parte di questo lavoro, sono da ritenersi fatti già noti nella teoria delle trasformazioni conformi. Tuttavia, poichè essi non si trovano in genere codificati, nella letteratura sull'argomento, proprio nella forma che occorre ai fini di questo lavoro, e poichè, d'altronde, essi rivestono fondamentale interesse nella trattazione presente, si è preferito dare, in modo esauriente, gli enunciati e le dimostrazioni dei risultati in discorso.

Successivamente, sempre ai fini della risoluzione del problema nel caso generale, si è dovuta studiare la questione dell'unicità nel caso particolare: $\lambda = 0$. Sono stati, a tal riguardo, ottenuti risultati che ritengo di per sè interessanti, relativi a teoremi di chiusura per i polinomi in una variabile complessa e per le derivate normali dei polinomi armonici. In particolare ci si è occupati della estensione ad una curva con angoli del

(16) Cfr. [2].

teorema, secondo il quale, su una curva chiusa regolare, il sistema delle derivate normali dei polinomi armonici è chiuso rispetto alle funzioni sommabili che hanno valor medio nullo. Si presenta la circostanza curiosa secondo la quale, se C ha degli angoli, non cuspidali, ma di ampiezza minore di π (angoli non rientranti), sussiste un teorema più generale di quello ora ricordato. Invece, se C ha degli angoli di ampiezza maggiore di π (angoli rientranti), il teorema non è più vero, e la chiusura si ha soltanto rispetto ad una classe più ristretta di quella anzidetta.

Infine, nella terza parte del lavoro, vien risoluto il problema generale di Neumann sopra enunciato, determinando la classe delle soluzioni generalizzate, in funzione dell'ampiezza degli angoli presenti sulla curva C, nella quale sussiste il principio dell'alternativa (17).

(17) Ritengo che la descrizione delle classi a cui appartengono le incognite $[m, u]$ del problema, in presenza di punti angolosi su C, ottenuta in questo lavoro (classi $\mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ e $\mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$, cfr. pagg. 10 e 24), possa considerarsi esauriente. L'Albertoni (cfr. [2]) ricerca l'incognita m in certe classi (la $R^{(-\sigma)}$ e la $S^{(\sigma-1)}$, cfr. [2], pag. 225) che hanno una definizione meno semplice di quella da noi considerata e per le quali non è posta in luce la dipendenza dall'ampiezza degli angoli di C, dipendenza essenziale ai fini della validità del teorema di unicità.

1. Definizioni e premesse.

Consideriamo il piano della variabile complessa $z = x + iy$ e sia t un punto variabile su di un asse reale, (t_1, t_2) un intervallo limitato di tale asse. Nell'intervallo chiuso (t_1, t_2) siano definite due funzioni reali $x(t)$ e $y(t)$; diremo che il luogo L del piano descritto dal punto $z(t) = x(t) + iy(t)$ è un *arco di curva regolare* od anche un *arco di classe* $\mathscr{C}^{(1)}$ se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

1) Le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono continue assieme alle loro derivate prime nell'intervallo chiuso (t_1, t_2) ed ivi le derivate prime non sono mai contemporaneamente nulle.

2) La corrispondenza posta dalle $x = x(t)$, $y = y(t)$ fra i punti dell'intervallo chiuso (t_1, t_2) ed i punti di L è biunivoca.

Diremo che L è un *arco di classe* $\mathscr{C}^{(1,l)}$ se oltre ad essere soddisfatte le 1) e 2) lo è anche la seguente condizione:

3) Le derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ sono l-hölderiane in (t_1, t_2) (1).

Diremo *estremi* dell'arco L i due punti che, rispettivamente, corrispondono ai valori t_1 e t_2 del parametro t; gli altri punti di L li diremo *interni* ad L ed inoltre diremo che (t_1, t_2) è l'*intervallo base* di L (relativamente alla rappresentazione parametrica adottata).

Siano ora $x(t)$ e $y(t)$ due funzioni reali definite nell'intervallo chiuso (a, b) dell'asse t ed ivi continue; il luogo C descritto dal punto $z(t) = x(t) + iy(t)$ si dirà una *curva semplice e chiusa composta di archi di classe* $\mathscr{C}^{(1)}[\mathscr{C}^{(1,l)}]$ se accade che:

1) $x(a) = x(b)$; $\quad y(a) = y(b)$.

---

(1) Diremo che una funzione $f(t)$ è (*uniformemente*) *hölderiana* con esponente l in (t_1, t_2) o, più brevemente, l *-holderiana* se esistono due costanti positive K ed l, con $0 < l \leq 1$, tali che, per ogni coppia di punti t' e t'' di (t_1, t_2) riesce:

$$|f(t') - f(t'')| \leq K|t' - t''|^l .$$

2) Le equazioni

$$x(t') = x(t'') \ ; \qquad y(t') = y(t'') \qquad (t' < t'') \ ,$$

ammettono l'unica soluzione $t' = a$, $t'' = b$.

3) È possibile decomporre l'intervallo (a, b) in un numero finito di intervalli (t_h, t_{h+1}) $(h = 1, 2, \ldots, m)$, con $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1} = b$, tali che il luogo C_h descritto dal punto $z(t) = x(t) + iy(t)$ $(t_h \leq t \leq t_{h+1})$ risulti un arco di classe $\mathscr{C}^{(1)}[\mathscr{C}^{(1,l)}]$.

L'intervallo (a, b) si dirà l'*intervallo base* della curva C (relativamente alla rappresentazione parametrica adottata).

Diremo che un punto z di C è un punto *singolare* di C se non è possibile decomporre la curva C in archi di classe $\mathscr{C}^{(1)}$ in guisa che z sia interno ad uno di essi. Ogni punto di C non singolare verrà detto *regolare*.

Una curva C semplice e chiusa composta di archi di classe $\mathscr{C}^{(1)}$ ammette ovviamente al più un numero finito di punti singolari.

Se C è una curva semplice e chiusa composta di archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$, ogni punto z regolare di C, secondo la definizione di cui sopra, è interno ad un arco di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$ componente C. È infatti immediato constatare che se z è interno ad un arco di classe $\mathscr{C}^{(1)}$ ed è estremo comune di due archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$, l'arco di classe $\mathscr{C}^{(1)}$ — al quale esso risulta per ipotesi interno — è anche un arco di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$.

Nel corso del presente lavoro considereremo una curva semplice e chiusa C composta di m archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$; siano essi $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Diremo z_h e z_{h+1} $(h = 1, 2, \ldots, m;\ z_{m+1} = z_1)$ gli estremi dell'arco C_h e supporremo che i punti $z_1, z_2, \ldots, z_m$ si succedano in questo ordine quando la curva C è percorsa nel *verso positivo* ([2]). Assumeremo come verso positivo sull'arco C_h il verso subordinato su C_h dal verso positivo su C. Supposto $m > 2$, supporremo che la curva C presenti m punti singolari coincidenti con $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Se invece è $m = 2$, supporremo che si verifichi uno dei due seguenti casi: entrambi i punti z_1 e z_2 sono singolari oppure è singolare il punto z_1 mentre non lo è z_2.

In seguito, relativamente alla curva semplice e chiusa C che abbiamo ora considerato, useremo la comoda locuzione di *curva r-singolare* se r è il numero di tutti i suoi punti singolari. Riesce, per quanto si è supposto, $r = m$ se $m > 2$ e $r = 1$ oppure $r = 2$ se $m = 2$.

Ogni arco C_h $(h = 1, 2, \ldots, m)$ componente la curva C è dotato in ogni suo punto di retta tangente; diremo *asse tangente positivo* a C_h in un suo punto z la retta tangente a C_h in z orientata secondo il verso posi-

---

([2]) Nel presente lavoro converremo di assumere come *verso positivo* di percorrenza su ogni curva semplice e chiusa il verso antiorario.

tivo di C_h, *asse tangente negativo* a C_h, la stessa retta orientata nel verso opposto.

Consideriamo la curva C r-singolare ($r \geq 1$) e il punto singolare z_k ($k = 1, \ldots, r$); indicato con A il campo (insieme aperto) limitato avente tale curva come completa frontiera, diremo che *il campo A presenta nel punto z_k un angolo di ampiezza α* se è uguale ad α la misura dell'angolo di cui deve ruotare, nel verso orario, l'asse tangente negativo a C_{k-1} in z_k per sovrapporsi all'asse tangente positivo a C_k in z_k ([3]).

Nel seguito, per comodità, indicheremo con la stessa lettera α anche l'angolo (campo angolare) di ampiezza α avente come lati, rispettivamente, il semiasse tangente negativo a C_{k-1} in z_k e il semiasse tangente positivo a C_k in z_k o, più in generale, adopereremo la stessa lettera per indicare sia un angolo, come insieme di punti, che la sua misura.

Si vede facilmente che essendo z_k un punto singolare di C, riesce: $\alpha \neq \pi$. *I casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 2\pi$, corrispondenti a punti cuspidali per la curva C, saranno da noi esclusi.*

In questo lavoro indicheremo rispettivamente con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le ampiezze degli angoli che il campo A presenta negli r punti singolari di C. Per quanto si è testè detto verrà supposto $\alpha_h \neq 0$ e $\alpha_h \neq 2\pi$ ($h = 1, \ldots, r$) e quindi per il dominio ([4]) D — ottenuto aggregando al campo A i punti della curva C r-singolare — useremo la locuzione di *dominio r-singolare non cuspidale. In seguito, parlando di domini r-singolari intenderemo sempre riferirci a domini r-singolari non cuspidali.*

2. Su una particolare trasformazione di un dominio *r*-singolare in un dominio (*r* — 1)-singolare.

Degli r punti singolari $z_1, z_2, \ldots, z_r$ di C, consideriamo, per fissare le idee, il punto z_1 e indichiamo per semplicità con α l'ampiezza dell'angolo che il campo A ivi presenta.

Possiamo sempre supporre che il sistema di riferimento cartesiano ortogonale x, y abbia z_1 come origine O e l'asse tangente positivo a C_1 in z_1 come asse delle x.

Consideriamo, con origine in O, due semirette l_1 ed l_2 contenute nell'insieme complementare del campo angolare α in modo che l'angolo β (contenente α), da esse formato sia tale che:

$$\alpha < \beta < 2\alpha \text{ se } 0 < \alpha < \pi \,; \quad \alpha < \beta < 2\pi \text{ se } \pi < \alpha < 2\pi \,. \tag{2.1}$$

([3]) Se $k = 1$ conveniamo di assumere $C_0 = C_m$.

([4]) Se A è un campo e C la sua completa frontiera diremo *dominio* l'insieme dei punti $A + C$.

Si possono ora presentare due casi a seconda che esista o no un campo angolare β, di vertice O, verificante le (2.1), tale che D-O sia ad esso interno.

I caso: D-O è contenuto in un campo angolare β di vertice O, verificante le (2.1).

Consideriamo la funzione analitica $f(z) = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$; il campo angolare β è semplicemente connesso [5] e contiene il semiasse positivo delle x; per il teorema di monodromia delle funzioni analitiche [6] esiste allora un ramo della funzione $z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ che è olomorfo nel campo angolare β e che sul semiasse positivo delle x coincide con la determinazione principale di $z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ cioè tale che per $x > 0$ si abbia: $z^{\frac{\pi}{\alpha}} = x^{\frac{\pi}{\alpha}}$.

D'ora in avanti, allorchè considereremo la funzione $f(z) \equiv z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ intenderemo riferirci al sopra indicato ramo olomorfo nel campo angolare β.

La funzione

$$\zeta = f(z) \equiv z^{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2.2}$$

realizza una trasformazione conforme del campo angolare β del piano della variabile complessa z in un campo angolare β' del piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$ con: $\pi < \beta' < 2\pi$. L'angolo β' ha il vertice nell'origine O' del piano ζ, come lati due semirette l'_1 ed l'_2 uscenti da O', contenute nel semipiano $\eta \leq 0$. L'angolo α del piano z si trasforma nel semipiano $\eta > 0$ del piano ζ; alla semiretta $x \geq 0$, $y = 0$ corrisponde la semiretta $\xi \geq 0$, $\eta = 0$; al semiasse tangente negativo a C_m in $z_1 = 0$, corrisponde la semiretta $\xi \leq 0$, $\eta = 0$ del piano ζ. La (2.2) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del dominio D ed i punti di un dominio Δ con $\Delta - O'$ contenuto nel campo angolare β'; alla curva C completa frontiera del dominio D corrisponde una curva Γ completa frontiera di Δ; ai punti del campo A, i punti del campo $A' = \Delta - \Gamma$.

Indichiamo con $\zeta_1 \equiv O'$, ζ_2, ..., ζ_m ($m = r$ se $m > 2$) i punti corrispondenti di $z_1 \equiv 0$, z_2, ..., z_m mediante la (2.2) e con Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m le porzioni di curva Γ che corrispondono agli archi C_1, C_2, ..., C_m di C.

È ovvio che (supposto $m > 2$) le Γ_2, Γ_3, ..., Γ_{m-1}, trasformate degli archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$: C_2, C_3, ..., C_{m-1} (interni al campo angolare β), risultano esse pure archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$.

---

[5] Con campo semplicemente connesso intendiamo un campo che, contenendo una curva semplice e chiusa, contiene il dominio limitato avente tale curva come completa frontiera.

[6] Cfr. [19], pag. 93.

Sia $\overline{C}_1$ un qualunque arco di C_1 avente un estremo in z_2 e non contenente O e $\overline{C}_m$ un qualunque arco di C_m, avente un estremo in z_{m-1} e non contenente O. Indichiamo con $\overline{\Gamma}_1$ e $\overline{\Gamma}_m$ le porzioni della curva Γ, contenute rispettivamente in Γ_1 e Γ_m, ottenute trasformando $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_m$ con la (2.2). Essendo $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_m$ interni al campo angolare β, $\overline{\Gamma}_1$ e $\overline{\Gamma}_m$ risultano archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$.

Poichè la (2.2) muta conformemente il campo angolare β nel campo angolare β', il campo A' presenta nei punti $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{m-1}$ angoli $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1}$ della stessa ampiezza degli angoli che A presenta, rispettivamente, in $z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}$. I punti $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{m-1}$ risultano pertanto punti singolari per Γ.

Proviamo che Γ_1 e Γ_m sono archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l')}$ con $l' = \min\left[l, \dfrac{\alpha}{\pi} l\right]$. A tale scopo è sufficiente dimostrare l'esistenza di due archi γ_1 e γ_m di classe $\mathscr{C}^{(1,l')}$ rispettivamente contenuti in Γ_1 e Γ_m ed aventi un estremo comune nel punto O'.

Sia $I \equiv (0, t_0)$ un intervallo chiuso del semiasse delle x positive tale che esista un arco c_1, contenuto in C_1, avente un estremo in O, suscettibile della rappresentazione ordinaria:

$$y = y(x)\,, \qquad 0 \leq x \leq t_0\,,$$

con $y(x)$ funzione di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$ in I (7). Indichiamo con γ_1 l'insieme dei punti di Γ_1 trasformati dei punti di c_1. Introdotta la funzione:

$$g(\tau) \begin{cases} = \dfrac{y\left(\tau^{\frac{\alpha}{\pi}}\right)}{\tau^{\frac{\alpha}{\pi}}} & \text{per } 0 < \tau \leq \tau_0 = t_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \\ = 0 & \text{per } \tau = 0\,, \end{cases}$$

è facile constatare che il luogo γ_1, è un arco di curva regolare (di classe $\mathscr{C}^{(1)}$) rappresentato dalle equazioni parametriche:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(\tau) \equiv \tau[1+[g(\tau)]^2]^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{arctang} g(\tau) \\ \eta &= \eta(\tau) \equiv \tau[1+[g(\tau)]^2]^{\frac{\pi}{2\alpha}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{arctang} g(\tau) \end{aligned}\right\} \left(0 \leq \tau \leq \tau_0;\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctang} g(\tau) < \frac{\pi}{2}\right).$$

---

(7) Diremo che una funzione $y(x)$ è di *classe* $\mathscr{C}^{(n)}$ $(n \geq 0)$ in un intervallo chiuso I se essa è continua in I assieme a tutte le sue derivate fino a quella di ordine n incluso. Diremo che $y(x)$ è di *classe* $\mathscr{C}^{(n,l)}$ in I se essa è di classe $\mathscr{C}^{(n)}$ in I e la sua derivata n-esima è ivi l-hölderiana (cfr. (1)).

Dalle espressioni di $\xi(\tau)$ ed $\eta(\tau)$ si verifica poi direttamente che γ_1 è un arcò di classe $\mathscr{C}^{(1,l')}$.

In modo analogo si prova l'esistenza dell'arco γ_m di classe $\mathscr{C}'^{(1,l')}$ contenuto in Γ_m. Poichè si vede facilmente che γ_1 e γ_m hanno in O' la stessa tangente (l'asse delle ξ), i due archi Γ_1 e Γ_m costituiscono un unico arco di classe $\mathscr{C}^{(1,l')}$.

Mediante la (2.2) abbiamo pertanto trasformato il dominio D r-singolare in un dominio Δ $(r-1)$-singolare avente come completa frontiera una curva semplice e chiusa composta di archi di classe $\mathscr{C}'^{(1,l')}$.

II caso: D-O non è contenuto in alcun campo angolare β, di vertice O, verificante le (2.1).

Esiste un numero positivo ε tale che, considerato l'intorno circolare (aperto) I_ϵ, di centro O e raggio ε, l'insieme $D \cdot I_\epsilon - O$ è interno ad un campo angolare β, di vertice O, verificante le (2.1).

Indichiamo con l_1 ed l_2 i lati dell'angolo β e siano M_1 ed M_2, rispettivamente, i punti che le due semirette l_1 ed l_2 hanno in comune con la frontiera dell'intorno I_ϵ.

Siano Λ_1 e Λ_2 due spezzate semplici congiungenti il punto O con il punto all'infinito del piano, aventi come unico punto in comune (al finito) il punto O, talchè la spezzata $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ divide il piano in due regioni aventi Λ come frontiera. Supponiamo inoltre che il primo lato di Λ_h $(h = 1, 2)$ (con un estremo in O) sia il segmento di estremi O ed M_h e che l'insieme Λ-O sia interno al campo complementare del dominio D. Indichiamo con B il campo illimitato, contenente A, avente Λ come completa frontiera.

Sussiste il seguente teorema I che è da ritenersi una conseguenza di fatti ben noti della teoria della rappresentazione conforme del quale, comunque, indicheremo la dimostrazione. Avvertiamo che nell'enunciato e nel corso della dimostrazione del teorema in questione supporremo di assumere l'origine nel punto O e il semiasse delle x positive coincidente con la semiretta l_1.

I. *Esiste una funzione $\zeta = \Phi(z)$ la quale verifica le seguenti condizioni*:

1) *È olomorfa in B, continua in $B + \Lambda$ e riesce $\Phi'(z) \neq 0$ in B.*

2) *Pone una corrispondenza biunivoca fra $B + \Lambda$ e un dominio del piano complesso ζ ottenuto aggregando ad un campo angolare di ampiezza β la sua frontiera, e fa corrispondere al punto O il vertice O' di β ed i punti all'infinito dei due piani.*

3) *In un intorno su* $B + \Lambda$ *del punto* O *è rappresentata dallo sviluppo*:

$$\Phi(z) = z \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{h\frac{\pi}{\beta}} \qquad (0 \leq \text{Arg}\, z \leq \beta)\,, \tag{2.3}$$

con $c_0 \neq 0$.

Si consideri un dominio circolare esterno a $B + \Lambda$, di centro z_0 e raggio R e sia T il dominio ottenuto come trasformato di $B + \Lambda$ mediante la trasformazione

$$w = z_0 + \frac{R^2}{z - z_0}\,. \tag{2.4}$$

È noto che esiste una funzione $w_1 = \varphi(w)$ la quale verifica le seguenti condizioni (8):

1) È olomorfa all'interno di T con $\varphi'(w) \neq 0$ e continua in T.

2) Pone una corrispondenza biunivoca fra T e il dominio circolare $\left| w_1 - \frac{1}{2}\, i \right| \leq \frac{1}{2}$.

Si può imporre alla φ la condizione di trasformare il punto $w = z_0$ (omologo del punto $z = \infty$ per la (2.4)) nel punto i del piano w_1, cioè: $\varphi(z_0) = i$.

La funzione:

$$\zeta = \left[\frac{1}{\varphi\left(z_0 + \dfrac{R^2}{z - z_0}\right) - i} - \frac{1}{\varphi\left(z_0 - \dfrac{R^2}{z_0}\right) - i} \right]^{\frac{\beta}{\pi}},$$

dove come determinazione della potenza va assunta quella principale (9), verifica le condizioni 1) e 2) dell'enunciato.

Consideriamo la funzione:

$$\psi(z) = \frac{1}{\varphi\left(z_0 + \dfrac{R^2}{z - z_0}\right) - i} - \frac{1}{\varphi\left(z_0 - \dfrac{R^2}{z_0}\right) - i}\,,$$

e poniamo: $\quad z = \varrho e^{i\theta}$ $(0 \leq \varrho < \varepsilon = OM_1\,,\ \ 0 \leq \theta \leq \beta < 2\pi)$.

---

(8) Cfr. [14], pagg. 390-445.

(9) Dato un numero complesso τ indicheremo con Arg princ τ l'argomento del numero complesso τ verificante la limitazione: $-\pi <$ Arg princ $\tau \leq \pi$, con determinazione principale della potenza $\tau^{\frac{\alpha}{\pi}}$ quella individuata da: $-\pi <$ Arg princ $\tau \leq \pi$.

Per la continuità di $\psi(z)$ sui lati OM_1 ed OM_2 di A, poichè risulta $\psi(0) = 0$, $\Im\psi(\varrho) = \Im\psi(\varrho e^{i\beta}) = 0$, $(0 \leq \varrho < \varepsilon)$, si constata facilmente il sussistere del seguente sviluppo, uniformemente convergente in $(B + A) \cdot I_\epsilon$,

$$\Im\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varrho^{k\frac{\pi}{\beta}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta} \theta ,$$

e quindi si ha, con convergenza uniforme del secondo membro in $(B + A) \cdot I_\epsilon$:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k\frac{\pi}{\beta}}, \qquad (0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta) .$$

Le a_k $(k \geq 1)$ sono costanti reali ed è $a_1 > 0$ dato che:

$$a_1 = \frac{1}{\varrho^{\frac{\pi}{\beta}}} \frac{2}{\beta} \int_0^\beta \Im\psi(\varrho e^{i\theta}) \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta} \theta d\theta \qquad (\varrho > 0)$$

e che $\Im\psi(\varrho e^{i\theta})$ è sempre positiva per $\varrho > 0$ e $0 < \theta < \beta$.

Poniamo

$$\psi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{(k-1)\frac{\pi}{\beta}} \qquad (0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta) ;$$

si constata che riesce:

$$\psi(z) = z^{\frac{\pi}{\beta}} \psi_1(z) \qquad (0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta) .$$

Sia h_0 l'intero determinato dalla condizione:

$$\frac{\pi}{\beta} \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg\,princ} \psi_1(z) + 2h_0\pi = \operatorname{Arg\,princ} \psi(z) \qquad (0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta) .$$

Si ha:

$$[\psi(z)]^{\frac{\beta}{\pi}} = z \{\psi_1(z)\}^{\frac{\beta}{\pi}},$$

dove con $[\psi(z)]^{\frac{\beta}{\pi}}$ si è indicata la determinazione principale di tale potenza e con $\{\psi_1(z)\}^{\frac{\beta}{\pi}}$ la determinazione individuata da:

$$\operatorname{Arg} \psi_1(z) = \operatorname{Arg\,princ} \psi_1(z) + 2h_0\pi .$$

Tenuto presente che a_1 è reale positivo, posto:

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{a_1} z^{(k-1)\frac{\pi}{\beta}} \qquad (0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta), \tag{2.5}$$

si ha:

$$[\psi(z)]^{\frac{\beta}{\pi}} = a_1^{\frac{\beta}{\pi}} e^{2ih_0\beta} z [1 + g(z)]^{\frac{\beta}{\pi}}$$

dove, come in precedenza, la parentesi quadra denota la determinazione principale della potenza.

Sia $\sigma > 0$ tale che per $|z| < \sigma$ riesca: $|g(z)| < 1$. Si ha, per ogni z di $B + A$ tale che $|z| < \sigma$:

$$[1 + g(z)]^{\frac{\beta}{\pi}} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\frac{\beta}{\pi}}{h} [g(z)]^h$$

e quindi, tenendo presente la (2.5) ed un noto teorema sulle serie di potenze [10], rimane provata la (2.3).

Come conseguenza dello sviluppo (2.3), $\Phi(z)$ è continua assieme alla sua derivata prima in D, $\Phi'(z)$ è ivi hölderiana [11] e poichè $\Phi'(0) = c_0 = a_1^{\frac{\beta}{\pi}} e^{2ih_0\beta} \neq 0$, riesce $\Phi'(z) \neq 0$ in D.

La trasformazione $\zeta = \Phi(z)$ è conforme anche nei punti O e O' e quindi il campo A^*, trasformato del campo A, presenta in O', come già A in O, un angolo di ampiezza α. Detta C^* la frontiera del campo A^*, trasformata di C con la $\zeta = \Phi(z)$, la curva C^* risulta composta di archi di classe $\mathscr{C}^{(1,l^*)}$ con $0 < l^* \leq l$, se di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$ erano gli archi componenti C. Il dominio $D^* = A^* + C^*$ si trova pertanto nella condizione del I caso; ad esso può applicarsi il procedimento là descritto talchè D^* viene trasformato in un dominio Δ $(r - 1)$-singolare.

Iterando r volte il procedimento si perviene ad un dominio limitato da una curva semplice e chiusa, priva di punti singolari, che — composta di archi di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$ $(0 < \lambda \leq l)$ — prende il nome di curva semplice e chiusa di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$.

È ovvio che essa è, nell'intorno di ogni suo punto, rappresentabile parametricamente con funzioni di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$ nell'intervallo base relativo alla rappresentazione parametrica adottata.

---

(10) Cfr. [16], pag. 611, teor. III.

(11) Diremo che una funzione $f(z)$ definita in un dominio D è (*uniformemente*) *hölderiana con esponente* δ *in* D o, più brevemente, δ-*hölderiana in* D, se esistono due costanti δ e K, con $0 < \delta \leq 1$ tali che, per ogni coppia di punti z' e z'' di D riesce:

$$|f(z') - f(z'')| \leq K |z' - z''|^{\delta}.$$

Il risultato conseguito si può riassumere nel seguente enunciato:

II. *Sia D un dominio r-singolare, non cuspidale, di frontiera C. Esiste una funzione $\zeta = F(z)$, definita in D, la quale, detto Δ il suo codominio, verifica le seguenti condizioni:*

1) *Pone una corrispondenza biunivoca fra D e Δ, essendo Δ un dominio limitato da una curva Γ semplice e chiusa di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$.*

2) *È continua in D, olomorfa nel campo $A = D - C$ e se $z_1, z_2, \ldots, z_r$ sono gli r punti singolari di C, ha derivata prima continua in $D - (z_1 + \ldots + z_r)$.*

3) *Fissato z_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ e scelto un qualsiasi ramo della funzione $(z - z_h)^{\frac{\pi}{\alpha_h}}$, olomorfo in A, può porsi:*

$$F(z) - F(z_h) = (z - z_h)^{\frac{\pi}{\alpha_h}} G_h(z) , \tag{2.6}$$

dove $G_h(z)$ è una ben determinata funzione olomorfa in A, continua in D, diversa da zero in z_h e tale che la funzione $(z - z_h)^{\frac{\pi}{\alpha_h}} \frac{d}{dz} G_h(z)$ risulti continua nel punto z_h.

3. Definizione di due particolari classi di funzioni.

Diremo che una funzione $m(z)$ appartiene alla classe di funzioni $\mathfrak{M}(C)$ se essa verifica le seguenti condizioni:

1) È una funzione complessa del punto $z = x + iy$ variabile sulla curva C r-singolare, misurabile secondo Lebesgue rispetto all'arco s di C.

2) Indicato con S un qualunque arco di C che non contiene alcun punto singolare e con S_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ una porzione della curva C costituita da due archi di C aventi in comune il solo punto z_h e non contenenti alcuno dei restanti punti z_k con $k \neq h$, riesce:

$$m(z) \in \mathfrak{L}^{(1)}(S) \tag{3.1}$$

$$m(z)|z - z_h|^{\frac{\pi}{\alpha_h} - 1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(S_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r) . \tag{3.2}$$

Consideriamo il dominio Δ, codominio della funzione $\zeta = F(z)$ introdotta nel teorema II, limitato dalla curva semplice e chiusa Γ di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$; indichiamo con ds l'elemento d'arco sulla curva C e con $d\sigma$ quello

su Γ. Su ogni arco di Γ che non contiene alcuno dei trasformati dei punti singolari di C si ha:

$$d\sigma = |F'(z)|ds \,. \tag{3.3}$$

Indicata con $z = F^{-1}(\zeta)$ la funzione inversa della $\zeta = F(z)$, porremo:

$$\mu(\zeta) = m[F^{-1}(\zeta)] \,. \tag{3.4}$$

Tenendo presente la (3.3) e, come risulta dalla (2.6) che

$$|F'(z)| = O\left(|z - z_h|^{\frac{\pi}{\alpha_h} - 1}\right) \ (^{12}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r) \,,$$

è immediato dimostrare che:

III. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione* $\mu(\zeta)$ *appartenga ad* $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ *è che esista una* $m(z)$ *della classe* $\mathfrak{M}(C)$ *verificante la* (3.4). *Si ha allora*:

$$\int_\Gamma \mu(\zeta) d\sigma = \int_C m(z)|F'(z)|ds \,.$$

Supponiamo che in s degli r punti singolari di C $(0 \leq s \leq r)$ il campo $A = D - C$ presenti angoli di ampiezza maggiore di π. Sia $j_1, j_2, \ldots j_r$, una disposizione degli indici $1, 2, \ldots, r$ tale che nei punti $z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_s}$ le ampiezze degli angoli siano, rispettivamente, $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_s}$ con $\alpha_{j_k} > \pi$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ ed in $z_{j_{s+1}}, z_{j_{s+2}}, \ldots, z_{j_r}$, rispettivamente $\alpha_{j_{s+1}}, \alpha_{j_{s+2}}, \ldots, \alpha_{j_r}$ con $\alpha_{j_h} < \pi$ $(h = s + 1, \ldots, r)$.

Diremo che una funzione $f(z)$ appartiene alla classe di funzioni $\Phi(D)$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $f(z)$ è una funzione complessa del punto z variabile in D, olomorfa nel campo A, continua assieme alla $f'(z)$ nel dominio D.

2) Sia q_{j_h} il più piccolo intero tale che:

$$q_{j_h} \geq \frac{\pi}{\alpha_{j_h}} - 1 \qquad [h = s + 1, \ldots, r; \quad 0 \leq s \leq r] \,;$$

esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{z \to z_{j_h}} \frac{f'(z)}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} \qquad [h = s + 1, \ldots, r; \quad 0 \leq s \leq r] \,. \tag{3.5}$$

---

(12) Se a e b sono due variabili fra loro in corrispondenza, dicendo che $a = 0(b)$ intendiamo che la variabile a/b è limitata.

Consideriamo la normale (interna) n_z a C, in un punto z regolare di C. È immediato constatare che se $m(z) \in \mathfrak{M}(C)$ e $f(z) \in \Phi(D)$, le funzioni $m(z) \dfrac{\partial}{\partial n_z} \Re f(z)$, $m(z) \dfrac{\partial}{\partial n_z} \Im f(z)$ appartengono alla classe $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$.

4. Un teorema di chiusura per un sistema di polinomi in una variabile complessa.

Sia Δ un dominio del piano complesso ζ limitato da una curva Γ semplice e chiusa di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$ e $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, r punti di tale curva, fra loro distinti. Sussiste il teorema:

IV. *Se $\mu(\zeta)$ è una funzione reale appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ tale che:*

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta = 0 ,$$

qualunque sia il polinomio $\psi(\zeta)$, nella variabile ζ, nullo in ciascuno dei punti $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, allora μ è costante su Γ.

Il teorema sarà ovviamente provato se faremo vedere che dall'essere:

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\ldots(\zeta-\zeta_r)\zeta^k d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) , \tag{4.1}$$

segue che μ è costante su Γ.

Sia T un dominio circolare avente il centro in un arbitrario punto ζ_0 del piano e contenente il dominio Δ. Sia w un punto fissato all'esterno di T. Dimostriamo preliminarmente che, per ogni w esterno a T, riesce:

$$\sum_{h=1}^{r} \frac{a_h + ib_h}{w - \zeta_h} + \int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0 , \tag{4.2}$$

essendo le a_h e b_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ ben determinate costanti reali.

Per provare la (4.2), procediamo per induzione [13]. Supponiamo dapprima $r = 0$. Le (4.1) si riducono, in tal caso, alle equazioni:

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\zeta^k d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{4.3}$$

[13] Nel ragionamento che segue per acquisire la (4.2) dalla (4.1) non è necessario supporre che μ sia reale.

Essendo, per w esterno a T:

$$\frac{1}{\zeta - w} = \frac{1}{\zeta_0 - w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_0)^k}{(w - \zeta_0)^k}$$

e convergendo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_0)^k}{(w - \zeta_0)^k}$, uniformemente al variare di ζ in ogni insieme chiuso contenuto in T, per ogni fissato w all'esterno di T, ne segue:

$$\int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = \frac{1}{\zeta_0 - w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(w - \zeta_0)^k} \int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\,(\zeta - \zeta_0)^k d\zeta\,,$$

e quindi, per le (4.3): $\int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0$, cioè la (4.2) per $r = 0$.

Supponiamo di aver provato la (4.2) per $r - 1$; riescono allora ben determinate le costanti $a_h^{(r-1)}$ e $b_h^{(r-1)}$ $(h = 1, 2, \ldots, r - 1)$, tali che, per ogni w esterno a T, riesce:

$$\sum_{h=1}^{r-1} \frac{a_h^{(r-1)} + i b_h^{(r-1)}}{w - \zeta_h} + \int_{+\Gamma} \frac{M(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0$$

qualunque sia la funzione $M(\zeta)$, appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ e verificante le condizioni:

$$(4.4) \qquad \int_{+\Gamma} M(\zeta)\,(\zeta - \zeta_1)\,(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_{r-1})\zeta^k d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)\,.$$

Assumiamo: $M(\zeta) = \mu(\zeta)(\zeta - \zeta_r)$, con che le (4.4) altro non sono che le (4.1). Si ha pertanto:

$$(4.5) \qquad \sum_{h=1}^{r-1} \frac{a_h^{(r-1)} + i b_h^{(r-1)}}{w - \zeta_h} + \int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\, \frac{\zeta - \zeta_r}{\zeta - w}\, d\zeta = 0$$

per ogni w esterno a T. Poichè $\frac{\zeta - \zeta_r}{\zeta - w} = 1 + \frac{w - \zeta_r}{\zeta - w}$, la (4.5) diviene:

$$(4.6) \qquad \sum_{h=1}^{r-1} \frac{a_h^{(r-1)} + i b_h^{(r-1)}}{w - \zeta_h} + \int_{+\Gamma} \mu(\zeta) d\zeta + (w - \zeta_r) \int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta = 0\,.$$

Essendo:

$$\frac{1}{(w - \zeta_h)\,(w - \zeta_r)} = \frac{1}{\zeta_h - \zeta_r} \left(\frac{1}{w - \zeta_h} - \frac{1}{w - \zeta_r} \right) \qquad (h \neq r)\,,$$

posto

$$
(4.7) \qquad
\begin{aligned}
a_h + i b_h &= \frac{a_h^{(r-1)} + i b_h^{(r-1)}}{\zeta_h - \zeta_r} \qquad \text{per } 1 \leq h \leq r-1 \\
a_r + i b_r &= \int_{+\Gamma} \mu(\zeta) d\zeta - \sum_{h=1}^{r-1} (a_h + i b_h) ,
\end{aligned}
$$

dalla (4.6) — tenendo presenti le (4.7) — segue la (4.2). Per l'analiticità della funzione a primo membro della (4.2), si ha il sussistere di questa per ogni w esterno al dominio Δ.

Indichiamo con ν_ζ la normale (interna) a Γ in ζ; essendo

$$
\int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \sigma_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma - i \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma ,
$$

dalla (4.2), esprimendo che il coefficiente dell'immaginario della funzione a primo membro è nullo, si trae, posto: $\zeta_h = \xi_h + i \eta_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$,

$$
(4.8) \qquad \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma = \sum_{h=1}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2} ,
$$

per ogni $w = u + iv$, esterno a Δ.

Sia ora w un punto di Γ diverso da ζ_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$; poichè, come ben noto (14), se z è un punto del campo complementare di Δ appartenente all'asse $\nu_{\bar{w}}$, riesce — allorchè w è fuori di un ben determinato insieme $\mathcal{N}$ di misura nulla su Γ —

$$
\lim_{z \to w \, (\text{su } \nu_w)} \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - z| \, d_\zeta \sigma = \pi \mu(w) + \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma ,
$$

dalla (4.8) si deduce:

$$
(4.9) \qquad \pi \mu(w) + \int_{\Gamma} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma = \sum_{h=1}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2} ,
$$

per tutti i punti w di $\Gamma - \mathcal{N} - (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_r)$.

Ci proponiamo di mostrare che per ogni h si ha: $a_h + i b_h = 0$. È ovvio che l'annullarsi delle costanti $a_h + i b_h$ non dipende dalla scelta del sistema di riferimento cartesiano. Assumiamo allora l'origine delle coordinate in ζ_1, e l'asse delle ξ coincidente con l'asse tangente positivo a Γ

(14) Cfr. [9].

in ζ_1. Indichiamo ancora con a_h e b_h $(h = 1, 2, \dots, r)$ le costanti con le quali la (4.8) e la (4.9) sussistono nel riferimento adesso fissato.

Riesce quindi:

$$\int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma = \tag{4.8)'$$

$$= \frac{b_1 u - a_1 v}{u^2 + v^2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2},$$

per ogni w esterno a Δ, e

$$\pi \mu(w) + \int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma = \tag{4.9)'$$

$$= \frac{b_1 u - a_1 v}{u^2 + v^2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2},$$

per $w \in \Gamma$ [illegible] $(\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_r)$.

Esiste, per le ipotesi fatte su Γ, un arco $\gamma^{(1)}$ di Γ contenente il punto $\zeta_1 = 0$ e nessuno dei rimanenti punti $\zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_r$ e avente la rappresentazione ordinaria: $u = \xi$, $v = \eta(\xi)$, $-\delta \leq \xi \leq \delta$ $(\delta > 0)$, con $\eta(\xi)$ funzione di classe $\mathcal{C}^{(1,\lambda)}$ in $(-\delta, \delta)$.

È facile constatare — tenendo presente che $\dfrac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| = O\left(\dfrac{1}{|\zeta - w|^{1-\lambda}}\right)$ $(\zeta \in \Gamma$ e $w \in \Gamma)$ — essere la funzione a primo membro della (4.9)' sommabile su $\gamma^{(1)}$; inoltre, ovviamente, lo è pure la funzione:

$$E(u, v) = \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2}.$$

Sia $-\delta \leq \xi \leq \delta$; si ha $|\eta(\xi)| = |\xi| \, |\eta'(\varrho\xi)|$ con $0 < \varrho < 1$ e, poichè per ipotesi: $\eta'(\xi) = 0(|\xi|^\lambda)$, esiste una costante positiva H tale che: $|\eta'(\varrho\xi)| \leq H |\varrho\xi|^\lambda \leq H |\xi|^\lambda$. Ne viene:

$$\left| \frac{v}{u^2 + v^2} \right| = \frac{|\eta(\xi)|}{\xi^2 + [\eta(\xi)]^2} \leq H \frac{|\xi|^{1+\lambda}}{|\xi|^2} = H |\xi|^{\lambda - 1}, \tag{4.10}$$

$$\left| \frac{u}{u^2 + v^2} \right| = \frac{|\xi|}{\xi^2 + [\eta(\xi)]^2} \geq \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{1 + H^2 |\xi|^{2\lambda}}. \tag{4.11}$$

La funzione $\dfrac{v}{u^2 + v^2}$ è pertanto sommabile su $\gamma^{(1)}$ mentre, invece, non lo è per la (4.11) la funzione $\dfrac{u}{u^2 + v^2}$. Dalla (4.9)' segue perciò $b_1 = 0$.

Sia v_0 un numero reale positivo tale che, considerato il segmento Ω, appartenente al semiasse delle η negative, avente come estremi, rispettivamente, O e il punto $w_0 = -iv_0$, risulti $\Omega - O$ contenuto nel campo complementare del dominio Δ.

La (4.8)', per $w \in \Omega - O$, diviene:

$$\int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - iv| \, d_\zeta \sigma = \frac{a_1}{|v|} + E(0, v) , \qquad -v_0 \leq v < 0 . \tag{4.12}$$

La funzione $E(0, v)$ è ovviamente sommabile in $(-v_0, 0)$; se proviamo che tale è anche la funzione $\int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - iv| d_\zeta \sigma$, dalla (4.12) seguirà $a_1 = 0$.

Sia $\zeta = \zeta(\xi) = \xi + i\eta(\xi)$, $-\delta \leq \xi \leq \delta$, $w = u + iv$; si ha, detti $\cos(\nu_\zeta, \xi)$, $\cos(\nu_\zeta, \eta)$ i coseni direttori dell'asse ν_ζ:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - w| = \frac{(\xi - u)\cos(\nu_\zeta, \xi) + [\eta(\xi) - v]\cos(\nu_\zeta, \eta)}{(\xi - u)^2 + [\eta(\xi) - v]^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\eta'(\xi)]^2}} \frac{-(\xi - u)\eta'(\xi) + \eta(\xi) - v}{(\xi - u)^2 + [\eta(\xi) - v]^2}$$

e, per $w = iv$, $-v_0 \leq v < 0$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - iv| \right| \leq \frac{|\eta(\xi) - \xi\eta'(\xi)|}{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2} + \frac{|v|}{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2} .$$

Si ha

$$|\eta(\xi) - \xi\eta'(\xi)| = |\xi\eta'(\varrho\xi) - \xi\eta'(\xi)| = |\xi|\,|\eta'(\varrho\xi) - \eta'(\xi)| \leq H|\xi|\,|\varrho\xi - \xi|^\lambda =$$

$$= H|\xi|^{\lambda+1}|\varrho - 1|^\lambda \leq H|\xi|^{\lambda+1} \leq H\{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2\}^{\frac{\lambda+1}{2}} .$$

Pertanto

$$\frac{|\eta(\xi) - \xi\eta'(\xi)|}{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2} \leq \frac{H}{\{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2\}^{\frac{1}{2}(1-\lambda)}} \leq H|\eta(\xi) - v|^{\lambda-1} .$$

Ne viene

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - iv| \right| \leq H|\eta(\xi) - v|^{\lambda-1} + \frac{|v|}{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2} . \tag{4.13}$$

Risulta

$$(4.14)\qquad \int_{-v_0}^{0} |\eta(\xi) - v|^{\lambda-1} dv \begin{cases} = \dfrac{1}{\lambda}\left| |v_0 + \eta(\xi)|^\lambda - |\eta(\xi)|^\lambda \right| & \text{per } \eta(\xi)\,[v_0 + \eta(\xi)] \geq 0 \\ = \dfrac{1}{\lambda}\left| |v_0 + \eta(\xi)|^\lambda + |\eta(\xi)|^\lambda \right| & \text{per } \eta(\xi)\,[v_0 + \eta(\xi)] < 0\,. \end{cases}$$

Per $\zeta = \zeta(\xi) \in \gamma^{(1)}$, $\zeta \neq 0$, si ha inoltre

$$(4.15)\qquad \int_{-v_0}^{0} \frac{|v|}{\xi^2 + [\eta(\xi) - v]^2}\, dv =$$

$$= -\log|\zeta| + \log|\zeta - iv_0| - \frac{\eta(\xi)}{\xi}\left[\operatorname{arctg}\frac{v_0 + \eta(\xi)}{\xi} - \operatorname{arctg}\frac{\eta(\xi)}{\xi}\right]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{v + \eta(\xi)}{\xi} < \frac{\pi}{2}\right).$$

La funzione $\dfrac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|\zeta - iv|$ è, per ogni fissato ζ di $\gamma^{(1)}$, con $\zeta \neq 0$, sommabile nell'intervallo $(-v_0, 0)$ e riesce, per la (4.13) e la (4.15):

$$(4.16)\qquad \int_{-v_0}^{0} \left|\frac{\partial}{\partial \nu_\zeta}\log|\zeta - iv|\right| dv \leq$$

$$\leq H\int_{-v_0}^{0} |\eta(\xi) - v|^{\lambda-1} dv + \left|\log|\zeta - iv_0|\right| +$$

$$+ \left|\frac{\eta(\xi)}{\xi}\left[\operatorname{arctg}\frac{v_0 + \eta(\xi)}{\xi} - \operatorname{arctg}\frac{\eta(\xi)}{\xi}\right]\right| + \left|\log|\zeta|\right|.$$

Introduciamo la funzione così definita in $(-\delta, \delta)$:

$$(4.17)\qquad q(\xi) = H\int_{-v_0}^{0} |\eta(\xi) - v|^{\lambda-1} dv + \left|\log|\xi + i[\eta(\xi) - v_0]|\right| +$$

$$+ \left|\frac{\eta(\xi)}{\xi}\left[\operatorname{arctg}\frac{v_0 + \eta(\xi)}{\xi} - \operatorname{arctg}\frac{\eta(\xi)}{\xi}\right]\right|$$

che, riguardando la (4.14), si constata esser ivi continua.

Si ha, per la (4.16) e la (4.17):

$$|\mu[\zeta(\xi)]| \int_{-v_0}^{0} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - iv| \right| dv \leq |\mu[\zeta(\xi)]| \left| \log |\zeta(\xi)| \right| + |\mu[\zeta(\xi)]| q(\xi) . \tag{4.18}$$

La funzione $|\mu[\zeta(\xi)]| \, q(\xi)$ è sommabile in $(-\delta, \delta)$; proviamo che tale è la funzione $|\mu[\zeta(\xi)]| \left| \log |\zeta(\xi)| \right|$.

Dalla (4.9)' si ha, per $\zeta \in \gamma^{(1)} - \mathcal{N} - \zeta_1$:

$$\mu(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(z) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log |z - \zeta| \, d_z s - \frac{a_1}{\pi} \frac{\eta(\xi)}{\xi^2 + [\eta(\xi)]^2} + \frac{1}{\pi} E[\xi, \eta(\xi)] ,$$

e quindi, per la (4.10), riesce quasi ovunque in $(-\delta, \delta)$:

$$|\mu[\zeta(\xi)]| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\gamma^{(1)}} |\mu(z)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log |z - \zeta| \right| d_z s + \tag{4.19}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma - \gamma^{(1)}} |\mu(z)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log |z - \zeta| \right| d_z s + \frac{a_1}{\pi} H |\xi|^{\lambda - 1} + \frac{1}{\pi} |E[\xi, \eta(\xi)]| .$$

La funzione

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma - \gamma^{(1)}} |\mu(z)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log |z - \zeta(\xi)| \right| d_z s + \frac{1}{\pi} |E[\xi, \eta(\xi)]| ,$$

è continua in $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ e quindi per la (4.19) si ha, in quasi tutto l'intervallo $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$, detta K una costante positiva opportuna:

$$\left| \log |\zeta(\xi)| \right| |\mu[\zeta(\xi)]| \leq K \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\mu[z(x)]|}{|x - \xi|^{1-\lambda}} dx + |\xi|^{\lambda - 1} + 1 \right\} \log \frac{K}{|\xi|} . \tag{4.20}$$

La funzione

$$\frac{|\mu[z(x)]|}{|x - \xi|^{1-\lambda}} \log \frac{K}{|\xi|}$$

è — come segue dal criterio di Tonelli — sommabile nel dominio rettangolare: $-\delta \leq x \leq \delta$; $-\frac{\delta}{2} \leq \xi \leq \frac{\delta}{2}$; pertanto la funzione di ξ, a secondo membro della (4.20), è sommabile in $\left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$. Da ciò segue la sommabilità della funzione a primo membro in tutto l'intervallo $(-\delta, \delta)$

e quindi, per la (4.18), la sommabilità di $|\mu(\zeta)| \int_{-v_0}^{0} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - iv| \right| dv$ su $\gamma^{(1)}$.

Ne segue che $|\mu[\zeta(\xi)]| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta(\xi) - iv| \right|$ è sommabile in $(-\delta, \delta) \times$ $\times (-v_0, 0)$ e pertanto la funzione: $\int_{\gamma^{(1)}} \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - iv| d_\zeta \sigma$ è funzione di v sommabile in $(-v_0, 0)$. Dalla (4.12) segue allora $a_1 = 0$.

Analogamente si prova che $a_h = b_h = 0$ per $h = 2, 3, \ldots, r$. La (4.8) diviene

$$\int_\Gamma \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| \, d_\zeta \sigma = 0$$

per ogni w esterno a Δ. Ne segue, per un noto teorema ([15]), $\mu = \text{cost}$, cioè la tesi.

5. Un teorema di chiusura per una classe di funzioni definite su una curva r-singolare.

Consideriamo le classi di funzioni $\mathfrak{M}(C)$ e $\Phi(D)$ introdotte nel corso del § 3; sussiste il seguente teorema:

V. *Se $m(z)$ è una funzione della classe $\mathfrak{M}(C)$ tale che*

$$(5.1) \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Re f(z) ds = 0, \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Im f(z) ds = 0,$$

per ogni funzione $f(z)$ della classe $\Phi(D)$, allora $m(z)$ è una costante.

Sia Δ il dominio del piano ζ, limitato dalla curva semplice e chiusa Γ di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$, codominio della funzione $\zeta = F(z)$ introdotta nel corso del teorema II. Consideriamo la funzione $z = F^{-1}(\zeta)$ inversa della $\zeta = F(z)$ e la funzione $\mu(\zeta) = m[F^{-1}(\zeta)]$ la quale, per il teorema III, appartiene ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$.

Posto $\zeta_h = F(z_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$ [cfr. pag. 10] introduciamo i seguenti polinomi nella variabile complessa ζ:

$$\psi_k(\zeta) = \prod_{h=1}^{r} (\zeta - \zeta_h)\zeta^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

e, fissato k, sia $\varphi_k(\zeta)$ una qualunque primitiva di $\psi_k(\zeta)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

([15]) Cfr. [6], pag. 16.

Posto

$$f_k(z) = \varphi_k[F(z)] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,,$$

constatiamo che $f_k(z)$ è, per ogni k, una funzione della classe $\Phi(D)$.

È intanto evidente che $f_k(z)$ è olomorfa in A e continua in D. Inoltre $f'_k(z)$ è continua in $D - (z_1 + z_2 + \ldots + z_r)$ essendo:

$$f'_k(z) = \frac{d\varphi_k[F(z)]}{d\zeta} F'(z) = \psi_k[F(z)]F'(z) = \prod_{h=1}^{r} [F(z) - F(z_h)]\,[F(z)]^k F'(z)\,.$$

Poichè, fissato z_h $(h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$, sussiste la (2.6), è facile constatare che

$$\lim_{z \to z_h \,(\text{su } D)} f'_k(z) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r\,;\ \ k = 0, 1, \ldots)\,.$$

Le funzioni $f'_k(z)$ risultano pertanto continue in D.

Consideriamo il punto z_{j_h} $(h = s + 1\,,\ \ldots,\ r)$; si ha:

$$\frac{f'_k(z)}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} = \prod_{n=1}^{r} [F(z) - F(z_n)]\,[F(z)]^k \,\frac{F'(z)}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}}\,.$$

Ricordando la (2.6), esistono finiti i limiti:

$$\lim_{z \to z_{j_h}} \frac{[F(z) - F(z_{j_h})]}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} F'(z)\,,$$

e quindi ogni funzione $f_k(z)$ verifica l'ipotesi 2) di pag. 11. Ne viene l'appartenenza di $f_k(z)$ alla classe $\Phi(D)$.

Si ha:

$$i\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta = i\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\frac{d\varphi_k(\zeta)}{d\zeta}\,d\zeta = \int_{\Gamma} \mu(\zeta)\,\frac{\partial \varphi_k(\zeta)}{\partial \nu_\zeta}\,d\sigma = \int_{C} m(z)\,\frac{\partial f_k(z)}{\partial n_z}\,ds\,.$$

Poichè può ovviamente supporsi $m(z)$ reale, dalle (5.1) segue:

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)\ldots(\zeta - \zeta_r)\zeta^k d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{5.2}$$

Dalle (5.2), per il teorema IV, segue $\mu = \text{cost}$ e quindi $m = \text{cost}$ e cioè la tesi.

6. Un teorema di chiusura per le derivate normali di un sistema di polinomi armonici.

VI. *Sia* $\{P_k(z)\}$ *il sistema dei polinomi nella variabile complessa* z *ciascuno dei quali è determinato dalle condizioni*:

$$\frac{d}{dz} P_k(z) = \prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}} z^k , \quad P_k(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

(per la definizione di q_{j_h}, cfr. pag. 11).

Se $m(z)$ *appartiene a* $\mathfrak{M}(C)$ *e verifica le condizioni*:

$$(6.1) \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Re P_k(z) d_z s = \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Im P_k(z) d_z s = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

allora $m(z)$ *è una costante su* C.

Sia $f(z)$ una qualsiasi funzione di $\Phi(D)$. Poniamo:

$$h(z) = \frac{f'(z)}{\prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} .$$

La $h(z)$ riesce continua in D ed olomorfa in A. Esiste allora una successione di polinomi $\{Q_n(z)\}$ tale che:

$$(6.2) \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(z) = h(z)$$

in tutto D ([16]).

Dalla (6.2) segue:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}} Q_n(z) = f'(z) .$$

Ma le (6.1) implicano:

$$\int_{+C} m(z) \prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}} Q_n(z) dz = 0$$

e quindi sono verificate le (5.1) per ogni $f(z)$ di $\Phi(D)$. Da ciò la tesi.

([16]) Cfr. [20], pagg. 47-48.

Come ovvio caso particolare si ottiene il seguente teorema:

VII. *Se $m(z)$ oltre che a $\mathfrak{M}(C)$ appartiene a $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ e se riesce:*

$$\int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Re z^k ds = 0 , \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \Im z^k ds = 0 \qquad (k = 1, 2, ...) ,$$

allora $m(z)$ è costante su C.

7. Sulle ipotesi del teorema VI.

Consideriamo le condizioni (3.1) e (3.2) che intervengono nella definizione della classe di funzioni $\mathfrak{M}(C)$ data a pag. 10.

Sia z_h un punto singolare di C nel quale il campo A presenta un angolo $\alpha_h > \pi$; la (3.2) relativa al punto z_h è data da:

$$m(z)|z - z_h|^{\frac{\pi}{\alpha_h} - 1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(S_h) , \tag{3.2}$$

essendo S_h una porzione della curva C costituita da due archi di C aventi in comune il solo punto z_h e non contenenti alcuno dei restanti punti z_k con $k \neq h$.

Portiamo un esempio il quale prova che nella definizione della classe $\mathfrak{M}(C)$ non si può sostituire alla (3.2) una condizione del tipo:

$$m(z)|z - z_h|^{q-1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(S_h) , \tag{7.1}$$

comunque si assuma $q > \dfrac{\pi}{\alpha_h}$, senza che il teorema VI cessi di sussistere.

L'esempio che porteremo permetterà pure di constatare che anche sostituendo alla (3.2) una condizione del tipo:

$$m(z)\left| \log |z - z_h|\right|^{-\sigma} |z - z_h|^{\frac{\pi}{\alpha_h} - 1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(S_h) \qquad (h = 1, 2, ..., r) \tag{7.2}$$

con $\sigma > 1$, il teorema VI cessa di sussistere.

Resta aperta la questione di decidere se il teorema è vero nella classe di funzioni soddisfacenti, in luogo delle (3.2), condizioni quali la (7.2), con $0 < \sigma \leq 1$.

Sia A il campo costituito da tutti i punti del piano complesso i quali verificano una almeno delle seguenti limitazioni:

$$\left| z + \frac{1}{2} i \right| < \frac{1}{2} ; \qquad \left| z + \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \left[\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right]^2} - i \frac{\left[\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right]^2 - 1}{2\left\{1 + \left[\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right]^2\right\}} \right| < \frac{1}{2} ,$$

con $\pi < \alpha < 2\pi$.

La frontiera C del campo A è costituita da due archi C_1 e C_2 di circonferenza che conviene rappresentare, rispettivamente, con le equazioni parametriche:

$$C_1: \qquad z = \frac{\tau}{z_0(\tau - z_0)}\,; \qquad \tau \geqq 0$$

$$C_2: \qquad z = \frac{\tau e^{-i\alpha}}{z_0(\tau e^{-i\alpha} - z_0)}\,; \qquad \tau \geqq 0$$

con: $z_0 = i - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Indicata con O l'origine del piano, i due archi C_1 e C_2 hanno in comune i due punti $z_1 = 0$ e $z_2 = \frac{1}{z_0}$, ciascuno dei quali è singolare per C. In ognuno di essi A presenta un angolo di ampiezza α.

Consideriamo la funzione:

$$w(z) = \left\{\frac{z_0^2 z}{z_0 z - 1}\right\}^{-\frac{\pi}{\alpha}},$$

dove come determinazione della potenza si sceglie quella relativa a:

$$-2\pi < \operatorname{Arg}\left[\frac{z_0^2 z}{z_0 z - 1}\right] \leqq 0\,.$$

La funzione $w(z)$ è olomorfa nel campo A.

Poniamo: $u_1(z) = \Re w(z)$, $u_2(z) = \Im w(z)$; la funzione $u_2(z)$ si annulla su $[C_1 + C_2] - 0$. Infatti, su $C_1 - O$ si ha:

$$\operatorname{Arg}\left[\frac{z_0^2 z}{z_0 z - 1}\right] = \operatorname{Arg}\tau = 0\,,$$

e, su $C_2 - O$:

$$\operatorname{Arg}\left[\frac{z_0^2 z}{z_0 z - 1}\right] = \operatorname{Arg}\left[\tau e^{-i\alpha}\right] = -\alpha\,.$$

Indichiamo con $2\varrho_0$ la distanza dei due punti $-\frac{1}{2}i$ e

$$\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1\right]^{-1}\left\{-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \frac{i}{2}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right]\right\}$$

e per ogni $\varrho_0 < \varrho < \frac{1}{2}$ consideriamo il campo A_ρ luogo dei punti del piano

verificanti una almeno delle due limitazioni:

$$\left|z + \frac{1}{2}i\right| < \varrho \, ; \qquad \left| z + \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]^2} - i \frac{\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]^2 - 1}{2\left\{1 + \left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]^2\right\}} \right| < \varrho \, .$$

Sia C_ρ la completa frontiera del campo A_ρ ed n la normale (interna) a C_ρ, in ogni suo punto regolare. Se $\omega(z)$ è una qualunque funzione armonica in A, continua in $A + C$ assieme alle sue derivate parziali prime $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, riesce:

$$\int_{C_\rho} \left[u_1 \frac{\partial \omega}{\partial n} - u_2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] ds = 0$$

e quindi, essendo $|w(z)| = O\left(|z|^{-\frac{\pi}{\alpha}}\right)$ si ha, posto $m(z) = u_1(z)$ per $z \in C$:

$$\lim_{\rho \to \frac{1}{2}} \int_{C_\rho} \left[u_1 \frac{\partial \omega}{\partial n_z} - u_2 \frac{\partial \omega}{\partial s_z} \right] d_z s = \int_C m(z) \frac{\partial \omega}{\partial n_z} d_z s = 0$$

e cioè le (5.1).

La funzione $m(z)$ appartiene alla classe $\mathfrak{L}^{\left(\frac{1}{q}\right)}(C)$ comunque si prenda $\frac{1}{q} < \frac{\alpha}{\pi}$ cioè per ogni $q > \frac{\pi}{\alpha}$, ma non appartiene alla classe $\mathfrak{L}^{\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}(C)$. Essa verifica, con riferimento al punto $z_1 = 0$, la condizione (7.1) per ogni $q > \frac{\pi}{\alpha}$, ma non la (3.2) e quindi non appartiene alla classe $\mathfrak{M}(C)$. La funzione $m(z)$ — pur verificando le (5.1) — non è costante e quindi il teorema VI cessa di sussistere.

8. Ulteriori definizioni di alcune classi di funzioni.

Sia Δ il dominio limitato dalla curva Γ semplice e chiusa di classe $\mathscr{C}^{(1,\lambda)}$, trasformato del dominio D r-singolare, non cuspidale di frontiera C già in precedenza considerato. Oltre alla classe $\mathfrak{M}(C)$ introdotta a pag. 10, considereremo la classe di funzioni, che verrà indicata con $\mathfrak{N}(\Gamma)$, così definita:

Diremo che una funzione $\beta(\zeta)$ appartiene alla classe $\mathfrak{N}(\Gamma)$, se essa verifica le seguenti condizioni:

1) È una funzione complessa del punto $\zeta = \xi + i\eta$ variabile sulla curva Γ ed è misurabile secondo Lebesgue rispetto all'arco σ di Γ.

2) Indicato con L un qualunque arco di Γ non contenente alcuno dei punti ζ_h $(h = 1, 2, ..., r)$, trasformati dei punti singolari di C, e con L_h $(h = 1, 2, ..., r)$ un arco di Γ al quale ζ_h è interno e non contenente alcuno dei rimanenti punti ζ_k, con $k \neq h$, riesce:

$$\beta(\zeta) \in \mathfrak{L}^{(1)}(L)$$

$$\beta(\zeta)|\zeta - \zeta_h|^{\frac{\alpha_h}{\pi} - 1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(L_h) \qquad (h = 1, 2, ..., r) .$$

Si verifica facilmente il sussistere dei seguenti teoremi (cfr. anche teor. III).

VIII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $b(z)$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, è che esista una funzione $\beta(\zeta)$ appartenente ad $\mathfrak{M}(\Gamma)$ tale che: $b(z) = \beta[F(z)]$. Si ha allora:*

$$\int_C b(z)ds = \int_\Gamma \beta(\zeta)|F^{-1\prime}(\zeta)|d\sigma .$$

IX. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $\beta(\zeta)$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{M}(\Gamma)$ è che esista una funzione $b(z)$ appartenente ad $\mathfrak{M}(C) \cap \mathfrak{L}^{(1)}(C)$, tale che: $b(z) = \beta[F(z)]$.*

Diremo che una funzione $u(z)$ appartiene alla classe di funzioni $\mathcal{H}(D)$ se essa verifica le seguenti condizioni:

1) È una funzione complessa definita per $z = x + iy$ q. o. nel dominio D r-singolare, ivi misurabile secondo Lebesgue.

2) Indicato con T un qualunque dominio contenuto in D e non contenente alcuno dei punti singolari z_h $(h = 1, 2, ..., r)$ e con T_h un dominio, contenuto in D, contenente il punto singolare z_h e nessun altro dei punti z_k, con $k \neq h$, riesce:

$$u(z) \in \mathfrak{L}^{(1)}(T)$$

$$u(z)|z - z_h|^{2\left(\frac{\pi}{\alpha_h} - 1\right)} \in \mathfrak{L}^{(1)}(T_h) \qquad (h = 1, 2, ..., r) .$$

Diremo che una funzione $\psi(\zeta)$ appartiene alla classe di funzioni $\mathcal{K}(\Delta)$ se essa verifica le seguenti condizioni:

1) È una funzione complessa definita per $\zeta = \xi + i\eta$ q. o. in Δ, ivi misurabile secondo Lebesgue.

2) Indicato con T' un qualunque dominio contenuto in Δ e non contenente alcuno dei punti ζ_h di Γ $(h = 1, 2, ..., r)$ e con T'_h un dominio,

contenuto in Δ, contenente il punto ζ_h e nessuno dei rimanenti ζ_k con $k \neq h$, riesce:

$$\psi(\zeta) \in \mathfrak{L}^{(1)}(T')$$

$$\psi(\zeta)|\zeta - \zeta_h|^{2\left(\frac{\alpha_h}{\pi} - 1\right)} \in \mathfrak{L}^{(1)}(T'_h) \qquad (h = 1, 2, \dots, r) .$$

Sono di facile verifica i seguenti teoremi:

X. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\psi(\zeta)$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, è che esista una funzione $u(z)$, appartenente ad $\mathcal{H}(D)$, tale che: $\psi(\zeta) = u[F^{-1}(\zeta)]$. Si ha allora:*

$$\int_\Delta \psi(\zeta) d\xi d\eta = \int_D u(z) |F'(z)|^2 dx dy .$$

XI. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $u(z)$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$ è che esista una funzione $\psi(\zeta)$, appartenente a $\mathcal{K}(\Delta)$, tale che: $u(z) = \psi[F(z)]$. Si ha allora:*

$$\int_D u(z) dx dy = \int_\Delta \psi(\zeta) |F^{-1\prime}(\zeta)|^2 d\xi d\eta .$$

XII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $u(z)$ appartenga ad $\mathcal{H}(D) \cap \mathfrak{L}^{(1)}(D)$ è che esista una funzione $\psi(\zeta)$, appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathcal{K}(\Delta)$, tale che: $u(z) = \psi[F(z)]$.*

Le classi $\mathfrak{M}(C)$, $\mathfrak{N}(\Gamma)$, $\mathcal{H}(D)$, $\mathcal{K}(\Delta)$ sono, rispetto alla trasformazione $\zeta = F(z)$, nelle seguenti relazioni, rispettivamente, con le classi $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(C) = F^{-1}[\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)] , \qquad && \mathfrak{N}(\Gamma) = F[\mathfrak{L}^{(1)}(C)] \\ &\mathcal{H}(D) = F^{-1}[\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)] , && \mathcal{K}(\Delta) = F[\mathfrak{L}^{(1)}(D)] . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Il significato di tali relazioni funzionali è evidente. Ad esempio, la prima di esse esprime che $\mathfrak{M}(C)$ è la totalità delle funzioni descritta da $\mu[F(z)]$ quando μ descrive tutta la classe $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$. Le (8.1) avrebbero potuto impiegarsi per definire le anzidette classi, ma le definizioni in precedenza date hanno il vantaggio di meglio porre in risalto la dipendenza di tali classi dalle ampiezze degli angoli di C e di non dipendere esplicitamente dalla F.

Diremo che una funzione reale $v(z)[\omega(\zeta)]$ appartiene alla classe $\mathcal{C}(D)$ [alla classe $\mathcal{C}(\Delta)$], se essa è definita in D [in Δ] è ivi di classe

uno ([17]), è di classe due nel campo $D - C$ [nel campo $\Delta - \Gamma$], ed esiste una funzione continua in D [in Δ] la quale coincide con $\Delta_2 v$ [con $\Delta_2 \omega$] nel campo $D - C$ [nel campo $\Delta - \Gamma$].

9. Un teorema di rappresentazione per una classe di funzioni.

Diremo che una funzione $\psi(\zeta)$ appartiene alla classe $\{\psi\}_0$ se essa appartiene ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ e se in corrispondenza ad essa esistono tre funzioni: μ, δ e φ, le prime due appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, l'ultima ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, tali che riesca:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega}{\partial \nu_\zeta} - \delta\omega\right] d_\zeta\sigma + \int_\Delta [\psi \Delta_2 \omega - \varphi\omega] d_\zeta\tau = 0 \qquad [d_\zeta\tau = d\xi d\eta]\,, \tag{9.1}$$

per ogni ω della classe $\mathfrak{C}(\Delta)$ (cfr. la def. di $\{u\}_\lambda$ data nell'introduzione). Se si suppone che φ sia una assegnata funzione hölderiana in $\Delta - \Gamma$ ([18]), il teorema di Amerio, ricordato nell'introduzione, permette di affermare che ogni ψ di $\{\psi\}_0$ è di classe due in $\Delta - \Gamma$ che, fissato z quasi ovunque su Γ, riesce: $\lim\limits_{\zeta \to z\, (\text{su } \nu_z^+)} \psi(\zeta) = \mu(z)$, $\lim\limits_{\zeta \to z\, (\text{su } \nu_z^+)} \dfrac{\partial}{\partial \nu_z} \psi(\zeta) = \delta(z)$, ed inoltre che la ψ verifica in $\Delta - \Gamma$ l'equazione: $\Delta_2 \psi = \varphi$.

Le (9.1) sono equivalenti alla seguente equazione:

$$2\pi\Theta(\zeta)\psi(\zeta) = \int_\Gamma \left[\mu(z) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-\zeta|} - \delta(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|}\right] d_z\sigma - \\ - \int_\Delta \varphi(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d_z\tau \tag{9.2}$$

(cfr. la (4) dell'introduzione), valida per ogni ζ non appartenente a Γ.

Osserviamo che per ogni ψ di $\{\psi\}_0$ si ha, ovviamente, dalle (9.1)

$$\int_\Gamma \delta(z) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) d_z\tau = 0\,. \tag{9.3}$$

([17]) Dicendo che una funzione $v(z)$ è di classe $n (n > 0)$ in un dominio D intendiamo che essa è continua in D, che tutte le sue derivate parziali fino a quelle di ordine n incluso sono continue nel campo $D - C$ e che per ciascuna di esse esiste una funzione, continua in D, che con essa coincide nel campo $D - C$.

([18]) Dicendo che una funzione $\varphi(\zeta)$ è hölderiana nel campo $\Delta - \Gamma$ intendiamo che, per ogni insieme chiuso T contenuto in $\Delta - \Gamma$, sono determinate due costanti L ed h, $L > 0$ e $0 < h \leq 1$, tali che, per ogni coppia di punti ζ e ζ' di T riesce:

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')| \leq L|\zeta - \zeta'|^h.$$

Sussiste il seguente teorema che generalizza un risultato di Fichera ricordato nell'introduzione.

XIII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $\psi(\zeta)$ appartenga a $\{\psi\}_0$ è che esistano una funzione $\chi(\zeta)$ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, una funzione $\varphi(z)$ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ ed una costante a tali che, quasi ovunque in Δ, si abbia:*

$$\psi(\zeta) = a + \int_\Gamma \chi(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|} d_z\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|} d_z\tau \quad [19].$$

La condizione è sufficiente. Definiamo le due funzioni di $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$: $\mu(z)$ e $\delta(z)$ al modo seguente

$$\mu(z) = a + \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\tau$$

$$(9.4) \quad \delta(z) = -\pi\chi(z) + \int_\Gamma \chi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} d_t\tau \quad [20].$$

Proviamo che le funzioni μ, δ, ψ, e φ verificano le (9.1). Possiamo ovviamente ricondurci al caso $a = 0$.

Poichè ω appartiene a $\mathcal{C}(\Delta)$, per i teoremi di Tonelli e Fubini sugli integrali multipli, riesce:

$$\int_\Gamma \frac{\partial \omega(z)}{\partial \nu_z} d_z\sigma \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma = \int_\Gamma \chi(t) d_t\sigma \int_\Gamma \frac{\partial \omega(z)}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-t|} d_z\sigma$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial \omega(z)}{\partial \nu_z} d_z\sigma \int_\Delta \varphi(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\tau = \int_\Delta \varphi(t) d_t\tau \int_\Gamma \frac{\partial \omega(z)}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-t|} d_z\sigma .$$

Analogamente, essendo, per la regolarità di Δ, limitata in Δ la funzione

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} \right| d_z\sigma ,$$

[19] È noto e d'altronde si prova facilmente che, se χ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ e φ ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, appartengono rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ e a $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ anche le funzioni di z: $\chi(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|}$, $\varphi(z) \log \frac{1}{|z-\zeta|}$ per ogni fissato ζ q. o. in Δ.

[20] Fissato z q. o. su Γ, sono sommabili su Γ e rispettivamente in Δ le funzioni di t: $\chi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-t|}$ e $\varphi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-t|}$.

si ha:

$$\int_\Gamma \omega(z)\,d_z\sigma \int_\Gamma \chi(t)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\sigma = \int_\Gamma \chi(t)\,d_t\sigma \int_\Gamma \omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|}\,d_z\sigma$$

$$\int_\Gamma \omega(z)\,d_z\sigma \int_\Delta \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau = \int_\Delta \varphi(t)\,d_t\tau \int_\Gamma \omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|}\,d_z\sigma\,.$$

Pertanto si trae

$$\int_\Gamma \left[\mu(z)\,\frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z} - \delta(z)\omega(z)\right] d_z\sigma + \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\psi(\zeta)\,d_\zeta\tau =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\,d_z\sigma \int_\Gamma \chi(t)\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\,d_z\sigma \int_\Delta \varphi(t)\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau +$$

$$+ \pi\int_\Gamma \omega(z)\chi(z)\,d_z\sigma - \int_\Gamma \omega(z)\,d_z\sigma \int_\Gamma \chi(t)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega(z)\,d_z\sigma \int_\Delta \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau + \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\,d_\zeta\tau \int_\Gamma \chi(z)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d_z\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\,d_\zeta\tau \int_\Delta \varphi(z)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d_z\tau = \pi\int_\Gamma \omega(z)\chi(z)\,d_z\sigma -$$

$$- \int_\Gamma \chi(t)\,d_t\sigma \left\{ \int_\Gamma \left[\omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|} - \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|}\right] d_z\sigma - \right.$$

$$\left. - \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\log\frac{1}{|\zeta-t|}\,d_\zeta\tau \right\} + \frac{1}{2\pi}\int_\Delta \varphi(t)\,d_t\tau \left\{ \int_\Gamma \left[\omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-t|}\right] d_z\sigma - \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\log\frac{1}{|\zeta-t|}\,d_\zeta\tau \right\} = \int_\Delta \varphi(t)\omega(t)\,d_t\tau \quad [21],$$

cioè la (9.1).

---

[21] Se t appartiene a $\Delta - \Gamma$ si ha:

$$2\pi\omega(t) = \int_\Gamma \left[\omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|} - \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\right] d_z\sigma - \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\log\frac{1}{|t-\zeta|}\,d_\zeta\tau\,,$$

e quindi, per $t \to w$ su ν_w^+, si ha in tutta Γ:

$$\pi\omega(w) = \int_\Gamma \left[\omega(z)\,\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|w-z|} - \frac{\partial\omega(z)}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|w-z|}\right] d_z\sigma - \int_\Delta \Delta_2\omega(\zeta)\log\frac{1}{|w-\zeta|}\,d_\zeta\tau\,.$$

Proviamo la necessità del teorema. Sia ψ una funzione di $\{\psi\}_0$ e consideriamo la (9.4) come una equazione integrale (di Fredholm) nell'incognita χ. L'equazione omogenea trasposta della (9.4) è la seguente:

$$-\pi b(z)+\int_{\Gamma} b(t)\frac{\partial}{\partial\nu_t}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\sigma=0\,.$$

Come noto, essa ammette come unica autosoluzione la costante. Poichè per la regolarità di Δ — come già abbiamo osservato in precedenza — è in Δ limitata la funzione di t:

$$\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\right| d_z\sigma\,,$$

si ha, per i teoremi di Fubini e Tonelli:

$$\int_{\Gamma} d_z\sigma\int_{\Delta}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau=\int_{\Delta}\varphi(t)d_t\tau\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_z\sigma \tag{9.5}$$

e quindi il termine noto della (9.4) è ortogonale alla costante dato che per le (9.3) e (9.5) riesce:

$$\int_{\Gamma}\left[\delta(z)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau\right]d_z\sigma=$$

$$=\int_{\Gamma}\delta(z)d_z\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}d_z\sigma\int_{\Delta}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_t\tau=$$

$$=\int_{\Gamma}\delta(z)d_z\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}\varphi(t)d_t\tau\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|t-z|}\,d_z\sigma=\int_{\Gamma}\delta(z)d_z\sigma+\int_{\Delta}\varphi(t)d_t\tau=0\,.$$

L'equazione integrale (9.4) ammette pertanto soluzioni χ, appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$.

Si possono scegliere la costante a e la funzione $\chi=\overline{\chi}$ in modo che, posto

$$\overline{\psi}(\zeta)=a+\int_{\Gamma}\overline{\chi}(t)\log\frac{1}{|t-\zeta|}\,d_t\sigma-\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}\varphi(t)\log\frac{1}{|t-\zeta|}\,d_t\tau\,,$$

riesca

$$\int_{\Gamma}\overline{\psi}d\sigma=\int_{\Gamma}\mu d\sigma\,. \tag{9.6}$$

La funzione ψ, per la prima parte del teorema in corso, appartiene alla classe $\{\psi\}_0$ e pertanto, posto

$$\bar{\mu}(z) = a + \int_\Gamma \bar{\chi}(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi(t) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\tau$$

riesce, per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$:

$$\int_\Gamma \left[\bar{\mu} \frac{\partial\omega}{\partial\nu} - \delta\omega\right] d\sigma + \int_\Delta [\bar{\psi}\Delta_2\omega - \varphi\omega] d\tau = 0 . \tag{9.7}$$

D'altra parte, essendo per ipotesi ψ appartenente a $\{\psi\}_0$, si trae:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial\omega}{\partial\nu} - \delta\omega\right] d\sigma + \int_\Delta [\psi\Delta_2\omega - \varphi\omega] d\tau = 0 \tag{9.8}$$

e quindi ne segue, sottraendo membro a membro la (9.8) dalla (9.7),

$$\int_\Gamma [\bar{\mu} - \mu] \frac{\partial\omega}{\partial\nu} d\sigma + \int_\Delta [\bar{\psi} - \psi]\Delta_2\omega d\tau = 0 . \tag{9.9}$$

In particolare, per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$ armonica in $\Delta - \Gamma$, si ha:

$$\int_\Gamma [\bar{\mu} - \mu] \frac{\partial\omega}{\partial\nu} d\tau = 0 .$$

Ne segue $\bar{\mu} - \mu =$ cost. e quindi, per la (9.6), $\bar{\mu} = \mu$.

Le (9.9) si riducono alle seguenti:

$$\int_\Delta [\bar{\psi} - \psi]\Delta_2\omega d\tau = 0$$

per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$ e da ciò ovviamente si trae $\psi = \bar{\psi}$.

Il teorema è così acquisito.

Nel corso della dimostrazione del teorema XIII si è anche provato il teorema di esistenza per il problema di Neumann nella classe $\{\psi\}_0$. Precisamente si ha:

XIV. *Assegnate le funzioni $\delta(z)$ e $\varphi(z)$, con $\delta(z)$ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ e $\varphi(z)$ ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, verificanti la* (9.3), *esistono due funzioni: μ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ e ψ appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ (determinate a meno di una stessa costante additiva) verificanti le* (9.1) *per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$.*

10. Primo teorema di equivalenza.

Sussiste il seguente teorema.

XV. *Sono date le funzioni: $m(z)$, $g(z)$, $u(z)$, $f(z)$ e $c(z)$, con $m(z)$ appartenente ad $\mathcal{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$, $g(z)$ ad $\mathcal{L}^{(1)}(C)$, $u(z)$ ad $\mathcal{H}(D) \cap \mathcal{L}^{(1)}(D)$, $f(z)$ ad $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ e $c(z)$ continua in D. Condizione necessaria e sufficiente perchè, fissato un parametro complesso λ, per ogni funzione v di $\mathcal{C}(D)$ riesca:*

$$\int_C \left[m\frac{\partial v}{\partial n} - gv\right] d_z s + \int_D [u(\Delta_2 v - \lambda c v) - vf] dx dy = 0 \tag{10.1}$$

è che, posto:

$$\zeta = F(z)\,, \quad z = F^{-1}(\zeta)\,, \quad \mu(\zeta) = m[F^{-1}(\zeta)]\,, \quad \psi(\zeta) = u[F^{-1}(\zeta)]\,,$$

$$g^*(z) = |F'(z)|^{-1} g(z)\,, \quad f^*(z) = |F'(z)|^{-2} f(z)\,, \quad c^*(z) = |F'(z)|^{-2} c(z)\,,$$

$$\delta(\zeta) = g^*[F^{-1}(\zeta)]\,, \quad \varphi(\zeta) = f^*[F^{-1}(\zeta)]\,, \quad \gamma(\zeta) = c^*[F^{-1}(\zeta)]\,,$$

riesca:

$$\int_\Gamma \left[\mu\frac{\partial \omega}{\partial \nu} - \delta\omega\right] d_\zeta \sigma + \int_\Delta [\psi(\Delta_2 \omega - \lambda\gamma\omega) - \omega\varphi] d\xi d\eta = 0 \tag{10.2}$$

per ogni funzione ω appartenente alla classe $\mathcal{C}(\Delta)$.

Dimostriamo dapprima che la condizione è necessaria.

Per i teoremi IX e XII si ha intanto che $\mu(\zeta)$ appartiene a $\mathcal{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{M}(\Gamma)$ e $\psi(\zeta)$ ad $\mathcal{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathcal{H}(\Delta)$. Le funzioni $\delta(\zeta)$ e $\varphi(\zeta)$, come facilmente si constata tenendo presenti le proprietà della funzione $F(z)$ (cfr. teor. II), appartengono, rispettivamente, ad $\mathcal{L}^{(1)}(\Gamma)$ e $\mathcal{L}^{(1)}(\Delta)$. La funzione $\gamma(\zeta)$ è continua in $\Delta - (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_r)$ e appartiene ad $\mathcal{L}^{(1)}(\Delta)$. Ad $\mathcal{L}^{(1)}(\Delta)$ appartiene pure la funzione $\gamma(\zeta)\psi(\zeta)$.

Dalla (10.1) scritta per $v \equiv 1$, trasformando il dominio D nel dominio Δ con la $\zeta = F(z)$ si ottiene:

$$\int_\Gamma \delta(\zeta) d_\zeta \sigma + \int_\Delta \varphi_1(\zeta) d_\zeta \tau = 0\,, \tag{10.3}$$

avendo posto:

$$\varphi_1(\zeta) = \lambda\psi(\zeta)\gamma(\zeta) + \varphi(\zeta)\,.$$

Consideriamo il problema di Neumann nella classe $\{\psi\}_0$ assumendo come dati le funzioni δ e φ_1 che intervengono nella (10.3). Imporremo alla incognita ψ_1 l'ulteriore condizione, atta a determinarla:

$$\int_\Gamma \psi_1 d\sigma = \int_\Gamma \mu d\sigma \,. \tag{10.4}$$

Per quanto si è dimostrato nel corso del paragrafo precedente, esistono una costante a ed una funzione χ di $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, soluzione dell'equazione integrale:

$$\delta(z) = -\pi\chi(z) + \int_\Gamma \chi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\Delta \varphi_1(t) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} d_t\tau \,, \tag{10.5}$$

tali che la funzione:

$$\psi_1(z) = a + \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-\zeta|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t-\zeta|} d_t\tau$$

è la soluzione del predetto problema di Neumann, verificante la (10.4).

Riesce allora, posto, per ζ q. o. su Γ:

$$\mu_1(\zeta) = a + \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-\zeta|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t-\zeta|} d_t\tau \,,$$

qualunque sia la funzione ω di $\mathcal{C}(\Delta)$:

$$\int_\Gamma \left[\mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} - \delta\omega\right] d_\zeta\sigma + \int_\Delta [\psi_1 \Delta_2 \omega - \varphi_1 \omega] d_\zeta\tau = 0 \tag{10.6}$$

e, in particolare:

$$\int_\Gamma \left[\mu_1 \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu} - \delta\omega_0\right] d_\zeta\sigma + \int_\Delta [\psi_1 \Delta_2 \omega_0 - \varphi_1 \omega_0] d_\zeta\tau = 0 \tag{10.7}$$

essendo $\omega_0(\zeta)$ una qualunque funzione appartenente alla classe di funzioni che indichiamo con $\mathcal{C}_0(\Delta)$, ottenuta considerando quelle funzioni di $\mathcal{C}(\Delta)$ per le quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \xi} = O(|\zeta - \zeta_{j_k}|) \qquad \frac{\partial \omega_0}{\partial \eta} = O(|\zeta - \zeta_{j_k}|)$$

$$\Delta_2 \omega_0 = O(|\zeta - \zeta_{j_k}|^2)$$

con $k = 1, 2, ..., s$ (cfr. pag. 10).

Se $\omega_0(\zeta)$ è una qualunque funzione di $\mathcal{C}_0(\Delta)$ si verifica che la funzione: $v_0(z) = \omega_0[F(z)]$ appartiene a $\mathcal{C}(D)$. Pertanto, per le (10.1), si ha:

$$\int_C \left[m \frac{\partial v_0}{\partial n_z} - g v_0\right] d_z s + \int_D [u \Delta_2 v_0 - (\lambda c u + f) v_0] d_z \tau =$$

$$= \int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu_\zeta} - \delta \omega_0\right] d_\zeta \sigma + \int_\Delta [\psi \Delta_2 \omega_0 - \varphi_1 \omega_0] d_\zeta \tau = 0 .$$

Ricordando la (10.7) si ottiene:

$$\int_\Gamma [\mu_1 - \mu] \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta \sigma + \int_\Delta [\psi_1 - \psi] \Delta_2 \omega_0 d_\zeta \tau = 0 \tag{10.8}$$

per ogni ω_0 di $\mathcal{C}_0(\Delta)$ e, in particolare, relativamente alla classe delle funzioni di $\mathcal{C}_0(\Delta)$, armoniche in $\Delta - \Gamma$, si trova:

$$\int_\Gamma [\mu_1 - \mu] \frac{\partial \omega_0}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta \sigma = 0 . \tag{10.9}$$

Posto:

$$p_k(\zeta) = \prod_{h=1}^{r} (\zeta - \zeta_h) \zeta^k \qquad (k = 0, 1, 2, ...) ,$$

sia $g_k(\zeta)$ una primitiva di $p_k(\zeta)$. Le funzioni $\Re g_k(\zeta)$ e $\Im g_k(\zeta)$ sono armoniche in $\Delta - \Gamma$ e appartengono a $\mathcal{C}_0(\Delta)$. Poichè riesce:

$$i \int_{+\Gamma} \Re(\mu_1 - \mu) \prod_{h=1}^{r} (\zeta - \zeta_h) \zeta^k d\zeta = i \int_{+\Gamma} \Re(\mu_1 - \mu) \frac{d}{d\zeta} g_k d\zeta =$$

$$= \int_\Gamma \Re(\mu_1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g_k(\zeta) d_\zeta \sigma =$$

$$= \int_\Gamma \Re(\mu_1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \Re g_k d_\zeta \sigma + i \int_\Gamma \Re(\mu_1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \Im g_k d_\zeta \sigma ,$$

dalle (10.9) segue:

$$\int_{+\Gamma} \Re(\mu_1 - \mu) \prod_{h=1}^{r} (\zeta - \zeta_h) \zeta^k d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1, ...)$$

e quindi, per il teorema IV, $\Re(\mu_1 - \mu) = \text{cost}$ su Γ. Analogamente $\Im(\mu_1 - \mu) = \text{cost}$ su Γ e, per la (10.4) $\mu_1 = \mu$. Le (10.8) si riducono pertanto alle seguenti:

$$\int_\Delta [\psi_1 - \psi] \Delta_2 \omega_0 d_\zeta \tau = 0 \tag{10.10}$$

per ogni ω_0 di $\mathcal{C}_0(\Delta)$.

Indichiamo con $Q(\zeta)$ un arbitrario polinomio reale nelle variabili reali ξ ed η, e poniamo:

$$P(\zeta) = \prod_{h=1}^{r} |\zeta - \zeta_h|^2 Q(\zeta) .$$

Indicati con a_h e b_h $(h = 1, 2, ..., r)$ i valori assunti, rispettivamente, dalle funzioni

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Delta P(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \log |t - \zeta| d_t \tau , \qquad \frac{1}{2\pi} \int_\Delta P(t) \frac{\partial}{\partial \eta} \log |t - \zeta| d_t \tau$$

in ζ_h, sia $c_h = a_h - i b_h$ e sia $P^*(\zeta)$ il polinomio complesso, di grado $r - 1$ nella variabile complessa ζ, ottenuto imponendo le condizioni: $P^*(\zeta_h) = c_h$ $(h = 1, 2, ..., r)$.

La funzione reale:

$$\varrho(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\Delta P(z) \log |z - \zeta| d_z \tau - \Re \int_0^\zeta P^*(z) dz$$

appartiene a $\mathcal{C}_0(\Delta)$.

Dalle (10.10), assumendo come funzione ω_0 la funzione $\varrho(\zeta)$, si trae:

$$\int_\Delta [\psi_1 - \psi] \prod_{h=1}^{r} |\zeta - \zeta_h|^2 Q(\zeta) d_\zeta \tau = 0 ;$$

ne segue, data l'arbitrarietà del polinomio Q, che la funzione: $\Re[\psi_1 - \psi] \prod_{h=1}^{r} |\zeta - \zeta_h|^2$ è quasi ovunque nulla in Δ e quindi, q. o. in Δ $\Re\psi_1 = \Re\psi$. Analogamente si deduce che q. o. in Δ: $\Im\psi_1 = \Im\psi$ e da ciò segue $\psi_1 = \psi$ q. o. in Δ.

Da quanto sopra dimostrato e dalla (10.6) segue la (10.2) per ogni ω di $\mathcal{C}(D)$.

Proviamo che la condizione è sufficiente.

Introduciamo la classe di funzioni che indichiamo con $\mathcal{C}^*(\Delta)$, la quale contiene $\mathcal{C}(\Delta)$ ed è costituita dalle funzioni $\omega^*(\zeta)$ verificanti le seguenti condizioni:

1) ω^* è continua in Δ e di classe due in $\Delta - \Gamma$.

2) Considerati i punti $\zeta_{j_{s+1}}, \ldots, \zeta_{j_r}$ di Γ (cfr. pag. 10), ω^* è di classe uno in $\Delta - (\zeta_{j_{s+1}} + \ldots + \zeta_{j_r})$ ed esiste una funzione continua in $\Delta - (\zeta_{j_{s+1}} + \ldots + \zeta_{j_r})$ la quale in $\Delta - \Gamma$ coincide con $\Delta_2\omega^*$.

3) Riesce

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \nu} = O\left(|\zeta - \zeta_{j_h}|^{\frac{\alpha_{j_h}}{\pi} - 1}\right)$$

$$\Delta_2\omega^* = O\left(|\zeta - \zeta_{j_h}|^{2\left(\frac{\alpha_{j_h}}{\pi} - 1\right)}\right)$$

con $\alpha_{j_h} < \pi$ e $h = s + 1, \ldots, r$.

Sia $v(z)$ una qualunque funzione di $\mathcal{C}(D)$; la funzione $v[F^{-1}(\zeta)]$ appartiene — come facilmente si constata — a $\mathcal{C}^*(\Delta)$, ed essendo:

$$\int_C \left[m \frac{\partial v}{\partial n_z} - gv\right] d_z s + \int_D [u(\Delta_2 v - \lambda c v) - f v] dx dy =$$

$$= \int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial v[F^{-1}(\zeta)]}{\partial \nu_\zeta} - \delta v[F^{-1}(\zeta)]\right] d_\zeta \sigma +$$

$$+ \int_\Delta \{\psi(\Delta_2 v[F^{-1}(\zeta)] - \lambda\gamma v[F^{-1}(\zeta)]) - \varphi v[F^{-1}(\zeta)]\} d\xi d\eta \ [22],$$

la tesi del teorema sarà provata se faremo vedere che dall'essere soddisfatta la (10.2) per ogni ω di $\mathcal{C}(D)$ lo è, di conseguenza, anche per ogni ω^* di $\mathcal{C}^*(\Delta)$.

Dal teorema XIII, verificando μ, δ, ψ e $\varphi_1 = \lambda\gamma\psi + \varphi$ la (9.1) per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$, si ha:

$$\psi(\zeta) = a + \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t - \zeta|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t - \zeta|} d_t\tau$$

con a costante e χ soluzione dell'equazione integrale (10.5). Inoltre, per w q. o. su Γ riesce:

$$\mu(w) = a + \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t - w|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t - w|} d_t\tau .$$

---

[22] Poichè μ appartiene a $\mathfrak{N}(\Gamma) \cap \mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, ψ ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathfrak{K}(\Delta)$, le funzioni $\mu \dfrac{\partial \omega^*}{\partial \nu}$ e $\psi \Delta_2 \omega^*$, con ω^* appartenente a $\mathcal{C}^*(\Delta)$, appartengono, rispettivamente, a $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Si ha:

$$(10.11)\qquad \int_\Gamma \mu \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma = a \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-w|} d_t\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma \int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t-w|} d_t\tau .$$

Poniamo:

$$(10.12)\qquad \alpha^* = \max\left[1 - \frac{\alpha_{j_{s+1}}}{\pi},\ 1 - \frac{\alpha_{j_{s+2}}}{\pi},\ \ldots,\ 1 - \frac{\alpha_{j_r}}{\pi}\right]$$

$\alpha_{j_h} < \pi$; $h = s+1, \ldots, r$ e $1 < p < \frac{1}{\alpha^*}$. La funzione $\frac{\delta\omega^*}{\delta\nu}$, come facilmente si constata, appartiene a $\mathfrak{L}^{(p)}(\Gamma)$ e poichè

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w}\right| \left|\log \frac{1}{|t-w|}\right| d_w\sigma$$

è una funzione di t continua in tutto il piano ([23]) si ha:

$$(10.13)\qquad \int_\Gamma \mu(w) \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma = a \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} d_w\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \chi(t) d_t\sigma \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_w\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi_1(t) d_t\tau \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_w\sigma .$$

Analogamente si prova che:

$$(10.14)\qquad \int_\Gamma \delta(w)\omega^*(w) d_w\sigma = -\pi \int_\Gamma \omega^*(w)\chi(w) d_w\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \omega^*(w) d_w\sigma \int_\Gamma \chi(t) \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_t\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \omega^*(w) d_w\sigma \int_\Delta \varphi_1(t) \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_t\tau = -\pi \int_\Gamma \omega^*(w)\chi(w) d_w\sigma +$$

([23]) Cfr. [10] § 3, teor. VII.

$$+ \int_\Gamma \chi(t) d_t\sigma \int_\Gamma \omega^*(w) \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_w\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi_1(t) d_t\tau \int_\Gamma \omega^*(w) \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} d_w\sigma .$$

Poichè la funzione $\Delta_2 \omega^*$ appartiene a $\mathfrak{L}^{(p)}(\Delta)$, p essendo il valore sopra considerato, si ha anche che:

$$\text{(10.15)} \quad \int_\Delta \psi \Delta_2 \omega^* d_w\tau = a \int_\Delta \Delta_2 \omega^* d_w\tau + \int_\Delta \Delta_2 \omega^* d_w\tau \int_\Gamma \chi(t) \log \frac{1}{|t-w|} d_t\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \Delta_2 \omega^* d_w\tau \int_\Delta \varphi_1(t) \log \frac{1}{|t-w|} d_t\tau = a \int_\Delta \Delta_2 \omega^* d_w\tau +$$

$$+ \int_\Gamma \chi(t) d_t\sigma \int_\Delta \Delta_2 \omega^* \log \frac{1}{|t-w|} d_w\tau - \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \varphi_1(t) d_t\tau \int_\Delta \Delta_2 \omega^* \log \frac{1}{|t-w|} d_w\tau .$$

Infine, riuscendo per t in $\Delta - \Gamma$:

$$\text{(10.16)} \quad 2\pi\omega^*(t) = \int_\Gamma \left[\omega^* \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} - \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} \right] d_u\sigma -$$

$$- \int_\Delta \Delta_2 \omega^* \log \frac{1}{|t-w|} d_w\tau ,$$

per t q. o. su Γ:

$$\text{(10.17)} \quad \pi\omega^*(t) = \int_\Gamma \left[\omega^* \frac{\partial}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} - \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu_w} \log \frac{1}{|t-w|} \right] d_w\sigma -$$

$$- \int_\Delta \Delta_2 \omega^* \log \frac{1}{|t-w|} d_w\tau$$

ed inoltre:

$$\text{(10.18)} \quad \int_\Gamma \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu} d\sigma + \int_\Delta \Delta_2 \omega^* d\tau = 0 ,$$

dalle (10.13), (10.14), (10.15), (10.16), (10.17), (10.18) si trae:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega^*}{\partial \nu} - \delta \omega^* \right] d\sigma + \int_\Delta \psi \Delta_2 \omega^* d\tau = \int_\Delta \varphi_1 \omega^* d\tau$$

e cioè la (10.2) per ogni ω^* di $\mathfrak{C}^*(\Delta)$. Il teorema è così completamente acquisito.

11. Funzione di Neumann per l'operatore di Laplace.

Per ogni fissato ζ in $\Delta - \Gamma$, detta L la lunghezza della curva Γ, consideriamo l'equazione integrale:

$$-\pi\beta(z,\zeta) + \int_\Gamma \beta(t,\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log \frac{1}{|z-\zeta|} + \frac{1}{L}.$$

Essa è risolubile dato che il termine noto ha valor medio nullo su Γ. Ogni sua soluzione $\beta(z, \zeta)$ è, per ogni fissato ζ, funzione di z hölderiana su Γ.

Supposto di aver determinato una di tali soluzioni, poniamo:

$$a(\zeta) = -\frac{1}{2\pi L} \int_\Gamma \log \frac{1}{|z-\zeta|} d_z\sigma - \frac{1}{L} \int_\Gamma \beta(t,\zeta) d_t\sigma \int_\Gamma \log \frac{1}{|t-z|} d_z\sigma$$

$$N_0(z,\zeta) = \int_\Gamma \beta(t,\zeta) \log \frac{1}{|t-z|} d_t\sigma + a(\zeta) \tag{11.1}$$

$$N(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z-\zeta|} + N_0(z,\zeta). \tag{11.2}$$

La $N(z, \zeta)$ è la ben nota *funzione di Neumann* per l'operatore di Laplace. Per essa sussistono le seguenti proprietà:

a) Per ogni fissato ζ in $\Delta - \Gamma$ la $N(z, \zeta)$ è di classe uno in $\Delta - \zeta$ ed armonica in $\Delta - \Gamma - \zeta$.

b) $$N(z,\zeta) = N(\zeta, z)$$

c) $$\frac{\partial}{\partial \nu_z} N(z,\zeta) = \frac{1}{L}$$

d) $$\int_\Gamma N(z,\zeta) d_z\sigma = 0$$

e) $$N(z,\zeta) = O\left(\log \frac{K}{|z-\zeta|}\right) \qquad (K > 0).$$

Tali proprietà sono classicamente note, tuttavia, in vista della importanza che esse rivestiranno ai fini della nostra trattazione, è opportuno accennare alla loro dimostrazione.

La a) e la c) sono evidenti. La b) si dimostra con procedimento standardizzato usando l'identità di Green ([24]). La d) consegue dalla definizione

([24]) Cfr. [5] pagg. 44-45.

assunta per $a(\zeta)$. Per dimostrare la e) si può, ad esempio, procedere al modo seguente: trasformare conformemente Δ in un dominio circolare T di raggio uno, ciò che è possibile fare — date le ipotesi verificate da Γ — con una funzione $w = f(\zeta)$ di classe uno in Δ, tale che: $|f'(\zeta)| > m > 0$ in Δ. La funzione $\mathcal{N}(t, w) = N[f^{-1}(t), f^{-1}(w)]$ $(t \in T, w \in T)$ può ovviamente mettersi sotto la forma seguente

$$\mathcal{N}(t, w) = \mathcal{N}_1(t, w) + \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|t - w|}$$

con $\mathcal{N}_1(t, w)$ funzione armonica di t per ogni fissato w interno a T e verificante la condizione al contorno:

$$\frac{\partial}{\partial n_t} \mathcal{N}_1(t, w) = \frac{1}{L} |f^{-1\prime}(t)| + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \log |t - w| ,$$

essendo n_t la normale (interna) nel punto t alla frontiera Σ di T.

Dovendo inoltre essere

$$\int_{\Sigma} \mathcal{N}(t, w) \, |f^{-1\prime}(t)| d_t s = 0 ,$$

per la ben nota formula del Dini si ha:

$$\mathcal{N}_1(t, w) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{L} |f^{-1\prime}(u)| + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_u} \log |u - w| \right] \log |u - t| d_u s + c(w)$$

con

$$c(w) = \left\{ \int_{\Sigma} |f^{-1\prime}(t)| d_t s \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \log |t - w| \, |f^{-1\prime}(t)| d_t s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma \times \Sigma} \left[\frac{1}{L} |f^{-1\prime}(u)| + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_u} \log |u - t| \, |f^{-1\prime}(t)| \right] d_t s d_u s \right\} .$$

Poichè la funzione $c(w)$ è limitata in T, poichè tale riesce la funzione di t:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{L} |f^{-1\prime}(u)| \log |u - t| d_u s$$

e poichè si ha:

$$\left| \frac{1}{2\pi^2} \int_{\Sigma} \log |u - t| \, \frac{\partial}{\partial n_u} \log |u - w| d_u s \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \log |1 - \bar{w} t| \right| < \frac{1}{2\pi} \log \frac{4}{|t - w|} ,$$

ne viene: $\mathcal{N}(t, w) = O\left(\log \frac{H}{|t-w|}\right)$ con H costante positiva. Da questa, tenendo presente che la funzione: $\log\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right|$ è limitata in $\Delta \times \Delta$, segue la maggiorazione e).

12. Secondo teorema di equivalenza.

Sussiste il seguente teorema:

XVI. *Siano $\delta(z)$, $\gamma(z)$, $\varphi(z)$, funzioni appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, $\mathfrak{L}^{(p)}(\Delta)$ $(p > 1)$, $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, con $\gamma(z)$ non negativa e non q. o. nulla e sia λ un fissato numero complesso diverso da zero. Condizione necessaria e sufficiente perchè esistano due funzioni $\mu(z) \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{N}(\Gamma)$, $\psi(z) \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathfrak{K}(\Delta)$ e tale che $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, per le quali si abbia:*

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega}{\partial \nu_z} - \delta\omega\right] d_z\sigma + \int_\Delta \{\psi[\Delta_2\omega - \lambda\gamma\omega] - \varphi\omega\} d_z\tau = 0\,, \tag{12.1}$$

qualunque sia la funzione ω di $\mathfrak{C}(\Delta)$, è che esista una $\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ con $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, soluzione della seguente equazione integrale:

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) = &-\left\{\int_\Gamma \delta(z) N(z,\zeta) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) N(z,\zeta) d_z\tau\right\} + \\ &+ \frac{1}{\int_\Delta \gamma d\tau} \int_\Delta \gamma(w) d_w\tau \left\{\int_\Gamma \delta(z) N(z,w) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) N(z,w) d_z\tau\right\} - \\ &- \frac{1}{\lambda \int_\Delta \gamma d\tau} \left\{\int_\Gamma \delta(z) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) d_z\tau\right\} + \lambda \int_\Delta \gamma(z)\psi(z) K(\zeta, z) d_z\tau\,,\end{aligned} \tag{12.2}$$

avendo posto:

$$K(\zeta, z) = -N(z,\zeta) + \frac{\int_\Delta \gamma(w) N(z,w) d_w\tau}{\int_\Delta \gamma(w) d_w\tau}\,. \tag{12.3}$$

Soddisfatta la (12.2) *riesce, per t q. o. su Γ:*

$$\mu(t) = -\left\{\int_\Gamma \delta(z) N(z,t) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) N(z,t) d_z\tau\right\} + \tag{12.4}$$

$$+\frac{1}{\int\limits_{\Delta}\gamma d\tau}\int\limits_{\Delta}\gamma(w)d_w\tau\left\{\int\limits_{\Gamma}\delta(z)N(z,w)d_z\sigma+\int\limits_{\Delta}\varphi(z)N(z,w)d_z\tau\right\}-$$

$$-\frac{1}{\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma d\tau}\left\{\int\limits_{\Gamma}\delta(z)d_z\sigma+\int\limits_{\Delta}\varphi(z)d_z\tau\right\}+\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma(z)\psi(z)K(t,z)d_z\tau\,,$$

e $\mu(t)$ *appartiene a* $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)\cap\mathfrak{M}(\Gamma)$.

Dimostriamo dapprima che la condizione è necessaria. Poichè per ipotesi μ e ψ soddisfano la (12.1) per ogni ω di $\mathfrak{C}(\Delta)$, fissato ζ in $\Delta-\Gamma$, possiamo assumere come funzione di $\mathfrak{C}(\Delta)$ la funzione di z: $N_0(z,\zeta)$ definita dalla (11.1) e armonica in $\Delta-\Gamma$. Ne viene allora, per la (11.2) e per la proprietà c) della funzione $N(z,\zeta)$ (cfr. pag. 39):

$$\int\limits_{\Gamma}\left[\mu(z)\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right)-\delta(z)N_0(z,\zeta)\right]d_z\sigma-$$
$$-\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma(z)\psi(z)N_0(z,\zeta)d_z\tau-\int\limits_{\Delta}\varphi(z)N_0(z,\zeta)d_z\tau=0\,. \tag{12.5}$$

D'altra parte, avendosi anche:

$$2\pi\psi(\zeta)=\int\limits_{\Gamma}\left[\mu(z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}\log\frac{1}{|z-\zeta|}-\delta(z)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right]d_z\sigma-$$
$$-\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma(z)\psi(z)\log\frac{1}{|z-\zeta|}d_z\tau-\int\limits_{\Delta}\varphi(z)\log\frac{1}{|z-\zeta|}d_z\tau\,, \tag{12.6}$$

sommando la (12.5) con la (12.6) si trae — per la (11.2) — per ogni fissato ζ q. o. in $\Delta-\Gamma$:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{L}\int\limits_{\Gamma}\mu(z)d_z\sigma-\int\limits_{\Gamma}\delta(z)N(z,\zeta)d_z\sigma-$$
$$-\int\limits_{\Delta}\varphi(z)N(z,\zeta)d_z\tau-\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma(z)\psi(z)N(z,\zeta)d_z\tau\,. \tag{12.7}$$

Inoltre, prendendo $\omega\equiv1$, dalle (12.1) segue pure che:

$$-\lambda\int\limits_{\Delta}\gamma(z)\psi(z)d_z\tau=\int\limits_{\Gamma}\delta(z)d_z\sigma+\int\limits_{\Delta}\varphi(z)d_z\tau\,. \tag{12.8}$$

Dalla (12.7), moltiplicando ambo i membri per $\gamma(\zeta)$ ed integrando su Δ si trae:

$$(12.9)\quad \int_\Delta \gamma(\zeta)\psi(\zeta)d_\zeta\tau = \frac{1}{L}\int_\Gamma \mu(z)d_z\sigma \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau - \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Gamma \delta(z)N(z, \zeta)d_z\sigma -$$
$$- \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \varphi(z)N(z, \zeta)d_z\tau - \lambda \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)N(z, \zeta)d_z\tau .$$

Poichè γ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(p)}(\Delta)$ $(p > 1)$, riesce:

$$(12.10)\quad \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)N(z, \zeta)d_z\tau = \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)d_z\tau \int_\Delta \gamma(\zeta)N(z, \zeta)d_\zeta\tau ,$$

e quindi, dalla (12.9), tenuto conto della (12.10) e della (12.8), si ha:

$$(12.11)\quad \frac{1}{L}\int_\Gamma \mu(z)d_z\sigma = -\frac{1}{\lambda\int_\Delta \gamma d\tau}\left\{\int_\Gamma \delta(z)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)d_z\tau\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\int_\Delta \gamma d\tau}\int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau\left\{\int_\Gamma \delta(z)N(z, \zeta)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)N(z, \zeta)d_z\tau\right\} +$$
$$+ \frac{\lambda}{\int_\Delta \gamma d\tau}\int_\Delta \gamma(z)\psi(z)d_z\tau \int_\Delta \gamma(\zeta)N(z, \zeta)d_\zeta\tau .$$

Dalle (12.7) e (12.11), assunta come $K(\zeta, z)$ la funzione data dal secondo membro della (12.3), segue la (12.2) per ζ q. o. in Δ.

Proviamo ora che la condizione è sufficiente.

Si verifica intanto facilmente — tenuto conto che γ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(p)}(\Delta)$ $(p > 1)$ — che la funzione μ data dalla (12.4) appartiene a $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{M}(\Gamma)$.

Consideriamo la (12.2); moltiplicando per $\lambda\gamma(\zeta)$ e integrando su Δ si trae:

$$\lambda\int_\Delta \gamma(\zeta)\psi(\zeta)d_\zeta\tau = -\lambda\int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau\left\{\int_\Gamma \delta(z)N(z, \zeta)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)N(z, \zeta)d_z\tau\right\} +$$
$$+ \lambda\int_\Delta \gamma(w)d_w\tau\left\{\int_\Gamma \delta(z)N(z, w)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)N(z, w)d_z\tau\right\} -$$
$$- \left\{\int_\Gamma \delta(z)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)d_z\tau\right\} + \lambda^2\int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)K(\zeta, z)d_z\tau$$

e quindi, riuscendo:

$$\int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)K(\zeta, z)d_z\tau = 0 \quad (^{25}),$$

ne segue

$$\lambda \int_\Delta \gamma(\zeta)\psi(\zeta)d_\zeta\tau + \int_\Gamma \delta(z)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)d_z\tau = 0 . \tag{12.12}$$

Dalle (12.2) e (12.4), posto:

$$a = \frac{1}{\int_\Delta \gamma d\tau} \int_\Delta \gamma(w)d_w\tau \left\{ \int_\Gamma \delta(z)N(z, w)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)N(z, w)d_z\tau \right\} -$$

$$- \frac{1}{\lambda \int_\Delta \gamma d\tau} \left\{ \int_\Gamma \delta(z)d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z)d_z\tau \right\}$$

si ha

$$\psi(\zeta) = a - \int_\Gamma \delta(z)N(z, \zeta)d_z\sigma - \int_\Delta \varphi(z)N(z, \zeta)d_z\tau + \lambda \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)K(\zeta, z)d_z\tau$$

$$\mu(t) = a - \int_\Gamma \delta(z)N(z, t)d_z\sigma - \int_\Delta \varphi(z)N(z, t)d_z\tau + \lambda \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)K(t, z)d_z\tau$$

e quindi, se ω è un'arbitraria funzione di $\mathcal{C}(\Delta)$, riesce:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial\omega}{\partial\nu_t} - \delta\omega\right] d_t\sigma + \int_\Delta \psi\Delta_2\omega d\tau = \tag{12.13}$$

$$= a \int_\Gamma \frac{\partial\omega}{\partial\nu_t} d_t\sigma - \int_\Gamma \frac{\partial\omega}{\partial\nu_t} d_t\sigma \int_\Gamma \delta(z)N(z, t)d_z\sigma - \int_\Gamma \frac{\partial\omega}{\partial\nu_t} d_t\sigma \int_\Delta \varphi(z)N(z, t)d_z\tau +$$

---

(25) Si ha, per la (12.3) e per la (12.10):

$$\int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)K(\zeta, z)d_z\tau =$$

$$= - \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta N(z, \zeta)\gamma(z)\psi(z)d_z\tau + \frac{1}{\int_\Delta \gamma d\tau} \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)d_z\tau \int_\Delta \gamma(t)N(t, z)d_t\tau =$$

$$= - \int_\Delta \gamma(\zeta)d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)N(z, \zeta)d_z\tau + \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)d_z\tau \int_\Delta \gamma(t)N(t, z)d_t\tau = 0 .$$

$$+ \lambda \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} d_t\sigma \int_\Delta \gamma(z)\psi(z) K(t, z) d_z\tau - \int_\Gamma \delta\omega d\sigma + a \int_\Delta \Delta_2 \omega d\tau -$$

$$- \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta \tau \int_\Gamma \delta(z) N(z, \zeta) d_z\sigma - \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta\tau \int_\Delta \varphi(z) N(z, \zeta) d_z\tau +$$

$$+ \lambda \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta\tau \int_\Delta \gamma(z)\psi(z) K(\zeta, z) d_z\tau .$$

Tenendo presente l'espressione di $K(\zeta, z)$ data dalla (12.3), eseguendo — ciò che è lecito — delle inversioni dell'ordine di integrazione nel secondo membro della (12.13) ed ordinando si trova:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} - \delta\omega\right] d_t\sigma + \int_\Delta \psi \Delta_2 \omega d_\zeta\tau = a \left\{ \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} d_t\sigma + \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta\tau \right\} +$$

$$+ \int_\Gamma \delta(z) d_z\sigma \left\{ - \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} N(z, t) d_t\sigma - \int_\Delta \Delta_2 \omega N(z, \zeta) d_\zeta\tau \right\} - \int_\Gamma \delta\omega d\sigma +$$

$$+ \int_\Delta \varphi(z) d_z\tau \left\{ - \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} N(z, t) d_t\sigma - \int_\Delta \Delta_2 \omega N(z, \zeta) d_\zeta\tau \right\} +$$

$$+ \lambda \int_\Delta \gamma(z)\psi(z) d_z\tau \left\{ - \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} N(z, t) d_t\sigma - \int_\Delta \Delta_2 \omega N(z, \zeta) d_\zeta\tau \right\} +$$

$$+ \left[\int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} d_t\sigma + \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta\tau \right] \frac{\lambda}{\int_\Delta \gamma d\tau} \int_\Delta \gamma(z)\psi(z) d_z\tau \int_\Delta \gamma(w) N(z, w) d_w\tau .$$

Sia ζ un punto fissato in Δ; si ha:

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{L} \int_\Gamma \omega d\sigma - \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_z} N(z, \zeta) d_z\sigma - \int_\Delta \Delta_2 \omega N(z, \zeta) d_z\tau$$

ed inoltre:

$$\int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} d_t\sigma + \int_\Delta \Delta_2 \omega d_\zeta\tau = 0 ;$$

pertanto, ricordando la (12.12), riesce:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial \omega}{\partial \nu_t} - \delta\omega\right] d_t\sigma + \int_\Delta \psi \Delta_2 \omega d_\zeta\tau = \int_\Delta \varphi(z)\omega(z) d_z\tau + \lambda \int_\Delta \gamma(z)\psi(z)\omega(z) d_z\tau$$

cioè la (12.1) per ogni ω di $\mathcal{C}(\Delta)$. Il teorema è così completamente acquisito.

13. Alcune proprietà delle trasformazioni:

$$K(\psi)=\int_{\Delta}\psi(z)K(\zeta,z)dM_z\,,\qquad N(\psi)=\int_{\Delta}\psi(z)N(z,\zeta)dM_z\,.$$

Sia $\gamma(\zeta)$ una funzione reale continua in $\Delta-(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_r)$, mai negativa, non identicamente nulla ed appartenente allo spazio $\mathfrak{L}^{(p^*)}(\Delta)$ $(p^*>1)$.

Posto:

$$\gamma_1(\zeta)\begin{cases}=\gamma(\zeta) & \zeta\in\Delta-(\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_r)\\ =0 & \text{altrove}\end{cases}$$

e detta $\{I\}$ la famiglia degli intervalli superiormente aperti del piano, indichiamo con $M(I)$ la misura non negativa così definita:

$$M(I)=\int_I\gamma_1(z)d_z\tau\,.$$

Riesce ovviamente:

$$M(\Delta)=\int_{\Delta}\gamma(z)d_z\tau>0\,. \tag{13.1}$$

Nel séguito indicheremo con $\mathfrak{L}_M^{(p)}(\Delta)$ $(p\geq 1)$ lo spazio complesso di Banach costituito dalle funzioni complesse u aventi modulo di potenza p-esima sommabile rispetto alla misura M, cioè tali che $|u|^p\gamma$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Consideriamo il nucleo (reale) $K(\zeta,z)$ definito dalla (12.3) e che per la (13.1) può scriversi ora al modo seguente:

$$K(\zeta,z)=-N(z,\zeta)+\frac{1}{M(\Delta)}\int_{\Delta}N(w,z)dM_w\,. \tag{13.2}$$

È immediato — tenendo presente la proprietà e) della funzione di Neumann (cfr. pag. 39) e l'appartenenza di γ ad $\mathfrak{L}^{(p^*)}(\Delta)$ — che:

$$K(\zeta,z)=O\left(\log\frac{H}{|\zeta-z|}\right) \tag{13.3}$$

con H costante positiva.

Supposto $p > 1$, sono soddisfatte, con riferimento a $K(\zeta, z)$, le seguenti proprietà:

1) Fissato ζ in Δ e posto $q = \frac{p}{p-1}$, la funzione di z: $|K(\zeta, z)|^q$ appartiene ad $\mathfrak{L}_M^{(1)}(\Delta)$.

2) La funzione di ζ:

$$G(\zeta) = \left(\int_\Delta |K(\zeta, z)|^q dM_z \right)^{\frac{p}{q}}$$

appartiene ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

3) Lo spazio $\mathfrak{L}_M^{(q)}(\Delta)$ è separabile.

La 1) e la 2) sono conseguenza della (13.3) e del fatto che γ appartiene a $\mathfrak{L}^{(p^*)}(\Delta)$, la 3) è classicamente nota.

Considerata la seguente trasformazione lineare, definita in $\mathfrak{L}_M^{(p)}(\Delta)$:

$$K(\psi) = \int_\Delta \psi(z) K(\zeta, z) dM_z = \int_\Delta \psi(z)\gamma(z) K(\zeta, z) d_z\tau\,, \tag{13.4}$$

essendo soddisfatte le proprietà 1), 2) e 3) di cui sopra, sussiste il teorema ([26]):

XVII. *La trasformazione* $K(\psi)$, *definita in* $\mathfrak{L}_M^{(p)}(\Delta)$ $(p > 1)$, *ha codominio contenuto in* $\mathfrak{L}_M^{(p)}(\Delta)$ *ed è totalmente continua.*

Sia ora $p = 2$ e consideriamo lo spazio di Banach $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$; esso è anche uno spazio di Hilbert definendo il prodotto scalare di due suoi elementi u e v al modo seguente:

$$(u, v) = \int_\Delta u\bar{v} dM\,.$$

Con considerazioni analoghe a quelle svolte con riferimento a $K(\psi)$, tenendo presente la simmetria della funzione (reale) $N(z, \zeta)$, si constata che la trasformazione lineare

$$N(\psi) = \int_\Delta \psi(z) N(z, \zeta) dM_z \tag{13.5}$$

è definita in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, ha codominio contenuto in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ ed è hermitiana e totalmente continua in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$.

([26]) Cfr. [8], pagg. 479-482.

Sussiste il lemma seguente:

XVIII. *Per ogni* ψ *di* $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ *riesce*:

$$(N(\psi), \psi) = \iint_{\Delta\times\Delta} \psi(z)\overline{\psi(\zeta)}N(z, \zeta)dM_z dM_\zeta \geq 0 \tag{13.6}$$

ed è $(N(\psi), \psi) = 0$ *se e soltanto se* ψ *è M-equivalente a zero, cioè se* ψ *è diversa da zero al più in un insieme di misura nulla rispetto alla misura M.*

Consideriamo dapprima il caso che la misura M sia quella ordinaria, cioè supponiamo che nella (13.1) sia $\gamma = 1$. Indichiamo con $N_1(\psi)$ la trasformazione lineare, nel caso generale definita dalla (13.5), e precisamente poniamo:

$$N_1(\psi) = \int_\Delta \psi(z)N(z, \zeta)d_z\tau \qquad [z = x + iy\ ; \quad d_z\tau = dxdy]\,. \tag{13.7}$$

Proviamo che per ogni ψ di $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$, non q. o. nulla in Δ, riesce:

$$(N_1(\psi), \psi) = \iint_{\Delta\times\Delta} \psi(z)\overline{\psi(\zeta)}N(z, \zeta)d_z\tau d_\zeta\tau > 0 \tag{13.8}$$

e cioè che il funzionale $(N_1(\psi), \psi)$ è definito positivo in $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$.

Per acquisire la (13.8) è sufficiente dimostrare che in $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$, supposta ψ reale — e ciò è ovviamente non restrittivo — l'equazione integrale:

$$\int_\Delta \psi(z)N(z, \zeta)d_z\tau = \mu\psi(\zeta) \tag{13.9}$$

non può avere che autovalori positivi ([27]).

Sia dunque $\mu \neq 0$ un autovalore della (13.9) e $\psi \in \mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$ una corrispondente autosoluzione. (Se fosse $\mu = 0$, per un noto teorema di Lichtenstein-Friedrichs (cfr. [17], pag. 167), sarebbe — contrariamente all'ipotesi — ψ q. o. nulla in Δ). Con il solito procedimento della iterazione si constata direttamente che ψ è di classe uno in Δ e di classe due in $\Delta - \Gamma$. Posto $\lambda = \frac{1}{\mu}$, dalla (13.9), ricordando le proprietà della funzione di Neumann $N(z, \zeta)$, segue allora che ψ è soluzione del seguente problema:

$$\Delta_2\psi + \lambda\psi = 0 \qquad \text{in } \Delta - \Gamma \tag{13.10}$$

([27]) Cfr. [8], pag. 231, teor. XLIII.

$$(13.11) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\zeta} = \frac{\lambda}{L} \int_\Delta \psi(z) d_z \tau \qquad \text{su } \Gamma ; \qquad \int_\Gamma \psi d\sigma = 0 .$$

Il problema (13.10), (13.11), nella classe delle funzioni ψ di classe uno in Δ e di classe due in $\Delta - \Gamma$, non può ammettere che autovalori positivi. Infatti per la formula di Green si ha:

$$\int_\Delta \psi(\zeta) \Delta_2 \psi(\zeta) d_\zeta \tau = - \int_\Delta |\text{grad } \psi|^2 d_\zeta \tau - \int_\Gamma \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta \sigma$$

e quindi, per le (13.10) e (13.11):

$$\lambda \int_\Delta |\psi|^2 d_\zeta \tau = \int_\Delta |\text{grad } \psi|^2 d_\zeta \tau .$$

Poichè tutti gli autovalori μ della (13.9) in $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$ sono tali che i loro inversi sono autovalori del problema (13.10), (13.11), nella classe sopra considerata, da quanto ora provato e per il teorema citato nella nota ([27]) segue la (13.8) in $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$.

Proviamo che l'equazione integrale (13.9), considerata in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, ammette ancora soltanto autovalori positivi. Se $\mu \neq 0$ è un autovalore per la (13.9) in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ e $\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ una corrispondente autosoluzione, si constata direttamente che ψ appartiene anche ad $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta)$ e pertanto basta provare che $\mu = 0$ non è autovalore per la (13.9) in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Sia dunque $\psi_0 \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ tale che q. o. in Δ riesca

$$\int_\Delta \psi_0(z) N(z, \zeta) d_z \tau = 0 .$$

Posto $\zeta = \xi + i\eta$, esistono due insiemi E_ξ ed E_η di misura nulla, appartenenti agli assi coordinati ξ ed η, tali che, fissato ξ fuori di E_ξ [fissato η fuori di E_η], la funzione $\int_\Delta \psi_0(z) N(z, \zeta) d_z \tau$ è dotata di derivata parziale rispetto ad η [rispetto a ξ] sommabile in Δ, riuscendo inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_\Delta \psi_0(z) N(z, \zeta) d_z \tau = \int_\Delta \psi_0(z) \frac{\partial}{\partial \xi} N(z, \zeta) d_z \tau ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_\Delta \psi_0(z) N(z, \zeta) d_z \tau = \int_\Delta \psi_0(z) \frac{\partial}{\partial \eta} N(z, \zeta) d_z \tau .$$

Ne viene che per quasi tutti i domini rettangolari coordinati R, contenuti in $\varDelta - \Gamma$, tali che le coordinate dei loro vertici non appartengono nè ad E_ξ nè ad E_η, riesce

$$\int_{\mathfrak{F}R} d_\zeta\sigma \int_{\varDelta} \psi_0(z) \frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} N(z, \zeta) d_z\tau = 0 \tag{13.12}$$

ν_ζ denotando la normale (interna) a $\mathfrak{F}R$.

Dalla (13.12), per i teoremi di Fubini e Tonelli e per le proprietà della funzione $N(z, \zeta)$, segue $\psi_0 = 0$ q. o. in $\varDelta$.

Indichiamo con $\mathfrak{B}$ la totalità delle funzioni limitate in $\varDelta$, che, come noto, costituisce una base per $\mathfrak{L}^{(1)}(\varDelta)$. Poichè il funzionale $(N_1(\psi), \psi)$ è definito positivo in $\mathfrak{L}^{(2)}(\varDelta)$ esso è tale anche su $\mathfrak{B}$.

Indichiamo con $\overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$ la sottoclasse di $\mathfrak{L}^{(1)}(\varDelta)$ costituita dalle funzioni reali ψ per le quali la funzione $\psi(z)\psi(\zeta)N(z,\zeta)$ $[z \in \varDelta, \zeta \in \varDelta]$ è sommabile nel prodotto topologico $\varDelta \times \varDelta$. Per ogni ψ di $\overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$ risulta allora definito il funzionale $(N_1(\psi), \psi)$. Proviamo che esso è ivi definito positivo.

Sia m un intero positivo e $\psi \in \overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$; indichiamo con $\varDelta_m$ l'insieme dei punti di $\varDelta$ nei quali riesce $|\psi(z)| \leq m$; posto:

$$\varphi(z) \begin{cases} = \psi(z) & \text{in } \varDelta_m \\ = 0 & \text{in } \varDelta - \varDelta_m , \end{cases}$$

la funzione $\varphi(z)$ appartiene a $\mathfrak{B}$ e quindi:

$$(N_1(\varphi), \varphi) = \int_{\varDelta_m} \psi(\zeta) d_\zeta\tau \int_{\varDelta_m} \psi(z) N(z, \zeta) d_z\tau \geq 0 .$$

Riesce:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\varDelta_m} \psi(\zeta) d_\zeta\tau \int_{\varDelta_m} \psi(z) N(z, \zeta) d_z\tau = (N_1(\psi), \psi)$$

e quindi il funzionale $(N_1(\psi), \psi)$ è intanto semidefinito positivo in $\overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$, riesce cioè $(N_1(\psi), \psi) \geq 0$.

Indichiamo con ψ_0 una minimante assoluta di $(N_1(\psi), \psi)$ in $\overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$ non q. o. nulla in $\varDelta$; detta η un'arbitraria funzione reale continua e t un parametro reale, la funzione $\psi_0 + t\eta$, appartiene ancora ad $\overline{\mathfrak{L}}^{(1)}(\varDelta)$ e, posto: $Q(t) = (N_1(\psi_0 + t\eta), \psi_0 + t\eta)$ si trova

$$\left[\frac{dQ(t)}{dt}\right]_{t=0} = 2\int_{\varDelta} \eta(\zeta) d_\zeta\tau \int_{\varDelta} \psi_0(z) N(z,\zeta) d_z\tau = 0$$

e quindi:

$$\int_\Delta \psi_0(z) N(z, \zeta) d_z\tau = 0 .$$

Per quanto si è in precedenza provato ciò è assurdo e quindi $(N_1(\psi), \psi)$ è definito positivo in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Sia ora ψ una funzione reale di $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$. Si ha:

$$(N(\psi), \psi) = (N_1(\gamma\psi), \gamma\psi)$$

con $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ e pertanto $(N(\psi), \psi) \geq 0$ riuscendo $(N(\psi), \psi) = 0$ se e soltanto se $\gamma\psi$ è quasi ovunque nulla in Δ cioè se e soltanto se ψ è M-equivalente a zero in Δ.

Dato che per acquisire la (13.6) ci si può sempre ricondurre al caso che ψ sia reale, il teorema è così provato.

Il nucleo (reale) $K(\zeta, z)$ definito dalla (12.3) non è simmetrico; la trasformazione lineare $K(\psi)$ non è quindi hermitiana in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, però essa può venir « simmetrizzata » (a sinistra) mediante la trasformazione hermitiana $N(\psi)$, definita dalla (13.5), nel senso precisato dal seguente lemma:

XIX. *La trasformazione* $NK(\psi) = \int_\Delta \psi(z) H(\zeta, z) dM_z$, *definita in* $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, *con*

$$H(\zeta, z) = \int_\Delta N(\zeta, t) K(t, z) dM_t ,$$

è ivi hermitiana.

Poichè $H(\zeta, z)$ è reale basta provare che la funzione $H(\zeta, z)$ è simmetrica nelle variabili ζ e z. Per la simmetria di $N(z, \zeta)$, tenendo presente la (13.2), si ha:

$$H(\zeta, z) = \int_\Delta N(\zeta, t) K(t, z) dM_t = -\int_\Delta N(\zeta, t) N(z, t) dM_t +$$

$$+ \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta N(\zeta, t) dM_t \int_\Delta N(w, z) dM_w = -\int_\Delta N(z, t) N(\zeta, t) dM_t +$$

$$+ \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta N(t, z) dM_t \int_\Delta N(\zeta, w) dM_w =$$

$$= \int_\Delta N(z, t) \left[-N(\zeta, t) + \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta N(w, \zeta) dM_w \right] dM_t = \int_\Delta N(z, t) K(t, \zeta) dM_t = H(z, \zeta) ,$$

e quindi la tesi.

14. Problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda cu$ in un dominio D r-singolare. Teorema dell'alternativa nella classe $[u]_\lambda$.

Indichiamo con D un dominio r-singolare non cuspidale del piano della variabile complessa z e con C la curva semplice e chiusa, di classe $\mathscr{C}^{(1,l)}$ $(0 < l \leq 1)$, completa frontiera di D. Sia $c(z)$ una funzione continua in D. Fissato un numero complesso λ, indicheremo con $[u]_\lambda$ la classe delle funzioni u appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$, tali che in corrispondenza a ciascuna di esse esistano tre funzioni $m(z)$, $g(z)$ ed $f(z)$, la prima appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$, la seconda ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$, la terza ad $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, tali che riesca:

$$\int_C \left[m \frac{\partial v}{\partial n_z} - gv\right] d_z s + \int_D [u(\Delta_2 v - \lambda cv) - fv] d_z \tau = 0 \tag{14.1}$$

per ogni v della classe $\mathcal{C}(D)$.

Consideriamo il problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda cu$ in $[u]_\lambda$ consistente, assegnate le funzioni g ed f rispettivamente in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed in $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, nel ricercare sotto quali condizioni si ha l'esistenza e l'unicità di due funzioni m ed u, appartenenti rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ e $\mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$ verificanti la (14.1) per ogni v di $\mathcal{C}(D)$.

Sussiste, a tale riguardo, il seguente teorema:

XX. *Sia $c(z)$ una funzione reale definita in D, ivi continua, mai negativa e non identicamente nulla. Considerato l'operatore $\Delta_2 u - \lambda cu$, il problema di Neumann in $[u]_\lambda$, ad esso relativo, ammette una successione di autovalori reali non positivi $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}, \ldots$ ciascuno dei quali ha molteplicità ν_n finita.*

Se $\lambda \neq \lambda^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, assegnate comunque g ed f, rispettivamente in $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ ed in $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$, esiste una ed una sola soluzione $[m, u]$ delle (14.1) *con $m \in \mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ e $u \in \mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$.*

Se $\lambda = \lambda^{(n)}$ ed $\{[m_k, u_k]\}$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu_n)$ è un sistema fondamentale di autosoluzioni del problema omogeneo, riesce $gm_k \in \mathfrak{L}^{(1)}(C)$, $fu_k \in \mathfrak{L}^{(1)}(D)$ e le (14.1) *ammettono soluzione $[m, u]$ con $m \in \mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ e $u \in \mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$, se e solo se sono verificate le condizioni seguenti:*

$$\int_C g m_k d_z s + \int_D f u_k d_z \tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n) \tag{14.2}$$

Introduciamo, nel piano della variabile complessa ζ, il dominio Δ ottenuto trasformando il dominio D r-singolare mediante la trasforma-

zione $\zeta = F(z)$ (cfr. teor. II). La completa frontiera di Δ è una curva Γ semplice e chiusa di classe $\mathcal{C}^{(1,\lambda)}$ con $0 < \lambda \leq l$.

Considerata la funzione $z = F^{-1}(\zeta)$ inversa della $\zeta = F(z)$, poniamo:

$$c^*(z) = |F'(z)|^{-2}c(z)\,, \quad \gamma(\zeta) = c^*[F^{-1}(\zeta)]\,.$$

La funzione $\gamma(\zeta)$, tenute presenti le ipotesi fatte su $c(z)$ e le proprietà della funzione $F(z)$, è una funzione reale definita in $\Delta - (\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_r)$, ivi continua, non negativa e non identicamente nulla. Inoltre $\gamma(\zeta)$ appartiene allo spazio $\mathfrak{L}^{(p^*)}(\Delta)$ con $1 < p^* < \dfrac{1}{\alpha^*}$ (α^* dato dalle (10.12)).

Fissato il numero complesso λ indichiamo con $[\psi]_\lambda$ la classe delle funzioni ψ appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathcal{K}(\Delta)$ tali che in corrispondenza a ciascuna di esse esistano tre funzioni $\mu(\zeta)$, $\delta(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$, la prima appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{N}(\Gamma)$, la seconda ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, la terza ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, e tali che riesca:

$$\int_\Gamma \left[\mu \frac{\partial\omega}{\partial\nu_\zeta} - \delta\omega\right] d_\zeta\sigma + \int_\Delta [\psi(\Delta_2\omega - \lambda\gamma\omega) - \varphi\omega] d_\zeta\tau = 0\,, \tag{14.3}$$

per ogni ω della classe $\mathfrak{C}(\Delta)$.

Parlando di problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$ in $[\psi]_\lambda$, intenderemo il problema consistente, assegnate le funzioni δ e φ rispettivamente in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ ed in $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, nel ricercare sotto quali condizioni si ha l'esistenza e l'unicità di due funzioni μ e ψ rispettivamente di $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathfrak{N}(\Gamma)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathcal{K}(\Delta)$, verificanti le (14.3) per ogni ω di classe $\mathfrak{C}(\Delta)$.

Per il primo teorema di equivalenza (teor. XV), ad ogni soluzione $[m, u]$ del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda c u$ in $[u]_\lambda$, con dati g ed f, corrisponde una soluzione $[\mu, \psi]$ del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$ in $[\psi]_\lambda$ relativo ai dati δ e φ avendo posto:

$$g^*(z) = |F'(z)|^{-1}g(z) \qquad \delta(\zeta) = g^*[F^{-1}(\zeta)]$$

$$f^*(z) = |F'(z)|^{-2}f(z) \qquad \varphi(\zeta) = f^*[F^{-1}(\zeta)]\,.$$

Precisamente si ha:

$$\mu(\zeta) = m[F^{-1}(\zeta)]\,, \qquad \psi(\zeta) = u[F^{-1}(\zeta)]\,.$$

Viceversa, se $[\mu, \psi]$ è una soluzione del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$ in $[\psi]_\lambda$, con i dati δ e φ, ad essa corrisponde una soluzione $[m, u]$ del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda c u$ in $[u]_\lambda$ con i dati g ed f, e precisamente:

$$m(z) = \mu[F(z)]\,, \qquad u(z) = \psi[F(z)]\,.$$

Ci siamo pertanto ricondotti allo studio del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$ in un dominio Δ non singolare nella classe $[\psi]_\lambda$ con dati δ e φ appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ ed $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Supponiamo dapprima $\lambda \neq 0$. Allora, per il secondo teorema di equivalenza, lo studio del problema di Neumann in $[\psi]_\lambda$ per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$ è ricondotto a quello dell'equazione integrale (12.2) nella classe delle funzioni ψ appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ tali che $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$.

Ricordando le (12.3) e (13.4), posto $\eta = \dfrac{1}{\lambda}$ e

$$h_\eta(\zeta) = \eta \Bigg[\int_\Gamma \delta(z) N(z,\zeta) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) N(z,\zeta) d_z\tau + \frac{\eta}{\int_\Delta \gamma d\tau} \left\{ \int_\Gamma \delta(z) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) d_z\tau \right\} - \frac{1}{\int_\Delta \gamma d\tau} \int_\Delta \gamma(w) d_w\tau \left\{ \int_\Gamma \delta(z) N(z,w) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) N(z,w) d_z\tau \right\} \Bigg], \tag{14.4}$$

l'equazione integrale (12.2) si può scrivere al modo seguente:

$$K(\psi) = \eta\psi(\zeta) + h_\eta(\zeta) . \tag{14.5}$$

La funzione $h_\eta(\zeta)$, per ogni fissato η, appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$. Basta a tale scopo provare che appartengono ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ le funzioni

$$\int_\Gamma \delta(z) N(z,\zeta) d_z\sigma \qquad \text{e} \qquad \int_\Delta \varphi(z) N(z,\zeta) d_z\tau .$$

Siano z_1 e z_2 due punti fissati su Γ; la funzione di ζ:

$$\gamma(\zeta) \log \frac{1}{|z_1 - \zeta|} \left| \log \frac{1}{|z_2 - \zeta|} \right|$$

è sommabile in Δ, ed inoltre, poichè γ appartiene a $\mathfrak{L}^{(p^*)}(\Delta)$, la funzione di z_1 e z_2, definita in $\Gamma \times \Gamma$:

$$\int_\Delta \gamma(\zeta) \log \frac{1}{|z_1 - \zeta|} \left| \log \frac{1}{|z_2 - \zeta|} \right| d_\zeta\tau \tag{14.6}$$

è ivi limitata. Pertanto è sommabile in $\Gamma \times \Gamma$ la funzione:

$$|\delta(z_1)|\,|\delta(z_2)| \int_\Delta \gamma(\zeta) \left|\log \frac{1}{|z_1 - \zeta|}\right| \left|\log \frac{1}{|z_2 - \zeta|}\right| d_\zeta \sigma .$$

Per i teoremi di Tonelli e Fubini esiste allora finito il seguente integrale:

$$\int_\Delta \gamma(\zeta) d_\zeta \tau \int_\Gamma \delta(z_1) \log \frac{1}{|z_1 - \zeta|} d_{z_1}\sigma \int_\Gamma \delta(z_2) \log \frac{1}{|z_2 - \zeta|} d_{z_2}\sigma ,$$

e quindi essendo $N(z, \zeta) = O\left(\log \frac{H}{|z - \zeta|}\right)$ (H costante positiva), la funzione $\int_\Gamma \delta(z) N(z, \zeta) d_z\sigma$ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$.

In modo analogo, poichè la (14.6) è limitata in $\Delta \times \Delta$, si prova che $\int_\Delta \varphi(z) N(z, \zeta) d_z\tau$ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$.

Se ψ è una soluzione della (14.5) appartenente ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ tale che anche $\gamma\psi$ appartenga ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, poichè — come abbiamo ora constatato — $h_\eta(\zeta)$ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$, di conseguenza anche ψ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$. Infatti, essendo $K(\zeta, z) = O\left(\log \frac{H}{|z - \zeta|}\right)$ (H costante positiva), si può ripetere per la funzione $\int_\Delta \psi(z)\gamma(z) K(\zeta, z) d_z\tau$ lo stesso ragionamento valso a provare l'appartenenza ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ della funzione $\int_\Delta \varphi(z) N(z, \zeta) d_z\tau$.

Ne segue che ogni funzione $\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ tale che $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ e verificante la (14.5) per ζ q. o. in Δ, è di conseguenza soluzione in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ dell'equazione integrale:

(14.7) $$K(\psi) \doteq \eta\psi(\zeta) + h_\eta(\zeta) ,$$

dove il segno $\doteq$ sta ad indicare che i due membri della (14.7) possono differire per una funzione M-equivalente a zero in Δ.

Supponiamo $\eta \neq 0$ e sia ψ una soluzione in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ dell'equazione (14.7); riesce:

$$\frac{K(\psi) - h_\eta(\zeta)}{\eta} \doteq \psi(\zeta) .$$

Indichiamo con $\psi_0(\zeta)$ la funzione M-equivalente a zero tale che, q. o. in Δ, si ha

$$\frac{K(\psi) - h_\eta(\zeta)}{\eta} = \psi(\zeta) + \psi_0(\zeta) .$$

Ne segue ovviamente $\gamma\psi_0 = 0$ q. o. in Δ e quindi $K(\psi_0) = 0$ q. o. in Δ. Per la funzione di $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$: $\psi(\zeta) + \psi_0(\zeta)$ riesce allora, q. o. in Δ:

$$K(\psi + \psi_0) = \eta(\psi + \psi_0) + h_\eta$$

e cioè $\psi + \psi_0$ verifica la (14.5) q. o. in Δ. Poichè la (14.5), con $\eta = \dfrac{1}{\lambda} \neq 0$, traduce il problema di Neumann in $[u]_\lambda$ (per $\lambda \neq 0$), e poichè, in tal caso, come abbiamo ora constatato, lo studio della (14.5) nella classe delle funzioni $\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ e tali che $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ è equivalente allo studio della (14.7) in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, possiamo limitarci allo studio di quest'ultima nello spazio $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$.

Dato che $K(\psi)$ è totalmente continua in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ ed è — per il teor. XIX — simmetrizzabile con la trasformazione hermitiana $N(\psi)$, con $(N(\psi), \psi)$ definito positivo in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, all'equazione (14.7) possono applicarsi i risultati della teoria sugli operatori simmetrizzabili ([28]).

Consideriamo, in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, l'equazione integrale omogenea associata alla (14.7):

$$K(\psi) \doteq \eta\psi \,. \tag{14.8}$$

Essa è dotata di autovalori ([29]) e ognuno di essi è necessariamente reale poichè, detta ψ una autosoluzione della (14.8) in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$, relativamente ad essa riesce:

$$\eta = \frac{(NK(\psi), \psi)}{(N(\psi), \psi)}$$

con NK e N trasformazioni hermitiane.

Proviamo che $\eta = 0$ non è autovalore in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ per l'equazione (14.8). Supponiamo infatti per assurdo che esista una funzione $\psi_0 \in \mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ e non M-equivalente a zero tale che

$$\int_\Delta \psi_0(z) K(\zeta, z) dM_z \doteq 0 \,. \tag{14.9}$$

Sia z un punto di $\Delta - \Gamma$ interno all'insieme $\mathfrak{J}$ dei punti di $\Delta - \Gamma$ nei quali è $\gamma(z) > 0$. Poichè $\gamma(z)$ è continua in $\Delta - \Gamma$ si può costruire un intorno rettangolare R completamente contenuto in $\mathfrak{J}$ e quindi tale che in R riesca $\gamma(z) > 0$.

([28]) Cfr. [21] Cap. 12, pag. 370 e segg.
([29]) Cfr. [21] Cap. 12, § 3 teor. I pagg. 373-375.

Dalla (14.9) segue per ζ q. o. in R:

$$\int_{\Delta} \gamma(z)\psi_0(z)K(\zeta, z)d_z\tau = 0 .$$

Poichè la funzione $\gamma(z)\psi_0(z)$ è di quadrato sommabile in R, la funzione $g(\zeta) = \int_{\Delta} \gamma(z)\psi_0(z)K(\zeta, z)d_z\tau$ è continua in R e, per il teorema di Lichtenstein-Friedrichs (cfr. [17], pag. 167), ricordando l'espressione del nucleo $K(\zeta, z)$ e le proprietà della funzione $N(z, \zeta)$ riesce, q. o. in R: $\Delta_2 g = \gamma\psi_0 = 0$. Ne segue $\psi_0 = 0$ q. o. in $\mathfrak{I}$ e quindi ψ_0 è M-equivalente a zero in Δ. Ciò è assurdo e pertanto $\eta = 0$ non è autovalore in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ per l'equazione (14.8).

Proviamo ora che la (14.8) ammette in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ una successione di autovalori $\eta^{(1)}, ..., \eta^{(n)}, ...$

Infatti, supponiamo per assurdo che la (14.8) ne ammetta soltanto un numero finito. Disposti gli autovalori in ordine di modulo decrescente e ripetuto ciascuno di essi tante volte quant'è la rispettiva molteplicità, riesca:

$$|\eta^{(1)}| \geq |\eta^{(2)}| \geq ... \geq |\eta^{(n_0)}| .$$

Sia $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n_0}$ un sistema di funzioni di $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ — che possiamo supporre reali — autosoluzioni della (14.8) e tali che:

$$(N(\psi_h), \psi_k) = \delta_h^k \qquad (h, k = 1, 2, ..., n_0) , \tag{14.10}$$

e sia $p \in \mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ tale che la funzione di $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ così definita:

$$q = p - \sum_{k=1}^{n_0} (N(p), \psi_k)\psi_k$$

non sia M-equivalente a zero.

Per le (14.10) si ha: $(N(q), \psi_k) = 0$ $(k = 1, 2, ..., n_0)$ e ciò implica: $(NK(q), K(q)) = 0$ [30]. Da quest'ultima relazione segue $K(q) \doteq 0$ e ciò è assurdo in quanto $\eta = 0$ non è, come in precedenza si è dimostrato, autovalore in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ per l'equazione (14.8).

Da quanto fin qui provato segue allora — come noto — che se $\eta \neq 0$ non è autovalore in $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ per l'equazione (14.8), l'equazione (14.7), comunque si fissi il termine noto h_η, ammette una ed una sola soluzione ψ appartenente ad $\mathfrak{L}_M^{(2)}(\Delta)$ e tale da verificare la (14.5) quasi ovunque in Δ.

---

[30] Cfr. [21] Cap. 12, § 4, teor. I pagg. 380-382.

In conseguenza, posto $\lambda = \frac{1}{\eta}$, per i due teoremi di equivalenza, il problema di Neumann in $[u]_\lambda$ $(\lambda \neq 0)$ per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda c u$ ammette una ed una sola soluzione $[m, u]$ con $m \in \mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ ed $u \in \mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathfrak{H}(D)$.

Consideriamo ora il caso in cui $\eta = \eta^{(n)}$ è autovalore per l'equazione (14.8) e quindi anche per la sua omogenea trasposta in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$:

$$K^*(w) \doteq \eta w \tag{14.11}$$

con

$$K^*(w) = \int_\Delta w(z) K(z, \zeta) dM_z .$$

Sia $w^*_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, ..., \nu_n)$ un sistema fondamentale di autosoluzioni (reali) della (14.11) appartenenti ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ e relative all'autovalore $\eta^{(n)}$. Risulta in corrispondenza ad esso univocamente individuato il sistema di funzioni reali $w_k(\zeta) = w^*_k(\zeta) + w^{(0)}_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, ..., \nu_n)$ con le $w^{(0)}_k(\zeta)$ M-equivalenti a zero in Δ, autosoluzioni in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$ per $\eta = \eta^{(n)}$ della (14.11), tali che, considerata per ζ q. o. in Δ l'equazione l'integrale

$$K^*(w) = \eta w \tag{14.12}$$

e cioè la seguente:

$$-\int_\Delta w(z) N(z, \zeta) dM_z + \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta N(t, \zeta) dM_t \int_\Delta w(z) dM_z = \eta w(\zeta) , \tag{14.12$'$}$$

$\{w_k(\zeta)\}$ risulti un sistema fondamentale di autosoluzioni della (14.12) corrispondenti all'autovalore $\eta^{(n)}$.

Infatti, posto:

$$w^{(0)}_k(\zeta) = \frac{1}{\eta^{(n)}} K^*(w^*_k) - w^*_k(\zeta) \qquad (k = 1, 2, ..., \nu_n) ,$$

essendo $K^*(w^{(0)}_k) = 0$ q. o. in Δ, si ha anche, q. o. in Δ:

$$K^*(w^*_k + w^{(0)}_k) = \eta^{(n)}[w^*_k + w^{(0)}_k] .$$

Inoltre, poichè il sistema di funzioni w^*_k è costituito per ipotesi da funzioni linearmente indipendenti in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$, tali sono ancora, in $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$, le funzioni del sistema w_k e quindi, *a fortiori*, dall'essere $\sum_{k=1}^{\nu_n} a_k w_k(\zeta) = 0$ q. o. in Δ, segue $a_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., \nu_n)$.

Infine è immediato constatare che le funzioni $w_k(\zeta)$, essendo soluzioni, per $\eta = \eta^{(n)}$, della (14.12)$'$, risultano limitate in Δ.

Pertanto, condizione necessaria e sufficiente perchè la (14.5) sia risolubile quando $\eta = \eta^{(n)}$ è autovalore è che riesca:

$$\int_\Delta h_{\eta^{(n)}}(\zeta) w_k(\zeta) dM_\zeta = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n) \tag{14.13}$$

e cioè, per la (14.4):

$$\begin{aligned} &\int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \int_\Gamma \delta(z) N(z, \zeta) d_z\sigma + \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \int_\Delta \varphi(z) N(z, \zeta) d_z\tau - \\ &- \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \left\{ \int_\Delta dM_t \int_\Gamma \delta(z) N(z, t) d_z\sigma + \int_\Delta dM_t \int_\Delta \varphi(z) N(z, t) d_z\tau \right\} + \\ &+ \frac{\eta^{(n)}}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \left\{ \int_\Gamma \delta(z) d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) d_z\tau \right\} = 0 . \end{aligned} \tag{14.14}$$

Dalla (14.14), eseguite al primo membro delle lecite inversioni dell'ordine di integrazione, si trae:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \delta(z) \left\{ - \int_\Delta w_k(\zeta) N(z, \zeta) dM_\zeta + \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \int_\Delta N(z, t) dM_t - \right. \\ &\left. - \frac{\eta^{(n)}}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \right\} d_z\sigma + \int_\Delta \varphi(z) \left\{ - \int_\Delta w_k(\zeta) N(z, \zeta) dM_\zeta + \right. \\ &\left. + \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \int_\Delta N(z, t) dM_t - \frac{\eta^{(n)}}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \right\} = 0 \end{aligned}$$

e quindi poichè le w_k sono autosoluzioni della (14.12)' per $\eta = \eta^{(n)}$, ne segue:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \delta(z) \left[w_k(z) - \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \right] d_z\sigma + \\ &+ \int_\Delta \varphi(z) \left[w_k(z) - \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \right] d_z\tau = 0 \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n) . \end{aligned} \tag{14.15}$$

Le (14.15) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione integrale (14.5) sia risolubile nella classe delle funzioni $\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$ tali che $\gamma\psi \in \mathfrak{L}^{(1)}(\Delta)$, e pertanto il problema di Neumann in $[\psi]_\lambda$ per l'operatore $\Delta_2\psi - \lambda\gamma\psi$, con $\lambda = \lambda^{(n)} = \dfrac{1}{\eta^{(n)}}$, ammette soluzione $[\mu, \psi]$ con

$\mu \in \mathcal{L}^{(1)}(\Gamma) \cap \mathcal{N}(\Gamma)$ e $\psi \in \mathcal{L}^{(1)}(\Delta) \cap \mathcal{K}(\Delta)$ se e solo se δ e φ verificano le (14.15) $(k = 1, 2, ..., \nu_n)$.

Per rendere quest'ultime più espressive, proviamo che: condizione necessaria e sufficiente perchè, considerata un'autosoluzione w_k della (14.12) per $\eta = \eta^{(n)}$, detta c_k una costante, la funzione (limitata in Δ):

$$\psi_k(z) = w_k(z) - c_k \qquad (k = 1, 2, ..., \nu_n) \tag{14.16}$$

sia un'autosoluzione dell'equazione omogenea:

$$K(\psi) = \eta^{(n)}\psi \tag{14.17}$$

è che riesca:

$$c_k = \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta\,. \tag{14.18}$$

Proviamo dapprima che la condizione è sufficiente e cioè che la funzione:

$$\psi_k(z) = w_k(z) - \frac{1}{M(\Delta)} \int_\Delta w_k(\zeta) dM_\zeta \tag{14.19}$$

è autosoluzione della (14.17). Sia μ_k la traccia su Γ della funzione (14.19). Fissata un'arbitraria ω di $\mathcal{C}(\Delta)$ e considerate le funzioni $\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}$ e $\Delta_2\omega - \lambda^{(n)}\gamma\omega$ $\left[\lambda^{(n)} = \dfrac{1}{\eta^{(n)}}\right]$, il problema di Neumann in $[\psi]_\lambda$ con i dati $\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}$ e $\Delta_2\omega - \lambda^{(n)}\gamma\omega$ è ovviamente risolubile e quindi, dalle (14.15) si trae:

$$\int_\Gamma \frac{\partial\omega}{\partial\nu_\zeta}\, \mu_k d_\zeta\sigma + \int_\Delta [\Delta_2\omega - \lambda^{(n)}\gamma\omega]\psi_k d_\zeta\tau = 0 \qquad (k = 1, ..., \nu_n)\,. \tag{14.20}$$

Le (14.20) esprimono che $[\mu_k, \psi_k]$ è soluzione del problema omogeneo di Neumann in $[\psi]_\lambda$ e quindi che ψ_k — per il secondo teorema di equivalenza — è autosoluzione della (14.17). Osserviamo inoltre che, potendo applicare alle ψ_k il procedimento di iterazione, esse risultano di classe uno in Δ e di classe due in $\Delta - \Gamma$. Dalla formula di Green si ha allora:

$$\int_\Delta \psi_k \Delta_2 \psi_k d_\zeta\tau = -\int_\Delta |\text{grad}\, \psi_k|^2 d_\zeta\tau - \int_\Gamma \psi_k \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu_\zeta}\, d_\zeta\sigma$$

e quindi:

$$\frac{1}{\eta^{(n)}} \int_\Delta \gamma\psi_k^2 d_\zeta\tau = -\int_\Delta |\text{grad}\, \psi_k|^2 d_\zeta\tau\,.$$

Da ciò segue che la successione degli autovalori $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}, \ldots$ è costituita soltanto da numeri negativi.

Supponiamo ora che la funzione rappresentata dalla (14.16) sia una autosoluzione della (14.17). Poichè, per la proprietà d) della funzione di Neumann (cfr. pag. 39), riesce:

$$\int_{\Gamma} w_k d\sigma = 0 \qquad (k = 1, \ldots, \nu_n) \tag{14.21}$$

si trae dapprima per c_k la seguente espressione

$$c_k = -\frac{1}{L}\int_{\Gamma} \mu_k d\sigma \tag{14.22}$$

essendo L la lunghezza della curva Γ.

Si ha:

$$\eta^{(n)}\psi_k(\zeta) = -\int_{\Delta} \psi_k(z) N(z, \zeta) dM_z + \frac{1}{M(\Delta)}\int_{\Delta} \psi_k(z) dM_z \int_{\Delta} N(z, t) dM_t$$

e da questa, per le (14.16) e (14.22):

$$\eta^{(n)} w_k(\zeta) = -\int_{\Delta} \psi_k(z) N(z, \zeta) dM_z + \tag{14.23}$$

$$+ \frac{1}{M(\Delta)}\int_{\Delta} \psi_k(z) dM_z \int_{\Delta} N(z, t) dM_t - \frac{\eta^{(n)}}{L}\int_{\Gamma} \mu_k d\sigma .$$

Dalla (14.21), tenendo presente la d) di pag. 39, e la (14.23) si ottiene:

$$-\int_{\Gamma} d_\zeta\sigma \int_{\Delta} \psi_k(z) N(z, \zeta) dM_z + \frac{L}{M(\Delta)}\int_{\Delta} \psi_k(z) dM_z \int_{\Delta} N(z, t) dM_t - \eta^{(n)}\int_{\Gamma} \mu_k d\sigma =$$

$$= \frac{L}{M(\Delta)}\int_{\Delta} \psi_k(z) dM_z \int_{\Delta} N(z, t) dM_t - \eta^{(n)}\int_{\Gamma} \mu_k d\sigma = 0$$

e quindi:

$$\frac{1}{L}\int_{\Gamma} \mu_k d\sigma = \frac{1}{\eta^{(n)} M(\Delta)}\int_{\Delta} \psi_k(z) dM_z \int_{\Delta} N(z, t) dM_t . \tag{14.24}$$

Per la (14.24) la (14.23) diviene:

$$\eta^{(n)} w_k(\zeta) = -\int_{\Delta} \psi_k(z) N(z, \zeta) dM_z$$

e quindi, per la (14.16):

$$\eta^{(n)} w_k(\zeta) = -\int_{\Delta} w_k(z) N(z, \zeta) dM_z + c_k \int_{\Delta} N(z, \zeta) dM_z \,. \tag{14.25}$$

La funzione $w_k(\zeta)$ è, d'altra parte, autosoluzione per $\eta = \eta^{(n)}$ della (14.12) e pertanto si ha:

$$\eta^{(n)} w_k(\zeta) = -\int_{\Delta} w_k(z) N(z, \zeta) dM_z + \frac{1}{M(\Delta)} \int_{\Delta} w_k(t) dM_t \int_{\Delta} N(z, \zeta) dM_z \,. \tag{14.26}$$

Dalle (14.25) e (14.26) segue la (14.18).

Osserviamo che, costituendo le w_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu_n)$ un sistema fondamentale di autosoluzioni linearmente indipendenti della (14.12) per $\eta = \eta^{(n)}$, tale riesce, per la (14.17), il sistema delle ψ_k ottenute con la (14.19). Basta a tale scopo provare che dall'essere le w_k linearmente indipendenti tali riescono pure le ψ_k. Se le ψ_k fossero linearmente dipendenti esisterebbero delle costanti a_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu_n)$, non tutte nulle, tali che: $\sum_{k=1}^{\nu_n} a_k \psi_k(\zeta) = 0$ q. o. in Δ. Ne seguirebbe: $\sum_{k=1}^{\nu_n} a_k w_k(\zeta) = \sum_{k=1}^{\nu_n} a_k c_k$, con le c_k date dalle (14.18), e cioè l'equazione (14.12) ammetterebbe, per $\eta = \eta^{(n)} \neq 0$, come autosoluzione una costante. Ciò è assurdo.

Dopo quanto si è ora provato, dalle (14.15) segue che condizione necessaria e sufficiente perchè il problema di Neumann in $[\psi]_\lambda$ sia risolubile quando $\lambda = \lambda^{(n)} \neq 0$ è autovalore, è che riesca:

$$\int_{\Gamma} \delta \mu_k d_\zeta \sigma + \int_{\Delta} \varphi \psi_k d_\zeta \tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n) \,. \tag{14.27}$$

Le (14.27) forniscono — tramite il primo teorema di equivalenza — come condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità del problema di Neumann per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda c u$ in $[u]_\lambda$, relativamente all'autovalore $\lambda = \lambda^{(n)} \neq 0$, le seguenti classiche condizioni:

$$\int_{C} g m_k d_z s + \int_{D} f u_k d_z \tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu_n)$$

essendo $[m_k, u_k]$ un sistema fondamentale di autosoluzioni (limitate in D) del problema omogeneo di Neumann in $[u]_\lambda$.

Infine per il primo teorema di equivalenza nel caso $\lambda = 0$, il problema di Neumann in $[u]_0$ ammette soluzione se e solo se riesce:

$$\int_{C} g d_z s + \int_{D} f d_z \tau = 0 \,;$$

in tal caso l'unicità della soluzione in $[u]_0$ è assicurata dal teorema VII.

Il teorema è così completamente acquisito.

Consideriamo le classi $\mathcal{H}(D)$ e $\mathcal{K}(\Delta)$ introdotte a pag. 25 e indichiamo con $\mathcal{H}_2(D)$ e $\mathcal{K}_2(\Delta)$ le classi di funzioni u e ψ che verificano le 1) e 2) relative alle classi $\mathcal{H}(D)$ e $\mathcal{K}(\Delta)$ qualora però nelle 2) al posto di u e ψ si sostituisca, nelle relazioni che ivi intervengono, rispettivamente $|u|^2$ e $|\psi|^2$. Analogamente, considerate le classi $\mathfrak{M}(C)$ ed $\mathfrak{N}(\Gamma)$ introdotte a pag. 10 e 24, indichiamo con $\mathfrak{M}_2(C)$ e $\mathfrak{N}_2(\Gamma)$ le classi di funzioni m e μ che verificano le 1) e 2) relative alle classi $\mathfrak{M}(C)$ e $\mathfrak{N}(\Gamma)$ qualora però nelle 2) al posto di m e μ si sostituisca, nelle relazioni che ivi intervengono, rispettivamente $|m|^2$ e $|\mu|^2$.

Si può ora osservare come nel corso della dimostrazione del teorema precedente si è anche conseguito il seguente risultato.

XXI. *Se esiste una soluzione $[m, u]$ del problema di Neumann in $[u]_\lambda$ per l'operatore $\Delta_2 u - \lambda c u$ con $m \in \mathfrak{L}^{(1)}(C) \cap \mathfrak{M}(C)$ ed $u \in \mathfrak{L}^{(1)}(D) \cap \mathcal{H}(D)$, di conseguenza riesce: $m \in \mathfrak{L}^{(2)}(C) \cap \mathfrak{M}_2(C)$ ed $u \in \mathfrak{L}^{(2)}(D) \cap \mathcal{H}_2(D)$.*

Si verifica infatti facilmente che se ψ è una soluzione della (14.5) appartenente ad $\mathfrak{L}^{(2)}_M(\Delta)$, essa appartiene anche ad $\mathfrak{L}^{(2)}(\Delta) \cap \mathcal{K}_2(\Delta)$ e la corrispondente traccia μ appartiene ad $\mathfrak{L}^{(2)}(\Gamma) \cap \mathfrak{N}_2(\Gamma)$. Di conseguenza allora si verifica che u ed m appartengono rispettivamente ad $\mathfrak{L}^{(2)}(D) \cap \mathcal{H}_2(D)$ ed a $\mathfrak{L}^{(2)}(C) \cap \mathfrak{M}_2(C)$.

APPENDICE I

Oltre alla classe $\{u\}_\lambda$ introdotta nel testo e che consideriamo per $f = 0$ introduciamo la classe $\{u\}'_\lambda$ relativa ai problemi esterni per D, cioè la classe delle funzioni definite nel complementare D' di D e verificanti le (4) [con $f = 0$] dove però a $\Theta(\zeta)$ si sostituisce: $\Theta(\zeta) - 1$. Sia $\mathcal{W}$ la classe delle soluzioni in $D - C$ rappresentate da semplici strati a densità sommabile relativi a $S(z, \zeta)$. Sia $\mathcal{W}'$ l'analoga classe in D'. Allorchè considereremo la (3) e la (4) supporremo sempre $f = 0$. Si verifica che $\mathcal{W} \subset \{u\}_\lambda$, $\mathcal{W}' \subset \{u\}'_\lambda$. Sia $\mathcal{V}'$ il sistema di funzioni, considerato su C, descritto da $S(z, \zeta)$ quando ζ varia in $D - C$. Sussiste il seguente teorema:

Una qualsiasi delle seguenti condizioni implica tutte le rimanenti: a) *la* (3) *implica la* (4) *per* $\zeta \in D'$; b) λ *non è autovalore per il problema di Dirichlet in* $\mathcal{W}'$; c) λ *non è autovalore per il problema di Dirichlet in* $\{u\}'_\lambda$; d) $\mathcal{V}'$ *è completo nello spazio lagrangiano delle funzioni continue su* C; e) $\{u\}_\lambda = \mathcal{W}$.

Porremo

$$W[\zeta;\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_C\varphi(z)S(z,\zeta)d_zs\,;\qquad W_1[\zeta;\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_C\varphi(z)\frac{\partial S(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}d_zs\,;$$

$$W_2[\zeta;\varphi]=\frac{1}{2\pi}\int_C\varphi(z)\frac{\partial S(z,\zeta)}{\partial n_z}d_zs\,.$$

1) d) *implica* b). Se λ fosse autovalore per il problema di Dirichlet in $\mathscr{U}'$, esisterebbe una $\varphi(z)$ tale che: $u(\zeta)=W[\zeta;\varphi]$ sarebbe autosoluzione per tale problema. Consideriamo $W[\zeta;\varphi]$ per $\zeta\in D$. Riesce intanto: $W[\zeta;\varphi]=0$ su C ed inoltre $u^*\equiv W[\zeta;\varphi]\in\{u\}_\lambda$. Quindi: $\Theta(\zeta)u^*(\zeta)=-W[\zeta;u_\nu^*]$ per $\zeta\notin C$. Sarebbe allora, per $\zeta\in D$: $W[\zeta;\varphi+u_\nu^*]=0$ e quindi $\varphi=-u_\nu^*$ per la completezza di $\mathscr{V}$.

2) b) *implica* d). Sia, detta α una misura sui boreliani di C: $\frac{1}{2\pi}\int_C S(z,\zeta)d\alpha_z=W[\zeta;\alpha]=0\,,\ \zeta\in D-C$. Con noto ragionamento (cfr. [11]) si deduce che deve essere: $W[\zeta;\alpha]\equiv W[\zeta;\psi]$ $(\zeta\in D-C)$, con ψ hölderiana su C. La $W[\zeta;\psi]$ è nulla su C e quindi, per l'ipotesi b): $\psi\equiv 0$.

3) a) *implica* b). Infatti, se λ fosse autovalore, esisterebbe g con $W[\zeta;g]$ non identicamente nulla in D' e nulla su C. Sarebbe quindi verificata la (3) (con $m\equiv 0$), ma non la (4) per $\zeta\in D'$, contrariamente all'ipotesi.

4) d) *implica* a). Siano m e g verificanti la (3). Da essa, con iterazioni e facili trasformazioni, si deduce che può porsi: $m(\zeta)=m_0(\zeta)+W[\zeta;\psi]$ con $m_0(\zeta)$ di classe $\mathscr{C}'^{(1,\lambda)}$. Considerata la $u(\zeta)$, per $\zeta\in D-C$, data dalla (4), sostituendo al posto di $m(\zeta)$ l'espressione trovata, dopo semplici trasformazioni si vede che $u\in\mathscr{U}$ e quindi $u\in\{u\}_\lambda$, talchè la u è anche rappresentata dal secondo membro della (4), dove a g si sostituisca u_ν. Ne segue: $W[\zeta;g-u_\nu]=0$ per $\zeta\in D$. Quindi $g\equiv u_\nu$. Da ciò la tesi.

5) c) *implica* b). Ovvio dato che $\{u\}'_\lambda\supset\mathscr{U}'$.

6) a) *implica* c). La a) esprime che ogni u, somma di un doppio strato e di un semplice strato (quindi — in particolare — ogni u di $\{u\}'_\lambda$) nulla su C, è identicamente nulla in D' e quindi λ non è autovalore in $\{u\}'_\lambda$.

7) d) *implica* e). Occorre far vedere che esiste $\varphi\in\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ tale che per ogni u di $\{u\}_\lambda$ riesce: $u(\zeta)=W[\zeta;\varphi]$ $(\zeta\in D-C)$. Consideriamo la equazione:

$$2g(\zeta)=-\varphi(\zeta)+2W_1[\zeta;\varphi]\qquad(\zeta\in C).\tag{I.1}$$

Distinguiamo due casi: α) Il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ ammette il teorema di unicità. L'equazione (I.1) non può avere autosoluzioni, perchè

si contraddirebbe a d), quindi essa ammette una ed una sola soluzione φ che è quella che si ricerca. β) Il problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ non ammette il teorema di unicità. È subito visto [cfr. (4)] che le autosoluzioni u_k del problema di Neumann in $\{u\}_\lambda$ sono tante quante sono le autosoluzioni m_k della equazione: $\pi m_k(\zeta) = 2\pi W_2[\zeta;\ m_k]$ $(k = 1, ..., p)$ e si ha: $u_k(\zeta) = W_2[\zeta;\ m_k]$ $(\zeta \in D - C)$, riuscendo u_k di classe uno in D. Si ha allora l'ortogonalità di g a m_k su C, che implica l'esistenza di una φ soluzione di (I.1). Sia φ_k un'autosoluzione dell'equazione omogenea associata alla (I.1); non può essere: $W[\zeta;\ \varphi_k] = 0$ $(\zeta \in D - C)$ perchè si negherebbe d) e quindi la funzione a primo membro è una u_k. Così si ottengono tutte le u_k. Ponendo: $u(\zeta) = W\left[\zeta;\ \varphi + \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi_k\right]$ si riottengono tutte le u di $\{u\}_\lambda$ tali che $u_\nu = g$..

8) e) *implica* a). Poichè per ogni $\zeta \in D'$, $S(z, \zeta)$ appartiene ad $\{u\}_\lambda$, esiste una $\varphi(z, \zeta)$ tale che:

$$2S_{\nu_z}(z,\ \zeta) = -\ \varphi(z,\ \zeta) + 2W_1[\zeta;\ \varphi]\,, \tag{I.2}$$

$$2S(z,\ \zeta) = 2W[\zeta;\ \varphi]\,. \tag{I.3}$$

La φ è necessariamente hölderiana in z. Moltiplicando la (I.2) per m e la (I.3) per g e sommando membro a membro, si deduce la tesi. Per questo ultimo ragionamento, cfr. [18].

APPENDICE II

Sia v una qualunque funzione della classe $\mathcal{C}(D)$, $G(z,\ \zeta;\ \lambda_0)$ la funzione introdotta nella nota (7); si ha, per ogni ζ in $D - C$:

$$2\pi v(\zeta) = \int_C v(z)\, \frac{\partial G(z,\ \zeta;\ \lambda_0)}{\partial n_z}\, d_z s - \int_C \frac{\partial v}{\partial n_z}\, G(z,\ \zeta;\ \lambda_0) d_z s - \int_D (\Delta_2 v - \lambda_0 v) G(z,\ \zeta;\ \lambda_0) d_z \tau\,, \tag{II.1}$$

e dalla (II.1) facilmente si trae, detta K_1 una opportuna costante positiva, tenendo presenti le ipotesi ammesse su C:

$$\max_D |v| \leq K_1 \left\{ \max_C |v| + \left(\int_C \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D |\Delta_2 v - \lambda_0 v|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{II.2}$$

Inoltre, dalla (II.1), si deduce che per ogni punto t di C si ha:

$$\pi v(t) = \int_C v(z) \frac{\partial G(z, t; \lambda_0)}{\partial n_z} d_z s + h(t) , \tag{II.3}$$

avendo posto

$$h(t) = -\int_C \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} G(z, t; \lambda_0) d_z s - \int_D (\Delta_2 v - \lambda_0 v) G(z, t; \lambda_0) d_z \tau .$$

Poichè $v(t)$ è l'unica soluzione dell'equazione integrale di Fredholm (II.3), essa dipende in modo continuo dal termine noto $h(t)$, si ha cioè:

$$\max_C |v| \leq K_2 \max_C |h| , \tag{II.4}$$

con K_2 costante positiva. Riesce d'altra parte — come facilmente si constata — detta K_3 una costante positiva:

$$\max_C |h| \leq K_3 \left\{ \left(\int_C \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D |\Delta_2 v - \lambda_0 v|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\} . \tag{II.5}$$

Dalle (II.2), (II.4), (II.5) segue la (5) dell'introduzione.

Per dimostrare la (II.4) ci siamo serviti del fatto che la soluzione v di un'equazione di Fredholm dipende in modo continuo dal termine noto. Per acquisire ciò non è necessario servirsi dei risultati classici della teoria delle equazioni integrali, ma — restando nell'ambito della trattazione scelta — il Lettore potrà facilmente constatare che la (II.4) può ottenersi come conseguenza del principio generale enunciato nella nota [6].

APPENDICE III

Per provare la totale continuità della T, facciamo prima vedere che, posto $\psi = \Delta_2 v - \lambda_0 v$ con v appartenente a $\mathcal{C}(D)$ e $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ su C, allorchè ψ varia in un insieme $\mathfrak{J}$ limitato di $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$, $T(\psi)$ descrive un insieme compatto di tale spazio. Si ha: $T(\psi) = v$ e, d'altra parte, per ζ in $D - C$, riesce:

$$2\pi v(\zeta) = \int_C v(z) \frac{\partial G(z, \zeta; \lambda_0)}{\partial n_z} d_z s - \int_D \psi(z) G(z, \zeta; \lambda_0) d_z \tau . \tag{III.1}$$

D'altronde, la $v(t)$ su C è soluzione della (II.3), dove, nel caso attuale, è $h(t) = -\int_D \psi(z) G(z, t; \lambda_0) d_z\tau$. Al variare di ψ in $\mathfrak{I}$, l'insieme descritto da $h(\zeta) = -\int_D \psi(z) G(z, \zeta; \lambda_0) d_z\tau$ è di funzioni equicontinue ed equilimitate in D. Pertanto, la soluzione $v(t)$ della (II.3), che corrisponde al termine noto $h(t)$, descrive un insieme di funzioni compatto nello spazio delle funzioni continue su C. Dalla (III.1) segue che le $v(\zeta)$ costituiscono un insieme di funzioni compatto nello spazio delle funzioni continue in D, e quindi in $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$.

Per completare la dimostrazione della totale continuità di T, tenuto conto che T è continua in $\mathfrak{L}^{(1)}(D)$ [cfr. (5) dell'introduzione] e quindi in $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$, basta solo osservare che la totalità delle ψ ora introdotte descrive una base per $\mathfrak{L}^{(2)}(D)$. In effetti, se ψ è una qualsiasi funzione hölderiana in D, poichè si ha:

$$2\pi\Theta(\zeta) T(\psi) = \int_C \mu(z) \frac{\partial G(z, \zeta; \lambda_0)}{\partial n_z} d_z s - \int_D \psi(z) G(z, \zeta; \lambda_0) d_z\tau$$

e quindi su C:

$$\pi\mu(t) = \int_C \mu(z) \frac{\partial G(z, t; \lambda_0)}{\partial n_z} d_z s - \int_D \psi(z) G(z, t; \lambda_0) d_z\tau ,$$

si traggono, col classico procedimento dell'iterazione, per la $\mu(t)$, proprietà di regolarità tali che assicurano per la $T(\psi)$ l'appartenenza a $\mathcal{C}(D)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. ALBERTONI, *Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - ku = f$.* « Rend. Istituto Lombardo ». Vol. 87, 1954.

[2] S. ALBERTONI, *Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u + ku = f$ in un dominio con punti angolosi.* « Rend. Istituto Lombardo ». Vol. 90, 1956.

[3] L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi.* « Rend. Istituto Lombardo ». Vol. 78, Fasc. I, 1944-45.

[4] L. AMERIO, *Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - ku = 0$.* « Ricerche di Matematica ». Vol. V, 1956.

[5] S. BERGMANN, *The Kernel function and conformal mapping,* « Mathematical Surveys », N. 5.

[6] G. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* « Ann. di Mat. pura ed appl. ». 1948.

[7] G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari.* « Atti del Convegno inter. sulle Eq. alle derivate parziali ». Trieste, agosto 1954, ediz. Cremonese, Roma.

[8] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari.* « Ist. Matem. Univ. Trieste ». Vol. I, 1954.

[9] G. FICHERA, *Sui problemi analitici dell'elasticità piana.* « Rend. Sem. della Fac. di Sc. Univ. Cagliari », 1949.

[10] G. FICHERA, *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari.* « Rend. di Mat. » (1-2). Vol. 17, 1958.

[11] G. FICHERA, *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$. « Giornale di Matematiche » di Battaglini. Vol. 77 (1947).

[12] G. FICHERA, *Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili.* « Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli ». Serie 4ª. Vol. XI, 1940-41.

[13] E. GOURSAT, *Traité d'Analyse.* Tome III Gauthier-Villars, Paris, 1942.

[14] A. HURWITZ e R. COURANT, *Funktionentheorie.* Springer, Berlin.

[15] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer-Verlag, 1955.

[16] M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica.* Vol. II. Ed. Tumminelli.

[17] M. L. PRINCIVALLI, *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche.* « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », Scienze Fis. e Mat. Serie III, Vol. VIII, Fasc. III-IV (1954).

[18] G. PRODI, *Sull'equivalenza tra la seconda formula di Green e la corrispondente equazione di Fredholm per l'equazione* $\Delta_2 u + \lambda u = 0$. « Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova ». Vol. XXIV, 1955.

[19] G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa.* Vol. I. C.E.D.A.M.

[20] J. L. WALSH, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications ». Vol. XX.

[21] A. C. ZAANEN, *Linear Analysis.* North.-Holland Publ. Co., 1956.

INDICE DEI SIMBOLI

INDICE

RELAZIONE

LETTA ED APPROVATA NELL'ADUNANZA DEL 17 GIUGNO 1959
SULLA MEMORIA DI GIUSEPPE BIORCI INTITOLATA

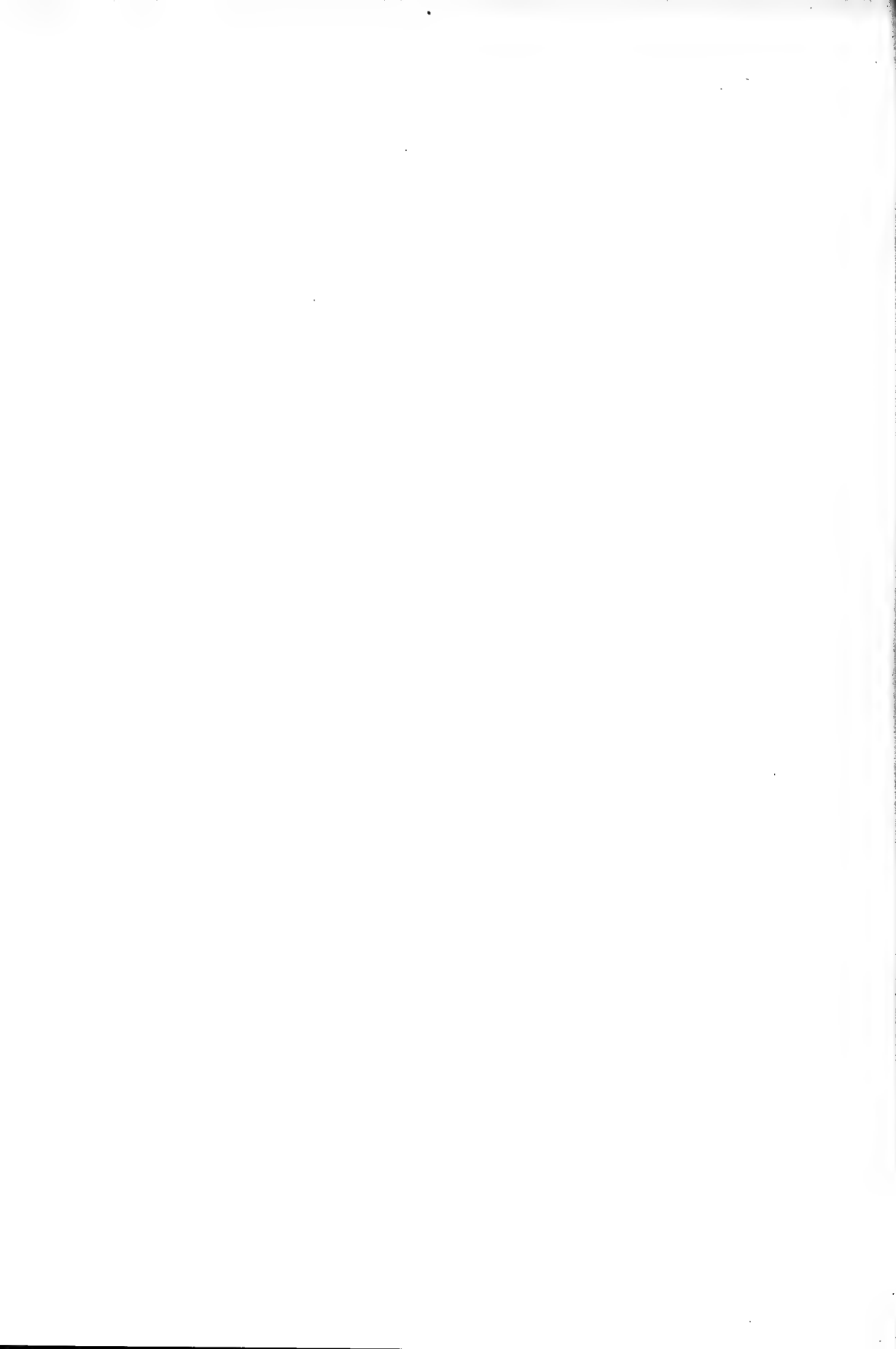
L'ANALISI DELLE RETI CON RADDRIZZATORI

Lo studio delle reti elettriche alimentate da generatori di corrente continua e comprendenti raddrizzatori presenta notevole interesse teorico, in quanto può preludere a ricerche sulle reti non lineari, e interesse pratico perchè di tale tipo sono i simulatori di funzioni delle calcolatrici analogiche. Il primo problema da trattare è evidentemente l'analisi, cioè la determinazione delle correnti e delle tensioni in ogni punto, quando siano noti i componenti della rete e le connessioni.

Riprendendo e ordinando in un quadro sistematico risultati di precedenti lavori, nei quali l'Autore stesso di questa memoria affrontò, per quanto ci risulta, per primo l'argomento, si dimostra prima di tutto che la distribuzione di correnti e tensioni è univocamente determinata (come in una rete normale). Si espone poi un metodo algebrico di analisi, che risulta in generale assai laborioso. Ma il problema può essere affrontato in altro modo, deducendo cioè proprietà generali delle reti con raddrizzatori che consentono una considerevole semplificazione dell'analisi. In particolare, si dimostra che le reti contenenti meno di cinque raddrizzatori si possono risolvere rapidamente ricorrendo a proprietà intuitive e semplici, mentre per le reti con più elevato numero di raddrizzatori viene indicato un metodo di analisi diretto e relativamente semplice, che fa anche uso delle proprietà intuitive prima dimostrate. Viene infine dimostrato che questo metodo comporta solo un piccolo incremento di complessità di calcolo rispetto al calcolo di una rete normale di ugual struttura, purchè il numero di raddrizzatori sia superiore ad una decina.

In sostanza si tratta di un riordinamento di materiale precedentemente sviluppato dallo stesso Autore, unitamente a ulteriori risultati di notevole interesse. La particolarità della trattazione e il suo elevato valore concettuale e pratico consentono di affermare che il lavoro è ben degno di essere accolto nella collana di *Memorie* di questa Accademia.

La Commissione

ANTONIO CARRER
RINALDO SARTORI

L'ANALISI DELLE RETI CON RADDRIZZATORI

Memoria di GIUSEPPE BIORCI
presentata dal Socio corrisp. Rinaldo SARTORI
nell'adunanza del 15 Maggio 1959

Riassunto. — *Dopo aver riassunto le nozioni sull'argomento già note si esamina in dettaglio la rete con quattro raddrizzatori, che può ancora essere risolta con procedimenti intuitivi.*

Si descrive infine il metodo generale di analisi per una rete con un numero qualsiasi di raddrizzatori, e si confronta la complessità dei calcoli necessari per la determinazione dell'assetto dei raddrizzatori con la complessità dei calcoli per l'analisi di una rete normale di ugual struttura.

SCOPO DEL LAVORO

Il problema che si vuole trattare in questo lavoro è l'analisi delle reti a correnti costanti contenenti raddrizzatori ideali, ossia la determinazione delle correnti e delle tensioni in una rete elettrica costitituita da generatori ideali di tensione o di corrente di note forze elettromotrici o correnti impresse, da resistori normali di resistenze note, e da raddrizzatori ideali. Si ammette naturalmente nota anche la configurazione della rete, ossia i collegamenti fra gli elementi che la compongono.

Nella prima parte del lavoro vengono riassunte le conclusioni di precedenti lavori sull'argomento, introducendo varianti, laddove se ne presenti l'opportunità. Tali conclusioni sostanzialmente sono: la prova che la cercata distribuzione di correnti e tensioni (esiste ed) è unica; la dimostrazione che tale distribuzione può ottenersi con metodo algebrico diretto; l'esposizione del metodo stesso; l'enunciazione di teoremi validi per le reti con raddrizzatori e utili per l'analisi; l'esposizione di metodi diretti e rapidi per l'analisi di reti con uno, due, tre raddrizzatori; la numerazione del numero massimo di correnti e tensioni che si debbono determinare in reti normali dedotte dalla rete data, al fine di stabilire quali raddrizzatori sono in conduzione e quali no.

Nella seconda parte si esamina una rete generica con quattro raddrizzatori, e si mostra come anche in questo caso sia possibile pervenire alla soluzione senza ricorrere al metodo algebrico, ma piuttosto servendosi di proprietà della rete stessa. Poichè tale soluzione diretta non appare in stretto rapporto logico con le soluzioni analoghe relative a reti con minor numero di raddrizzatori, si ritiene infruttuosa ogni ulteriore ricerca di metodi diretti per reti contenenti cinque o più raddrizzatori, almeno lungo le direttrici fin qui seguite. Infine, nella terza parte, si espone una procedura per l'analisi di una rete contenente un qualsiasi numero di raddrizzatori la quale può considerarsi come la traduzione del metodo analitico esposto nella prima parte in termini di risoluzione di reti normali, e quindi assai più familiari. Questa procedura fa anche uso dei risultati della parte seconda.

Si valuta poi la complessità dei calcoli che si devono eseguire per determinare la distribuzione delle correnti e delle tensioni in una rete con raddrizzatori, e la si confronta con la complessità relativa alla stessa rete qualora fosse noto in principio quali raddrizzatori sono chiusi e quali sono aperti.

Si conclude che, quando il numero di raddrizzatori è superiore a una diecina, la prima complessità è circa $\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ volte la seconda, essendo k il numero di raddrizzatori. Si è pertanto portati a ritenere che ogni ulteriore indagine atta ad affinare il metodo d'analisi non porterebbe, in concreto, ad apprezzabili vantaggi. Sembra quindi auspicabile indirizzare le eventuali ricerche successive verso lo studio di circuiti anomali riducibili a reti del tipo qui esaminato, considerando che, ove questa riduzione sia eseguita, la successiva analisi è possibile con una procedura di poco più complessa di quella relativa ad una rete normale.

PARTE PRIMA

GENERALITÀ SULLE RETI CON RADDRIZZATORI

1. Riduzione della rete ad un *k*-bipolo.

L'analisi di una rete generica con raddrizzatori sarebbe evidentemente ricondotta all'analisi di una rete normale qualora si sapesse quali raddrizzatori sono in conduzione e quali in interdizione. Basterebbe infatti sostituire i primi con collegamenti di corto circuito, e i secondi con interruzioni, giacchè si considerano raddrizzatori ideali, definiti dalle caratteristiche e dal simbolo di fig. 1 *a*.

L'analisi deve dunque procedere in due fasi successive: dapprima si determina l'assetto dei raddrizzatori, e poi si risolve la rete normale ottenuta dalla data con le sostituzioni dette.

Per la determinazione dell'assetto dei raddrizzatori è conveniente separare la parte normale della rete dai raddrizzatori, considerando questi ultimi come carichi esterni di un k-bipolo normale (k essendo il numero dei raddrizzatori), ottenuto mettendo in evidenza le k coppie di morsetti

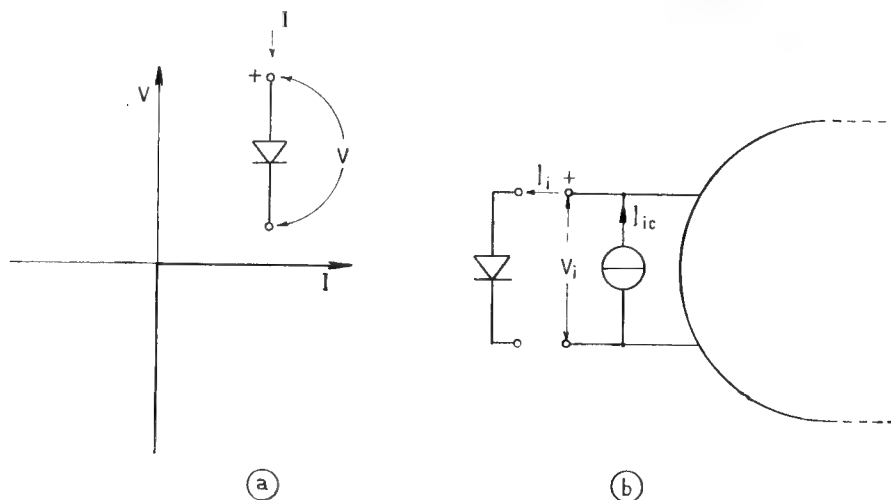



Fig. 1.

a) Caratteristica e simbolo del raddrizzatore ideale.

b) Riduzione della parte normale della rete con raddrizzatori ad un k-bipolo equivalente.

alle quali sono collegati i raddrizzatori, assumendo in ognuna di esse come senso positivo della corrente quello coincidente con il senso di conduzione del corrispondente raddrizzatore, e adottando, per esempio, la convenzione dei generatori ad ogni coppia di morsetti (fig. 1 *b*).

Le equazioni del k-bipolo normale attivo così ottenuto si possono ottenere, nota essendo la configurazione della rete ed i valori degli elementi che la compongono, mediante un qualsiasi procedimento valido per le reti normali, per esempio col metodo delle correnti cicliche. Si perviene allora alle note relazioni

$$I_i = \sum_{1}^{k} {}_j\, G_{ij} V_j + I_{ic} \tag{1}$$

in cui I_i è la corrente ai morsetti i, V_j la tensione ai morsetti j, G_{ij} la conduttanza mutua fra le coppie di morsetti i ed j (o la conduttanza propria se gli indici sono uguali), ed I_{ic} è la corrente di corto circuito ai morsetti

i. Con le convenzioni di segno adottate le conduttanze proprie risultano tutte negative.

A questo punto, se fosse noto l'assetto dei raddrizzatori, si dovrebbe porre $I = 0$ ai morsetti corrispondenti a raddrizzatori in interdizione, e $V = 0$ a quelli corrispondenti a raddrizzatori in conduzione, e quindi risolvere il sistema (1). Infine si dovrebbe completare l'analisi determinando le correnti e le tensioni in tutti gli altri punti della rete.

Si può notare che, qualora l'assetto dei raddrizzatori fosse noto fin dal principio, l'analisi della rete fatta passando attraverso il sistema (1) equivarrebbe ad ogni altro metodo di risoluzione. Infatti il sistema (1), in una rete normale, si può considerare come il sistema più generale della rete (con $2l$ equazioni, se l è il numero di lati della rete), ridotto per eliminazione di $(2l - k)$ incognite. Con questa precisazione si vuole mettere in evidenza, soprattutto in relazione alla terza parte di questo lavoro, che la difficoltà presentata dall'analisi di una rete con raddrizzatori, e assente nell'analisi di una rete normale, è soltanto la scelta delle I e delle V da porre uguali a zero nel sistema (1), mentre tutti gli altri calcoli, compresa la deduzione del sistema (1), sono comuni alla rete con raddrizzatori e a quella normale di ugual numero di lati.

Il problema è dunque ora ridotto a stabilire quali correnti e quali tensioni debbano essere poste uguali a zero nel sistema (1). La scelta deve essere fatta, in base alle convenzioni di segno adottate, in modo che, a quei morsetti ove si è posto $I = 0$ (raddrizzatori in interdizione) risulti V negativo, e a quelli ove si è posto $V = 0$ (raddrizzatori in conduzione) risulti I positivo.

Ci si può intanto chiedere se questa scelta si può fare in un modo solo, oppure no: questo aspetto del problema verrà esaminato nel prossimo paragrafo.

Si può poi pensare di risolvere il problema per tentativi, ossia prendere a caso una possibile scelta di $I = 0$ e $V = 0$ (ossia una possibile scelta di raddrizzatori in conduzione ed in interdizione), risolvere in corrispondenza ad essa il sistema (1), e vedere se le condizioni prima dette sul segno delle correnti e tensioni che risolvono il sistema sono soddisfatte oppure no. Nel caso in cui non lo fossero, si prova ancora con una diversa scelta di correnti e tensioni nulle, fino a trovare la soluzione esatta.

La risoluzione diretta, cioè senza tentativi, verrà trattata in successivi paragrafi.

2. Unicità della soluzione.

Il problema della unicità della soluzione, accennato al paragrafo precedente, è stato ampiamente discusso in precedenti lavori (vedi Biblio-

grafia n. 1 e n. 3). Qui si vuole presentare una proprietà delle reti con raddrizzatori che può essere messa in relazione alla unicità. Essa sostanzialmente stabilisce che l'assetto di un raddrizzatore della rete è unico, quando tutti gli altri sono già inseriti nella rete.

Si consideri allora la rete con $(k - 1)$ raddrizzatori e si mettano in evidenza i morsetti ai quali deve essere collegato, in un certo modo, l'ultimo raddrizzatore. Con questi morsetti aperti si avrà una tensione fra di essi di un certo segno. Si può far vedere che, chiudendo i morsetti in corto circuito, la corrente ha lo stesso segno della tensione a vuoto. Inserendo intanto a quei morsetti una resistenza molto elevata, la corrente in essa ha il segno della tensione a vuoto. Infatti a morsetti aperti la rete è equivalente ad un generatore di f.e.m. E_0 e resistenza interna R_0, e, se la resistenza esterna è così elevata che nessun raddrizzatore subisca variazione d'assetto (da interdizione a conduzione o viceversa), l'equivalenza vale anche con la resistenza esterna inserita. Se ora si riduce la resistenza del carico, ad un certo punto, ossia per un certo valore R_1 della resistenza esterna e un corrispondente valore I_1 di corrente, un raddrizzatore della rete cambierà assetto, senza che ciò induca variazioni in I_1, giacchè il cambiamento di assetto, in quel raddrizzatore, avviene a corrente e tensione nulle.

La rete equivarrà ora ad un nuovo generatore di f.e.m. E_0' e resistenza interna R_0' diverse dalle precedenti, ma tali da produrre ancora in R_1 la stessa corrente I_1. E ciò evidentemente implica che E_0' abbia lo stesso segno di E_0. Riducendo la resistenza esterna fino a zero, si passerà attraverso una successione di generatori equivalenti di f.e.m. E_0'', E_0''' ecc., tutte dello stesso segno. Quindi la corrente nel resistore esterno ha sempre lo stesso segno, che è il segno di E_0. Perciò l'inserzione del raddrizzatore k-esimo non dà luogo ad ambiguità, ossia non può indurre oscillazioni di tensione e di corrente nè nel raddrizzatore stesso, nè in altri punti della rete. Con riferimento al sistema (1) l'unicità dell'assetto, per la cui dimostrazione si rimanda soprattutto al lavoro citato in Bibliografia n. 3, può essere espressa dicendo che esiste una sola scelta di correnti e tensioni nulle che rende positive le restanti correnti e negative le restanti tensioni.

Per inciso si può osservare che, in base alle considerazioni svolte, la caratteristica di una rete con raddrizzatori a due suoi morsetti qualunque, ove si adotti la convenzione di segno dei generatori, è analoga a quella di una rete normale, poichè ha tensione a vuoto e corrente di corto circuito dello stesso segno. Le due caratteristiche differiscono solo nel fatto che, mentre quella della rete normale è rettilinea, quella della rete con raddrizzatori è costituita da una spezzata.

3. Metodo algebrico diretto per la determinazione dell'assetto dei raddrizzatori di una rete generica.

In questo paragrafo si vuole illustrare un metodo algebrico per la determinazione dell'assetto dei raddrizzatori della rete, ossia per stabilire quali correnti e quali tensioni si debbano porre uguali a zero nel sistema (1). Il metodo è stato illustrato in dettaglio in precedenti lavori (vedi Bibliografia n. 1 e n. 2) e quindi viene qui presentato essenzialmente come prova di possibilità di risoluzione diretta. E ciò tenuto anche conto che, dal punto di vista pratico, è assai più conveniente e facile ricorrere a metodi più rapidi, in cui la successione delle operazioni da eseguirsi, anzichè essere indicata con complesse notazioni algebriche, procede secondo uno schema logico semplice. Di questi metodi si parlerà nel seguito.

Si assegni ad ogni raddrizzatore un parametro $\varepsilon_{i,n}$, uguale a $+1$ se il raddrizzatore è in conduzione, uguale a -1 se è in interdizione. Il primo pedice (i) di ε indica di quale raddrizzatore si tratta, mentre il secondo (n) indica il numero totale di raddrizzatori della rete.

Si procede ora per induzione. Si ammetta cioè che sia possibile determinare i valori delle $\varepsilon_{i,k-1}$ con metodo algebrico. È allora possibile determinare i valori delle ε_{ik}, ossia l'assetto dei raddrizzatori di una rete che ne contenga k. Infatti nel sistema (1) relativo alla rete con k radrrizzatori si ponga $V_k = 0$ ossia si considerino in corto circuito i morsetti k-esimi del k-bipolo corrispondente, e si prendano in esame le prime $(k-1)$ equazioni del sistema. Queste sono identiche alle equazioni relative ad una rete con $(k-1)$ raddrizzatori, e quindi per ipotesi si sanno determinare le $\varepsilon_{i,k-1}$ corrispondenti.

Determinate allora le $\varepsilon_{i,k-1}$ si calcoli, attraverso il sistema (1), la corrente ai morsetti k chiusi in corto circuito, $(V_k = 0)$, dopo aver posto $V_i = 0$ se $\varepsilon_{i,k-1} = 1$ e $I_j = 0$ se $\varepsilon_{j,k-1} = -1$. Si può allora vedere facilmente che

$$\varepsilon_{k,k} = \frac{I_k(\varepsilon_{1,k-1}, \varepsilon_{2,k-1}, \dots \varepsilon_{k-1,k-1})}{|I_k(\varepsilon_{1,k-1}, \varepsilon_{2,k-1}, \dots \varepsilon_{k-1,k-1})|} \tag{2}$$

in cui I_k è la corrente ai morsetti k nelle condizioni dette, ossia tenuto conto dei valori delle $\varepsilon_{i,k-1}$.

Infatti se I_k è positiva, $\varepsilon_{k,k}$ è uguale ad uno, e ciò è corretto, poichè, essendo i primi $(k-1)$ raddrizzatori in assetto coerente (ossia in conduzione quelli percorsi da corrente positiva e in interdizione quelli soggetti a tensione negativa), lo è anche il k-esimo, considerato in conduzione,

cioè equivalente al corto circuito supposto. Perciò, se I_k è positivo, $\varepsilon_{k,k} = + 1$, ed inoltre

$$\varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{i,k-1} \tag{3}$$

e quindi il problema della determinazione delle $\varepsilon_{i,k}$ è intieramente risolto.

Se invece I_k è negativo, in base alla (2) $\varepsilon_{k,k}$ risulta uguale a $- 1$, e ciò è corretto, perchè il raddrizzatore k-esimo non può essere in conduzione, perchè sarebbe percorso da corrente negativa, e quindi è senz'altro in interdizione.

È dunque provato che è possibile determinare, mediante la (2), il valore di $\varepsilon_{k,k}$. Se questo è positivo, si conoscono anche tutti gli altri $\varepsilon_{i,k}$; se è negativo basta porre $I_k = 0$ nell'ultima equazione del sistema (1) e poi eliminare V_k fra le k equazioni. In tal modo il problema è ricondotto alla risoluzione di un sistema analogo al sistema (1) ma con $(k - 1)$ equazioni, per il quale, per ipotesi, si sanno determinare le ε. Basta ora provare che per $k = 1$ la soluzione è possibile. A parte considerazioni intuitive che verranno svolte in successivi paragrafi, si può osservare che, per $k = 1$, il sistema (1) si riduce a

$$I_1 = G_{11} V_1 + I_{1_e}$$

in cui G_{11} è negativo. È immediato riconoscere che, se è $I_1 = 0$ si ha $V_1 = - I_{1_e}/G_{11}$ che ha il segno di I_{1_e}, mentre se è $V_1 = 0$ si ha $I_1 = I_{1_e}$ che ancora ha il segno di I_{1_e}. In ogni caso, dunque

$$\varepsilon_{11} = I_{1_e}/|I_{1_e}| \, .$$

È quindi provato che, se il problema è risolubile algebricamente per $n = k - 1$ lo è anche per $n = k$; inoltre è nota la soluzione per $k = 1$.

Pertanto si può concludere che la determinazione della distribuzione delle correnti e delle tensioni in una rete con raddrizzatori è possibile per via algebrica. In base a quanto si è esposto in questo paragrafo sarebbe anche possibile definire in dettaglio il metodo. Tuttavia, come si è accennato sopra, è preferibile procedere in modo diverso, come verrà mostrato nel seguito.

4. Alcuni teoremi sulle reti con raddrizzatori.

Con considerazioni intuitive e semplici deduzioni logiche si possono stabilire alcune proprietà delle reti con raddrizzatori, che facilitano l'analisi di tali reti, e sono premessa indispensabile per la comprensione delle

successive parti di questo lavoro. Queste proprietà sono dimostrate in altro lavoro (vedi Bibliografia n. 5), e quindi ci si limita qui ad enunciarle, al più con qualche parola di commento. Si ritiene invece utile richiamare alcune premesse e definizioni che snelliscono gli enunciati dei teoremi, ed alle quali ci si atterrà anche nelle successive parti di questo lavoro. Nel k-bipolo equivalente alla rete data, che ha i k raddrizzatori come carichi esterni, si sostituiscano questi ultimi con interruttori ideali e se ne contrassegnino i morsetti in modo che, ad ogni coppia, il morsetto $+$ dell'interruttore coincida col morsetto $+$ di quella coppia. Si adotti infine per ogni interruttore la convenzione degli utilizzatori. Per assetto di un interrutore si intenderà l'essere aperto o chiuso. L'assetto di un interruttore, o anche l'interruttore, si dirà « coerente » se, essendo l'interruttore chiuso, esso è percorso da corrente positiva, o se, essendo aperto, è soggetto a tensione negativa. La stessa dizione si estenderà anche ad un gruppo di interruttori, tutti in assetto coerente, mentre l'assetto in cui tutti i k interruttori sono coerenti si dirà anche « finale ».

I teoremi che ora verranno enunciati sono designati con le stesse lettere del lavoro citato in Bibliografia n. 5.

Teorema b. Si dispongano i k interruttori in un assetto arbitrario (p chiusi e $k - p$ aperti) e si calcolino le correnti o tensioni ai morsetti. Si troverà che m interruttori sono i assetto coerente e $k - m$ in assetto non coerente. Si ha allora che almeno uno dei $k - m$ interruttori non coerenti ha, nell'assetto finale, assetto opposto a quello fissato.

Teorema c. Se le correnti di corto circuito del k-bipolo sono tutte positive, nell'assetto finale tutti gli interruttori sono chiusi.

Corollario d. Se le correnti di corto circuito del k-bipolo sono tutte positive salvo una (l'n-esima), nell'assetto finale l'interruttore n è aperto.

Corollario e. Se alcune correnti di corto circuito sono positive, e le altre negative, almeno uno degli interruttori con corrente di corto circuito negativa è aperto nell'assetto finale.

Teorema f. Si supponga di trovare un assetto del k-bipolo nel quale $k - 1$ interruttori sono coerenti e il rimanente è chiuso (aperto). Quell'interruttore, nell'assetto finale, è chiuso o aperto a seconda che la sua corrente (tensione) nell'assetto fissato, è positiva o negativa.

I teoremi e corollari enunciati, eccetto il b e l'f, sono trasformabili per dualità, sostituendo « tensione a vuoto » a « corrente di corto circuito », « negativo » a « positivo » e « aperto » a « chiuso » (e viceversa).

5. Reti con uno, due o tre raddrizzatori.

Si esporranno ora metodi rapidi per determinare l'assetto dei raddrizzatori di una rete che ne contenga 1, 2 o 3. Essi consistono nel risolvere una o più volte il k-bipolo con gli interruttori disposti in assetti opportuni. Si dirà allora « prova » l'esame del k-bipolo con un certo assetto di interruttori (alcuni chiusi e gli altri aperti) e « rilievo » la determinazione di una tensione o una corrente ad una coppia di morsetti, entro una certa prova. Queste definizioni verranno adottate anche nelle successive parti del lavoro. Si intende ancora che anche le proposizioni che descrivono i metodi di risoluzione sono trasformabili per dualità, con le solite regole.

a) Rete con un solo raddrizzatore. Si chiuda l'interruttore e si determini la corrente di corto circuito in esso. Se questa è positiva, l'assetto scelto è coerente, se è negativa, l'interruttore non può essere chiuso, quindi è aperto.

b) Rete con due raddrizzatori. Si eseguisca la prova di corto circuito. Se le correnti di corto circuito sono entrambe positive, gli interruttori sono entrambi chiusi (teorema c). Se una delle due correnti è positiva e l'altra negativa, l'interruttore con corrente negativa è aperto nell'assetto finale (corollario d). L'assetto dell'altro interruttore si determina col metodo valido per la rete con un solo raddrizzatore. Se infine le correnti di corto circuito sono entrambe negative, si potrebbe mostrare (vedi Bibliografia n. 5, pag. 533) che l'interruttore che ha la minor corrente di corto circuito è aperto nell'assetto finale. Per l'altro interruttore si procede come per la rete con un solo raddrizzatore.

In definitiva, per la rete con un raddrizzatore occore una prova con un rilievo, per la rete con due raddrizzatori due prove con tre rilievi.

c) Rete con tre raddrizzatori. Anche per la soluzione della rete con tre raddrizzatori si fa uso dei teoremi enunciati e di semplici proprietà dei tripli-bipoli normali attivi. Ci si limita quindi ad enunciare i risultati, rinviando, per le dimostrazioni, al lavoro più volte citato (Bibliografia n. 5). Si eseguisca per prima cosa la prova in corto circuito. Se le correnti di corto circuito sono tutte positive, i tre interruttori sono chiusi nell'assetto finale.

Se una, o due correnti di corto circuito sono negative, l'interruttore cui compete la minor corrente di corto circuito è aperto nell'assetto finale. Per determinare l'assetto degli altri due si procede con il metodo suggerito per le reti con due raddrizzatori.

Se infine le correnti di corto circuito sono tutte negative, si effettua la prova a vuoto, rilevando la tensione a vuoto solo ai morsetti cui non compete la minor corrente di corto circuito. Se tali tensioni sono entrambe

negative, i due interruttori corrispondenti sono aperti nell'assetto finale, mentre il rimante è chiuso.

Se invece almeno una delle tensioni determinate è positiva, l'interruttore cui compete la maggior tensione è chiuso nell'assetto finale, mentre l'interruttore di cui non si è misurata la tensione a vuoto è aperto. Per determinare l'assetto del restante interruttore si procede come si è detto per le reti con un solo raddrizzatore.

In conclusione, l'assetto dei tre raddrizzatori si può determinare con tre prove (al più) e sei rilievi (al più).

6. Numero massimo di rilievi per una rete con k raddrizzatori.

Il problema della determinazione del numero massimo di rilievi che si debbono effettuare per determinare l'assetto dei k raddrizzatori di una rete rientra in quello più vasto dell'esposizione di un metodo generale di analisi e della valutazione della complessità dei calcoli che esso richiede.

Questi argomenti saranno trattati nella terza parte del lavoro, tuttavia si può qui richiamare brevemente quanto era stato già detto sull'argomento (vedi Bibliografia n. 4).

Si può intanto enunciare il seguente teorema: Il numero massimo di rilievi di tensioni e correnti, che occorre eseguire per determinare l'assetto, di conduzione o di interdizione, dei k raddrizzatori ideali di una rete è $2^k - 1$.

La dimostrazione procede per induzione: ricorrendo al teorema f prima enunciato si dimostra che se il teorema vale per $k = n$ esso vale anche per $k = n + 1$. D'altra parte il teorema è valido per $k = 1$, come è stato provato al paragrafo 5, capoverso *a*), e quindi esso vale per k qualsiasi (per dettagli della dimostrazione vedi Bibliografia n. 4).

Per $k = 3$ la proprietà ora enunciata prevederebbe un numero di rilievi uguale a 7. È stato però mostrato (vedi paragrafo 5) che, utilizzando proprietà dei tripli-bipoli, si può arrivare alla determinazione dell'assetto con 6 rilievi. Questo consente di ridurre anche il numero massimo di rilievi necessari per una rete con k raddrizzatori.

Più in generale, si supponga di conoscere un metodo per determinare l'assetto dei raddrizzatori di una rete che ne contiene n mediante p rilievi, essendo naturalmente p minore di $2^n - 1$. Allora il numero massimo di rilievi da prevedere per una rete con più di n raddrizzatori è

$$\frac{p+1}{2^n} 2^k - 1 \qquad (k \geq n) . \tag{4}$$

La dimostrazione di questa proprietà è riportata nel lavoro citato (Bibliografia n. 4).

Tornando al risultato già noto, che per $n = 3$ si ha $p = 6$, il numero massimo di rilievi, per k maggiore di (o uguale a) tre, diventa allora

$$\frac{7}{8} 2^k - 1 \qquad (k \geq 3).$$

Nella parte seconda di questo lavoro e nell'Appendice si dimostra che la rete con quattro raddrizzatori può essere risolta con 12 rilievi anzichè con 13, come prescriverebbe la formula ora scritta. L'uso della (4) con $n = 4$, $p = 12$ fornisce allora, come numero massimo di rilievi:

$$\frac{13}{16} 2^k - 1 \qquad (k \geq 4).$$

Come si è detto, la questione verrà ampiamente ripresa nella parte terza.

PARTE SECONDA

ANALISI DI UNA RETE GENERICA CONTENENTE QUATTRO RADDRIZZATORI

1. Generalità e casi semplici.

Nella trattazione che segue si adotterà la stessa terminologia e gli stessi simboli usati negli ultimi paragrafi della prima parte. Quindi si farà senz'altro riferimento al quadruplo-bipolo attivo normale ottenuto isolando alle quattro coppie di morsetti i raddrizzatori, che si intenderanno sostituiti da interruttori chiusi o aperti. Le convenzioni di segno saranno le solite, cioè ad ogni coppia di morsetti del quadruplo-bipolo si adotterà la convenzione dei generatori, scegliendo il morsetto + in modo che la corrente positiva proceda, all'esterno, nel senso di conduzione del corrispondente raddrizzatore.

Sembra opportuno eseguire due prove preliminari complete: la prova in corto circuito e la prova a vuoto. A seconda del risultato di queste prove si contrassegnino le coppie di morsetti (per comodità) con due distinte notazioni, in modo che risulti:

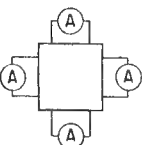
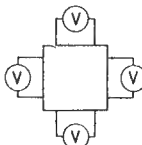
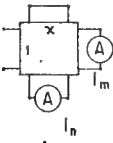
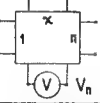
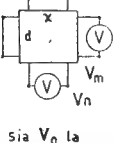
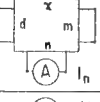
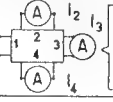
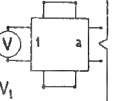
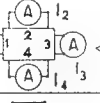
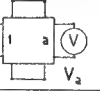
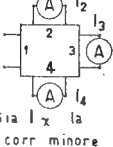
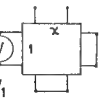
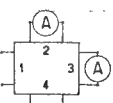
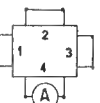
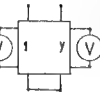
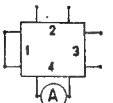
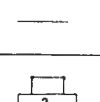
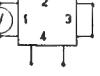
$$I_{1c} < I_{2c} < I_{3c} < I_{4c}\,; \qquad V_{a_0} < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{d_0}$$

essendo I_{ic} la corrente di corto circuito ai morsetti i, e V_{j0} la tensione a vuoto ai morsetti j.

Si esaminino ora i diversi casi che possono presentarsi, facendo riferimento alle correnti di corto circuito, e trasformando poi i risultati per dualità.

Caso I. Sia $I_{1_c} > 0$, ossia tutte le correnti di corto circuito siano positive. Allora, in base al teorema c, gli interruttori sono tutti chiusi, qualunque sia il risultato della prova a vuoto. Dualmente, se tutte le tensioni a vuoto sono negative, gli interruttori sono tutti aperti, qualunque sia il risultato della prova in corto circuito.

Il caso I è dunque risolto da 2 prove con 8 rilievi.

Caso II. Sia $I_{1_c} < 0$, e positive le altre correnti di corto circuito. In base al corollario d, l'interruttore 1 è aperto. Delle altre tre coppie di morsetti si conoscono, dalla prova a vuoto, le tensioni a vuoto, essendo l'interruttore 1 aperto. Quindi il triplo-bipolo 2, 3, 4 può essere trattato come una rete a tre raddrizzatori, note essendo le tensioni a vuoto. Sono allora sufficienti, in base al paragrafo 5 della Parte I, altre due prove con tre rilievi per determinare l'assetto finale di tutti i raddrizzatori, qualunque sia il risultato della prova a vuoto. Quindi questo caso è risolto da 4 prove con 11 rilievi. Dualmente, se V_{d_0} è positiva e le altre tensioni a vuoto negative, l'interruttore *d* è chiuso, e l'assetto finale degli altri tre interruttori si determina come indicato al paragrafo 5 della Parte I, con altre due prove e 3 rilievi.

Restano da esaminare i casi in cui almeno due correnti di corto circuito siano negative e almeno due tensioni a vuoto positive. I metodi di risoluzione sono in ogni caso basati sulla ricerca del massimo d'informazione, che può trarsi da una prova, e sull'esclusione dei rilievi non strettamente necessari. Purtroppo i ragionamenti che conducono alla soluzione sono assai laboriosi e di pesante lettura. I risultati, invece si possono esprimere in termini molto semplici. Si è allora pensato di trattare in dettaglio, a titolo di esempio, un solo caso nel paragrafo successivo, e di raccogliere in appendice le deduzioni per gli altri casi. I risultati sono invece esposti nella tabella I.

2. Caso in cui due correnti di corto circuito siano negative.

Se, nell'assetto coerente del quadruplo-bipolo, uno qualsiasi degli interruttori 2, 3, 4 risultasse chiuso, per il triplo-bipolo ottenuto chiudendo quell'interruttore e poi ignorandolo, la corrente di corto circuito I_{1_c} sarebbe la più piccola delle tre, ed inoltre almeno una delle altre due correnti di corto circuito (la I_{3_c} o la I_{4_c}) sarebbe positiva. Allora, in base alle conclusioni del paragrafo 5 della Parte I, l'interruttore 1 sarebbe

TABELLA I.

Rete con 4 raddrizzatori (i casi duali si risolvono con procedura duale di quella indicata).

PROVA 1	PROVA 2	RISULTATI PROVE 1 e 2			PROVA 3	RISULTATO PROVA 3	PROVA 4	RISULTATO PROVA 4	ASSETTO FINALE
A A A A	V V V V	$I_{1c} > 0$	Prova 2 qualunque		—	—	—	—	1 2 3 4
		$I_{1c}<0<I_{2c}$	Prova 2 qualunque	$V_{x0}<0$ (sia V_{x0} la maggiore di V_{20}, V_{30}, V_{40})	—	—	—	—	1 2 3 4
		$I_{2c}<0$, $0<I_{3c}$	$V_{d0}<0$	$V_{x0}>0$	1 x; A I_m; A I_n; sia I_m la corrente maggiore	$I_m < 0$	x 1 n; V V_n	$V_n > 0$	1 x n m
			$V_{d0} > 0$, $d = 1$					$V_n < 0$	1 x n m
		$I_{3c}<0$, $0 < I_{4c}$	$V_{a0}<0<V_{b0}$, $d=2-d=3$			$I_m > 0$	A I_x; x 1 m n	$I_x > 0$	1 2 3 4
			$V_{a0}<0<V_{b0}$, $d = 1$					$I_x < 0$	x n m
			$V_{a0}<0<V_{b0}$, $d = 1$	caso impossibile	—	—	—	—	—
			$V_{a0}<0<V_{b0}$, $a \neq 1$	$I_{xc}>0$ (sia I_{xc} la minore di I_{ac}, I_{bc}, I_{cc})	—	—	—	—	1 2 3 4
				$I_{xc}<0$	d x; V; V V_m V_n; sia V_n la tensione maggiore	$V_m > 0$	x d m n; A I_n	$I_n > 0$	d x m n
								$I_n < 0$	d x m n
						$V_m < 0$	V V_x; x d m n	$V_x > 0$	d x m n
								$V_x < 0$	d x n m
		$I_{2c}<0$, $0<I_{3c}$	$V_{b0}<0 < V_{c0}< V_{10}$		A I_2 I_3; 1 2 3 4; A; A I_4	$I_2, I_3, I_4>0$	—	—	1 2 3 4
						Almeno una corrente <0	—	—	1 2 3 4
Dopo la prova si contrassegni-no i morsetti in modo che sia: $I_{1c} < I_{2c} <I_{3c}<I_{4c}$	Dopo la prova si contrassegnino i morsetti in modo che sia: $V_{a0} <V_{b0} < V_{c0} < V_{d0}$		$V_{a0}<0 < V_{b0} < V_{c0}< V_{10}$		V 1 a; V_1	$V_1 > 0$	A I_2; 1 2 3 4 A; A I_4 I_3	Almeno una corrente <0	1 2 3 4
								$I_2, I_3, I_4 >0$	1 2 3 4
						$V_1 < 0$	1 a V; V_a	$V_a < 0$	1 a
								$V_a > 0$	1 2 3 4
			$0 < V_{a0} <V_{b0} <V_{c0} < V_{10}$		A I_2 I_3; 1 2 3 4; A; A I_4; sia I_x la corr minore	$I_2, I_3, I_4 > 0$	—	—	—
						Almeno una corrente < 0	V 1 x; V_1	$V_1 < 0$	1 x
								$V_1 > 0$	1 2 3 4
		$I_{3c}<0$, $0 <I_{4c}$	$V_{10}< 0 < V_{b0} < V_{c0} <V_{40}$		A; 1 2 3 4; A; sia I_x la corrente min. I_y l'altra	$I_2, I_3>0$	1 2 3 4; A	$I_4 > 0$	1 2 3 4
								$I_4 < 0$	1 2 3 4
			$V_{a0} > 0$, $a = 4$			Almeno una delle correnti I_2, I_3 negativa	V 1 y V	$V_1, V_y <0$	4
								Almeno una delle tens. V_1, V_y positiva e $V_1 >V_y$	1 2 3 4
								Almeno una delle tens. V_1, V_y positiva e $V_1< V_y$	1 x
			$V_{a0} > 0$, $a = 1$		1 2 3 4; A	$I_4 > 0$	—	—	1 2 3 4
						$I_4 < 0$	V 1 2 3 4	$V_1 > 0$	1 2 3 4
								$V_1 < 0$	1 2 3 4

aperto nell'assetto finale. Quindi, nell'assetto coerente finale del quadruplo-bipolo, l'interruttore 1 può essere chiuso solo se tutti gli altri tre sono aperti.

Si vuol ora provare che questa eventualità può verificarsi solo se $d = 1$ ed inoltre V_{d_0} è positiva. Infatti, se V_{1_0} è negativa, la chiusura del solo interruttore 1 fa circolare in esso corrente negativa, e dà quindi luogo ad un assetto non coerente. Se poi V_{1_0} è positiva, ma i morsetti 1 non coincidono con i morsetti d, la chiusura del solo interruttore 1 lascia, ai morsetti d, tensione positiva, e quindi ancora dà luogo ad un assetto non coerente. È quindi provato l'asserto.

Dunque: se I_{1c} e I_{2c} sono negative, I_{3c} e I_{4c} positive e inoltre non sono verificate le condizioni

$$V_{d_0} = V_{1_0} > 0$$

l'interruttore 1 è senz'altro aperto, e si può procedere come nel caso II.

Sia allora $d = 1$. Conviene trattare separatamente i tre casi possibili, non ancora contemplati, e cioè:

$$\alpha)\ V_{a_0} < V_{b_0} < 0\,; \qquad V_{1_0} > V_{c_0} > 0$$

$$\beta)\ V_{a_0} < 0\,; \qquad V_{1_0} > V_{c_0} > V_{b_0} > 0$$

$$\gamma)\ V_{1_0} > V_{b_0} > V_{c_0} > V_{a_0} > 0\,.$$

Nel caso α), con ragionamenti duali di quelli prima svolti, si riconosce che l'interruttore 1 può essere aperto solo se gli altri tre sono chiusi. Sono allora possibili due soli assetti: o l'interruttore 1 è chiuso, e allora gli altri tre sono aperti, o esso è aperto e gli altri tre chiusi. Basta allora fare la terza prova, per esempio, con l'interruttore 1 aperto e gli altri tre chiusi, e rilevare le correnti negli interruttori chiusi. Se queste sono positive, giacchè la tensione ai morsetti 1 è certamente negativa, l'assetto è coerente, altrimenti lo è l'altro possibile. Questo caso è dunque risolto da tre prove con 11 rilievi.

Il caso β) e tutti i successivi, sono trattati in dettaglio in appendice. I risultati sono riassunti simbolicamente nella tabella I.

3. Una proprietà dei tripli-bipoli attivi normali.

Nel corso delle deduzioni relative alla rete con quattro raddrizzatori, riportate in gran parte in appendice, si fa spesso ricorso ad una proprietà dei tripli-bipoli attivi normali, che può essere utile dimostrare per esteso, in forma generale.

Tale proprietà stabilisce che, se le correnti di corto circuito di un triplo-bipolo hanno tutte lo stesso segno, se si aprono le due coppie di

morsetti sede delle due correnti di corto circuito minori in modulo, la corrente ai morsetti chiusi può assumere segno opposto alla corrente di corto circuito solo se le tensioni ai morsetti aperti conservano il segno delle correnti di corto circuito. Vale, naturalmente, anche la proprietà duale, relativa alle tensioni a vuoto.

Per dimostrare la proprietà, si consideri un triplo-bipolo il cui comportamento sia retto dalle equazioni:

$$I_i = G_{i1}V_1 + G_{i2}V_2 + G_{i3}V_3 + I_{ic} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

e sia inoltre $I_{1c} < I_{2c} < I_{3c} < 0$.

Se si aprono i morsetti 3, essendo gli altri chiusi in corto circuito, la variazione di corrente ai morsetti 2 non può ovviamente essere maggiore, in modulo, a I_{3c}, quindi la corrente ai morsetti 2 resta negativa. Se allora si aprono anche i morsetti 2, la tensione ai capi di essi è certamente negativa. Resta allora da provare che in queste condizioni, cioè con i morsetti 1 chiusi in corto circuito e gli altri aperti, se la corrente ai morsetti 1 è positiva la tensione ai morsetti 3 è negativa.

Risolvendo il sistema (5) ove si sia posto $V_1 = I_2 = I_3 = 0$ si ottiene facilmente:

$$\begin{cases} I_1 = I_{1c} + I_{2c}\dfrac{G_{13}G_{32} - G_{12}G_{33}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2} + I_{3c}\dfrac{G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2} \\ V_3 = \dfrac{G_{32}I_{2c} - G_{22}I_{3c}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2} \\ V_2 = \dfrac{G_{23}I_{3c} - G_{33}I_{2c}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2} . \end{cases} \tag{6}$$

Ora è ovvio che V_2 è in ogni caso negativa, poichè il denominatore è positivo, ed inoltre $|G_{33}| > |G_{23}|$; $|I_{2c}| > |I_{3c}|$.

La tensione V_3 non può essere positiva se G_{23} è positiva. Se invece G_{23} è negativa, V_3 diventa positiva se

$$I_{3c} > I_{2c}\frac{G_{23}}{G_{22}}$$

giacchè G_{22} è negativa (vedi figura 1 *b*).

Si consideri ora la prima delle (6). In essa, il 2º termine della somma a secondo membro rappresenta la corrente che si ha ai morsetti 1 a causa del generatore di corrente I_{2c} ai morsetti 2. Esso è quindi minore in modulo di I_{2c}, e a maggior ragione di I_{1c}. Perciò, quand'anche questo termine fosse positivo, esso, sommato a I_{1c} darebbe ancora un risultato negativo.

Quindi la corrente I_1 può divenire positiva solo se l'ultimo termine della 1ª delle (6) è positivo. Orbene, se I_{3_e} avesse il valore più alto in modulo che rende $V_3 > 0$, ossia se $I_{3_e} = G_{23} I_{2_e} / G_{22}$, il contributo dell'ultimo termine della 1ª delle (6) non sarebbe sufficiente a rendere I_1 positiva, quand'anche fosse $I_{2_e} = I_{1_e}$. Infatti in tali condizioni si avrebbe:

$$I_1 = I_{1_e}\left(1 + \frac{G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2} + \frac{G_{23}}{G_{22}} \frac{G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22}}{G_{22}G_{33} - G_{23}^2}\right)$$

che si riduce, con facili passaggi a:

$$I_1 = I_{1_e} \frac{G_{22} - G_{12}}{G_{22}}$$

che è sempre negativa. È quindi provato l'asserto. Si potrebbe ancora dimostrare che, in queste condizioni, i segni delle tensioni e correnti ai morsetti permangono anche se si apre ancora l'interruttore 1. Tale proprietà è stata dimostrata precedentemente (Bibliografia n. 5, pag. 537).

4. Conclusione della parte II.

I risultati fin qui ottenuti si possono riassumere nella tabella II, che indica il numero massimo di prove e di rilievi che si debbono eseguire per determinare l'assetto dei raddrizzatori quando questi siano in numero inferiore od uguale a 4.

TABELLA II.

Numero di prove e di rilievi da eseguirsi per determinare l'assetto dei raddrizzatori con metodo diretto e con tentativi, quando il numero dei raddrizzatori è inferiore a 4.

N°. Radd.	N°. Prove	N°. Rilievi	N°. Prove con tentativi	N°. Rilievi con tentativi
1	1	1	1	1
2	2	3	3	6
3	3	6	7	21
4	4	12	15	60

Nelle ultime due colonne della tabella sono raccolti i numeri di prove e e di rilievi che si dovrebbero eseguire procedendo per tentativi. Riservandosi di tornare sull'argomento nella terza parte, si può già osservare che

il numero di rilievi è senbilmente maggiore (di anche 5 volte) del corrispondente ottenuto coi metodi qui illustrati.

L'esame delle colonne seconda e terza della tabella II sembrerebbe aprire favorevoli prospettive per le reti più complesse, in quanto i numeri mostrano grande regolarità.

Però un più attento esame mostra che tale regolarità non potrebbe prolungarsi indefinitamente. Infatti, in una rete con k raddrizzatori, il massimo numero di rilievi che si possono fare in una prova è ovviamente k. Quindi, per $k = 5$ si potrebbe pensare che il numero di prove possa essere 5 ed il numero di rilievi 24, però, per $k = 6$, se le prove fossero 6, i rilievi non potrebbero essere 48, come ci si potrebbe aspettare dai dati della terza colonna della tabella II, giacchè il massimo consentito sarebbe $6 \times 6 = 36$.

D'altra parte, se si esaminano i procedimenti validi per 2, 3, e 4 raddrizzatori, non si osserva alcuna regolarità di procedura, ma anzi sembra non sia possibile alcun metodo di riduzione o di generalizzazione della procedura stessa.

Del resto, a meno che non si trovi un metodo nuovo fondato su basi diverse, appare chiaro che il seguire la procedura indicata per risolvere la rete con 4 raddrizzatori, anche con l'aiuto di tabelle, è assai laborioso, e molto di più lo sarebbe l'eventuale procedura per 5 o più raddrizzatori. Sembra allora più opportuno ricercare un metodo di soluzione esprimibile in termini semplici, che faccia uso dei risultati fin qui raggiunti, ma abbia carattere di generalità. Con questo si rinuncia probabilmente a ulteriori possibili riduzioni di complessità di calcolo, ma si guadagna in semplicità logica.

Lungi dall'affermare che nessun procedimento migliore sia possibile, si ritiene però infeconda, allo stato attuale delle nozioni, ogni ricerca intesa ad affinare il metodo diretto fin qui adottato, almeno lungo le attuali direttrici.

PARTE TERZA

ANALISI DI UNA RETE CON UN NUMERO DI RADDRIZZATORI QUALSIASI

1. Schema logico dell'analisi.

Dopo avere, come al solito, sostituito i raddrizzatori con interruttori, si chiudano tutti gli interruttori in corto circuito e si misurino le correnti nei primi quattro. Su questi si misureranno anche le tensioni quando essi sono aperti, restando chiusi i rimanenti $k - 4$ interruttori. Procedendo

poi come indicato nella parte II si riesce a disporre i primi quattro interruttori in assetto coerente. Si calcoli allora la corrente nel 5º interruttore, in queste condizioni. Se essa è positiva, anche il 5º interruttore è in assetto coerente, e si procede al calcolo della corrente nel 6º. Se invece essa è negativa si può concludere, in base al teorema f, che se la rete data contenesse solo i primi 5 raddrizzatori, e gli altri fossero sostituiti da corti circuiti, il raddrizzatore 5 sarebbe interdetto nell'assetto finale.

Si apre allora l'interruttore 5 e si ricalcola, in queste condizioni, l'assetto dei primi 4 interruttori, sempre col metodo esposto nella parte II. Disposti questi nell'assetto trovato, e l'interruttore 5 aperto, si hanno i primi cinque interruttori in assetto coerente. Si calcola allora la corrente ai morsetti 6, che sono finora rimasti chiusi.

La procedura è iterativa, com'è facile intuire. Se cioè la corrente ai morsetti 6 è positiva, si calcola la corrente ai morsetti 7. Se invece essa è negativa, si apre l'interruttore 6 e si riesaminano *completamente* i primi 5 interruttori, cioè senza tener conto alcuno dei precedenti risultati su di essi. E così si procede, fino ad esaurimento dei raddrizzatori.

Si è così indicata soltanto la traccia logica secondo la quale procede l'analisi. Essa dunque consiste nel determinare l'assetto coerente dell'interruttore i-esimo quando gli interruttori dal primo all'$(i - 1)$-esimo sono in assetto coerente, e gli interruttori dall'$(i + 1)$-esimo all'ultimo sono chiusi in corto circuito, e questo per $i = 1$ e poi $i = 2$ e così via fino ad $i = k$.

L'elemento fondamentale del calcolo è dunque la risoluzione di una rete con 4 raddrizzatori, da eseguirsi con i metodi esposti nella parte II.

Nel paragrafi seguenti, allo scopo di precisare la complessità dei calcoli occorrenti, si riprenderà il problema generale dell'analisi, esprimendo in termini più concreti quanto qui si è soltanto accennato.

2. Segno del determinante delle conduttanze.

Come si è gia accennato nella parte I, l'analisi incomincia con la trasformazione della rete assegnata nel k-bipolo corrispondente, che ha i raddrizzatori come carichi esterni. Tale operazione, che può considerarsi (come già si è osservato) comune alla rete con raddrizzatori assegnata e ad una rete normale di ugual struttura, conduce, mediante un qualsiasi procedimento valido per le reti normali, al sistema (1). In quanto segue, il sistema (1) sarà considerato come il dato di partenza per il calcolo del regime della rete data.

Durante le « prove » gli interruttori ai morsetti del k-bipolo si possono pensare sostituiti da conduttanze generiche g_i, le quali assumono, ai diversi morsetti, e caso per caso, valori piccolissimi o molto grandi. In gene-

rale, dunque, ogni prova richiede la soluzione, parziale o totale del sistema ottenuto dal sistema (1) ponendo $I_i = g_i V_i$, con le g_i tutte positive:

$$
\begin{aligned}
(G_{11} - g_1) V_1 + G_{12} V_2 + \ldots + G_{1k} V_k &= - I_{1_c} \\
G_{21} V_1 + (G_{22} - g_2) V_2 + \ldots + G_{2k} V_k &= - I_{2_c} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_{k1} V_1 + G_{k2} V_2 + \ldots + (G_{kk} - g_k) V_k &= - I_{kc}\,.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Si vuole intanto far vedere che il determinante dei coefficienti del sistema (7), che si chiamerà Δ_{ck}, è, con le convenzioni di segno adottate, positivo se k è pari, negativo se k è dispari, qualunque siano i valori (positivi) delle g_i, e qualunque sia la rete data, ossia qualunque siano (nei limiti di possibilità fisica) le G_{ij}.

Si supponga che sia $I_{1_c} = 1$, $I_{2_c} = I_{3_c} = \ldots = I_{kc} = 0$ e si calcoli V_1. Per semplici considerazioni sul k-bipolo, è evidente che deve essere $V_1 > 0$. Ora, dal sistema (7), nelle condizioni dette, si ha:

$$
V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & G_{12} & G_{13} \ldots & G_{1k} \\ 0 & (G_{22} - g_2) & G_{23} \ldots & G_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & G_{k2} & G_{k3} \ldots & (G_{kk} - g_k) \end{vmatrix}}{\Delta_{ck}} = - \frac{\Delta_{c,k-1}}{\Delta_{ck}} \tag{8}
$$

in cui si è indicato con $\Delta_{c,\,k-1}$ il complemento algebrico di $(G_{11} - g_1)$ in Δ_{ck}. Questa notazione è giustificata dal fatto che $\Delta_{c,\,k-1}$ è effettivamente il determinante dei coefficienti di un sistema come il (7) ma per un $(k - 1)$-bipolo, e pertanto si può considerare come qualsiasi, cioè non necessariamente legato al k-bipolo in esame, ma invece come riferentesi ad un qualsiasi $(k - 1)$-bipolo.

Poichè deve essere $V_1 > 0$, (vedi fig. 1 *b*) la (8) mostra che $\Delta_{c,\,k}$ e $\Delta_{c,\,k-1}$ hanno segno opposto. Ma per $k = 1$ è $\Delta_{c1} = G_{11} - g_1$ sempre negativo; quindi è provato l'asserto.

Questa proprietà (del resto notissima) è molto utile per l'analisi. Infatti il metodo di analisi richiede solo, in ogni prova, di conoscere il segno delle correnti o tensioni ai morsetti, o tutt'al più di stabilire relazioni di maggiore o minore fra più correnti o più tensioni. Orbene, con la proprietà accennata tali relazioni si possono stabilire senza che sia necessario calcolare, per ogni prova, e cioè per ogni insieme delle g_i, il determinante dei coefficienti, il cui segno dipende solo, come si è visto, dal numero di raddrizzatori della rete.

3. Complessità dei calcoli relativi alla rete normale e alla rete con raddrizzatori risolta per tentativi.

Si supponga di aver già determinato l'assetto coerente dei k raddrizzatori della rete, ossia quali correnti e quali tensioni si debbano porre uguali a zero nel sistema (1), e ci si proponga di valutare la complessità dei calcoli necessari per terminare l'analisi.

Si tratta sostanzialmente di determinare i valori delle k incognite I e V non poste uguali a zero nel sistema (1), e cioè di risolvere un sistema lineare non omogeneo in k equazioni e k incognite. Si devono allora calcolare il determinante dei coefficienti, più k determinanti di ordine k contenenti i termini noti, ed infine dividere questi ultimi per il determinante dei coefficienti.

Trascurando queste divisioni rispetto al resto, tale complessità, che si chiamerà P_k è espressa da:

$$P_k = (k + 1) \cdot \Delta_k \tag{9}$$

in cui Δ_k indica il calcolo di un determinante di ordine k, ed in generale $n \cdot \Delta_k$ il calcolo di n determinanti di ordine k.

Se l'assetto dei raddrizzatori non è noto, si può ovviamente procedere per tentativi, come si è illustrato al par. 1 della parte I. È immediato riconoscere che i modi in cui si possono disporre (chiusi o aperti) i k interruttori è 2^k. I tentativi da prevedersi sono allora $2^k - 1$. Ognuno di essi corrisponde ad una prova completa, ossia alla determinazione di tutte le correnti o tensioni ai morsetti del k-bipolo, per un certo assetto degli interruttori. Tenuto conto che anche qui è sufficiente conoscere i segni delle tensioni e correnti, utilizzando la proprietà del paragrafo precedente, si rileva subito che ognuna delle $2^k - 1$ prove comporta il calcolo di k determinanti di ordine k.

Pertanto la complessità dei calcoli col metodo dei tentativi T_k, relativa alla sola determinazione dell'assetto dei raddrizzatori, è espressa da:

$$T_k = k\,(2^k - 1) \cdot \Delta_k\,. \tag{10}$$

Il rapporto fra T_k e P_k si può assumere come indice dell'incremento di complessità di calcoli della rete con raddrizzatori rispetto alla rete normale di ugual struttura, nel caso che si proceda per tentativi. Si ha dunque:

$$\frac{T_k}{P_k} = \frac{k}{k+1}\,(2^k - 1)\,. \tag{11}$$

Questo rapporto cresce rapidamente con k, e per $k = 10$ vale 930, mentre per valori di k più elevati vale 2^k a meno di uno scarto inferiore al 10% (fig. 2).

La relazione (11) sarà utile nel seguito, per confronto con la relazione analoga valida quando si proceda col metodo di analisi diretta.

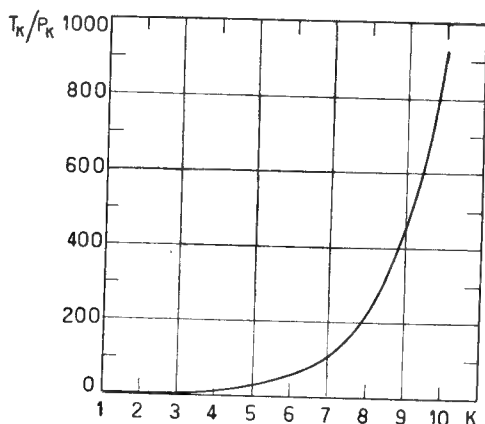



Fig. 2.

Rapporto fra la complessità dei calcoli necessari per determinare l'assetto dei k raddrizzatori di una rete col metodo dei tentativi e la complessità dei calcoli per la soluzione di una rete normale di ugual struttura.

4. Complessità di calcoli dovuta ai raddrizzatori, quando $k \leq 4$.

Per i casi di $k \leq 4$, trattati nelle parti I e II di questo lavoro, la complessità dei calcoli per determinare l'assetto dei raddrizzatori C_k si valuta molto semplicemente.

Per $k = 1$, dato il sistema (1) non si deve eseguire alcun calcolo aggiuntivo, quindi $C_1 = 0$ e $C_1/P_1 = 0$.

Per $k = 2$ si è visto che occorrono due prove con tre rilievi. Dei tre rilievi, però, due sono le correnti di corto circuito, messe in evidenza dal sistema (1) stesso. Poichè poi il determinante dei coefficienti non deve essere calcolato, basta un rilievo con il computo di un determinante di di ordine 2. Quindi:

$$C_2 = 1 \cdot \Delta_2$$

e quindi, per la (9):

$$\frac{C_2}{P_2} = 0{,}33 \,. \tag{12}$$

Analogamente, per $k = 3$ occorrono sei rilievi, di cui tre sono le correnti di corto circuito, già note dal sistema (1). Perciò $C_3 = 3 \cdot \Delta_3$ e quindi, sempre in base alla (9):

$$\frac{C_3}{P_3} = 0{,}75 . \tag{13}$$

Per $k = 4$ i rilievi da eseguire sono al più 12, di cui quattro sono correnti di corto circuito. Quindi si ha:

$$C_4 = 8 \cdot \Delta_4 \quad \text{e} \quad \frac{C_4}{P_4} = 1{,}6 . \tag{14}$$

La tabella III raccoglie i valori di C_k/P_k e di T_k/P_k per i casi semplici esposti. Il considerevole vantaggio conseguito con l'analisi diretta è evidente.

TABELLA III.

Incremento relativo di complessità di calcoli per l'analisi di una rete con k raddrizzatori: con analisi diretta (C_k/P_k) e con tentativi (T_k/P_k).

k	C_k/P_k	T_k/P_k
1	0	0,50
2	0,33	2,00
3	0,75	5,25
4	1,60	12,00

5. Variazione di complessità nel passare da $k = n$ a $k = n + 1$.

Si riprenda ora lo schema di analisi illustrato al paragrafo 1 di questa parte per valutare la complessità aggiuntiva C_k nel caso di $k = n + 1$, quando si conosca la complessità C_k per $k = n$.

Data dunque una rete con $n + 1$ raddrizzatori, si chiuda l'interruttore $(n + 1)$-esimo in corto circuito, e si calcoli l'assetto coerente dei rimanenti n interruttori. Ciò comporta calcoli di complessità C_n. Disposti poi i primi n interruttori nell'assetto trovato, si calcoli la corrente nell'interruttore $(n + 1)$-esimo, chiuso. Poichè interessa solo il segno di questa corrente, ciò impone il calcolo di un determinante di ordine $n + 1$. Se tale corrente è positiva, non si richiedono altri calcoli; se invece è negativa, bisogna aprire l'interruttore $(n + 1)$-esimo e ricalcolare l'assetto dei rimanenti n interruttori.

Si deve allora esaminare quest'ultima operazione per valutarne la complessità.

Aprire l'interruttore $(n + 1)$-esimo significa risolvere l'ultima delle $n + 1$ equazioni di un sistema analogo al sistema (1), ove si ponga $I_{n+1} = 0$, rispetto a V_{n+1}, e sostituire l'espressione trovata nelle restanti n equazioni. Così facendo il sistema di n equazioni da considerare si riduce ad un sistema del tipo solito, che si sa calcolare con la complessità C_n.

Indicando allora con S_{n+1} la complessità dell'operazione di sostituzione accennata, si conclude, con il consueto simbolismo, che:

$$C_{n+1} = 2C_n + 1 \cdot \Delta_{n+1} + S_{n+1} . \tag{15}$$

Si farà ora vedere che S_{n+1} è trascurabile rispetto a $1 \cdot \Delta_{n+1}$, se n è almeno uguale a 4, cioè se si deve risolvere una rete di almeno 5 raddrizzatori.

Per questo occorre valutare in termini di operazioni elementari la sostituzione e il calcolo di un determinante. Per la sostituzione, si osservi che la risoluzione dell'$(n + 1)$-esima equazione del sistema rispetto a V_{n+1} conduce a:

$$V_{n+1} = - \frac{G_{n+1,1}}{G_{n+1,n+1}} V_1 - \frac{G_{n+1,2}}{G_{n+1,n+1}} V_2 - \ldots - \frac{G_{n+1,n}}{G_{n+1,n+1}} V_n - \frac{I_{n+1,c}}{G_{n+1,n+1}} .$$

Questo comporta $n + 1$ divisioni (per uno stesso numero) ossia n divisioni fra le $G_{n+1,i}$ e $G_{n+1,n+1}$ ed una divisione fra $I_{n+1,c}$ ed ancora $G_{n+1,n+1}$.

Sostituendo la (16) nella i-esima equazione si ottiene:

$$I_i = \left(G_{i1} - G_{i,n+1} \frac{G_{n+1,1}}{G_{n+1,n+1}}\right) V_1 + \left(G_{i2} - G_{i,n+1} \frac{G_{n+1,2}}{G_{n+1,n+1}}\right) V_2 + \ldots +$$
$$+ \left(G_{in} - G_{i,n+1} \frac{G_{n+1,n}}{G_{n+1,n+1}}\right) V_n + \left(I_{ic} - G_{i,n+1} \frac{I_{n+1,c}}{G_{n+1,n+1}}\right).$$

Ciò implica $n + 1$ prodotti di $G_{i,n+1}$ per i coefficienti della precedente equazione e $n + 1$ somme. E queste operazioni vanno ripetute per ogni i fra 1 e n.

In totale si hanno dunque: $n + 1$ divisioni; $n(n + 1)$ prodotti e altrettante somme. Allo scopo di attribuire un solo indice a tale complessità, si converrà di attribuire complessità 1 alla divisione ed al prodotto, e complessità 1/2 alla somma. Si può obbiettare che questa valutazione è del tutto arbitraria, tuttavia la si può ritenere accettabile, dato che si operano sempre valutazioni di confronto, e quindi pare improbabile che

stime fondate su questo semplice criterio di complessità possano risultare troppo lontane dal vero.

Con le convenzioni dette, dunque, si ha

$$S_{n+1} = n + 1 + n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = (n+1)\left(\frac{3}{2}n + 1\right). \tag{16}$$

Per valutare la complessità della valutazione di un determinante di ordine $n+1$ si supporrà di risolverlo col metodo generale di somma di tutti i possibili prodotti dei termini, uno per ogni riga.

Si tratta, come è noto, di $(n+1)!$ termini, ognuno di $n+1$ fattori. Si devono dunque fare n moltiplicazioni per ogni termine, ossia $(n+1)! \cdot n$ prodotti e $(n+1)! - 1$ somme. Quindi, con la stessa convenzione di prima:

$$1 \cdot \Delta_{n+1} = (n+1)!n + \frac{(n+1)!}{2} - \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Per $n = 4$, $(n+1)!$ vale già 120, quindi il termine sottrattivo della (17) si può trascurare. Infine:

$$1 \cdot \Delta_{n+1} = (n+1)!\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{18}$$

Per $n = 4$ la (16) fornisce $S_5 = 35$ e la (18) $1 \cdot \Delta_5 = 540$ quindi S_5 è meno del 10% di $1 \cdot \Delta_5$. Al crescere di n tale rapporto si riduce rapidamente, come si può capire da un semplice esame dei sècondi membri delle (16) e (18). Già per $n = 5$ si ha $S_6 = 51$ e $1 \cdot \Delta_6 = 3960$.

È perciò lecito, per tutti i casi che ci interessano, trascurare S_{n+1} rispetto a $1 \cdot \Delta_{n+1}$. La (15) si riduce allora semplicemente a

$$C_{n+1} = 2C_n + 1 \cdot \Delta_{n+1} \qquad (n \geq 4). \tag{19}$$

6. Complessità per un numero generico di raddrizzatori.

È a questo punto possibile calcolare il rapporto C_k/P_k per ogni valore di k. Basta infatti utilizzare le relazioni (9), la prima delle (14), la (18) e la (19). I risultati sono raccolti nella tabella IV, in cui si sono tenuti separati i diversi contributi, che consentono ulteriori considerazioni. Allo scopo di mostrare il vantaggio del metodo diretto di analisi si è anche aggiunta una colonna con il rapporto T_k/P_k, calcolato mediante la relazione (11).

TABELLA IV.

Complessità dei calcoli necessari per determinare l'assetto dei raddrizzatori della rete col metodo diretto (C_k) e col metodo dei tentativi (T_k), riferite alla complessità dei calcoli per una rete normale di ugual struttura (P_k).

k	C_k	$2 \cdot C_{k-1}$	$1 \cdot \Delta_k$	P_k	C_k/P_k	T_k/P_k
4	672	—	84	420	1.60	12
5	1.884	1.344	530	3.240	0.58	26
6	7.728	3.768	3.960	24.720	0.31	54
7	48.206	15.456	32.750	262.000	0.18	111
8	$0{,}399 \times 10^6$	96.412	$0{,}303 \times 10^6$	$2{,}727 \times 10^6$	0.15	227
9	$3{,}883 \times 10^6$	$0{,}798 \times 10^6$	$3{,}085 \times 10^6$	$30{,}85 \times 10^6$	0.13	460
10	$42{,}212 \times 10^6$	$7{,}766 \times 10^6$	$34{,}45 \times 10^6$	$379{,}5 + 10^6$	0.11	930
11	$504{,}42 \times 10^6$	$84{,}426 \times 10^6$	420×10^6	5040×10^6	0.10	1.880

L'esame delle ultime due colonne della tabella IV mostra, che la complessità relativa per la ricerca dell'assetto coerente dei raddrizzatori *decresce* al crescere del numero dei raddrizzatori. Per un numero di raddrizzatori uguale a 10 o più la complessità di calcoli per la determinazione dell'assetto è solo il 10% circa della complessità della rete normale di ugual struttura.

Il vantaggio offerto dal metodo diretto d'analisi rispetto al metodo di tentativi è enorme: T_k è otto volte maggiore di C_k con 4 raddrizzatori, e diventa oltre 104 volte maggiore per una rete con 11 raddrizzatori.

Infine, l'esame delle colonne 3ª e 4ª mostra che dei due termini che concorrono a formare C_k, e cioè $2C_{k-1}$ e $1 \cdot \Delta_k$, il primo diventa, al crescere di k, via via più piccolo rispetto al secondo. Così, mentre per $k = 5$ $2C_{k-1}$ è 2,5 volte $1 \cdot \Delta_k$, per $k = 11$ $2C_{k-1}$ è ridotto al 20% di $1 \cdot \Delta_k$. Per $k \geqq 10$, allora, si può, con buona approssimazione, ritenere che:

$$C_k \cong 1 \cdot \Delta_k \qquad (k \geqq 10) \tag{20}$$

e quindi il rapporto C_k/P_k, per elevati valori di k, assume il valore approssimato:

$$\frac{C_k}{P_k} \cong \frac{1}{k+1} \qquad (k \geqq 10) \tag{21}$$

che è il risultato preannunciato nella parte I.

I risultati di questo paragrafo appaiono così soddisfacenti da scoraggiare ogni ulteriore indagine sull'analisi. Basti osservare che per $k = 4$

la complessità relativa è massima (160%) però l'analisi si conduce speditamente con l'ausilio della tabella I, mentre per $k = 5$, ove si comincia ad usare il metodo generale, la complessità relativa è ridotta al 60% e scende al 10% con una decina di raddrizzattori.

7. Osservazioni conclusive.

Il metodo di analisi si è andato precisando nel corso delle precedenti considerazioni. Tuttavia non è forse inutile richiamare qui la procedura da seguire, che, dal punto di vista pratico, è la cosa più interessante.

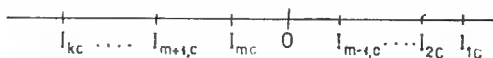



Fig. 3.
Numerazione convenzionale dei raddrizzatori della rete in base ai valori delle correnti di corto circuito.

Sia dunque data una rete con k raddrizzatori. Con i metodi consueti validi per le reti normali la si riduca ad un k-bipolo, ossia si deducano le equazioni (1).

Indi, per comodità, si numerino i morsetti in modo che la corrente I_{k_c} sia la minore (algebricamente) e I_{1_c} la maggiore. Sia I_{m_c} la maggiore corrente di corto circuito negativa (fig. 3).

Con tutti gli interruttori chiusi, i primi $(m - 1)$ sono in assetto coerente. E poichè l'analisi procede riducendo ad assetto coerente gli interruttori che precedono l'i-esimo, e facendo poi variare i da 1 a k, si può senz'altro partire da $i = m$.

Si apre allora l'interruttore m tenendo chiusi gli interruttori da $(m + 1)$ a k, ossia si risolve rispetto a V_m la m-esima equazione del sistema (1) avendo posto $I_m = 0$, $V_{m+1} = V_{m+2} = \ldots = V_k = 0$ e si sostituisce l'espressione trovata nelle prime $(m - 1)$ equazioni. Esse assumono allora la forma del sistema (1), con $k = m - 1$.

Indi si procede sistematicamente, cominciando a disporre i primi 4 interruttori in assetto coerente, col metodo della parte II. Fatto questo, si esamina la corrente I_5. Se essa è positiva, si passa ad esaminare la corrente I_6, se invece è negativa si apre l'interruttore 5 e si ricalcola l'assetto dei primi 4 interruttori.

Così procedendo si arriva ad avere assetto coerente dei primi m interruttori, con l'interruttore m-esimo aperto. Si esamina allora la corrente I_{m+1}, e così via fino ad esaurimento degli interruttori.

Naturalmente, caso per caso, potranno presentarsi condizioni semplificatrici. Per esempio, se il modulo di I_{m_c} è minore di $I_{m-1,c}$ è evidente che l'apertura dell'interruttore m-esimo lascia in assetto coerente tutti gli

interruttori da 1 a m, e in assetto non coerente l'interruttore $(m + 1)$-esimo. Si può allora senz'altro cominciare aprendo l'interruttore $(m + 1)$-esimo anzichè l'm-esimo.

Giova infine osservare che le complessità di calcoli valutate nei precedenti paragrafi si riferiscono al caso peggiore, cioè al caso di correnti di corto circuito tutte negative, e inoltre nella eventualità che la corrente ai morsetti i-esimi, chiusi in corto circuito, quando gli interruttori da 1 a $(i - 1)$ siano in assetto coerente, risulti sempre negativa.

Il Prof. R. Sartori ha seguito questo lavoro con illuminato consiglio e generoso incoraggiamento. A Lui si vuole esprimere un profondo ringraziamento.

APPENDICE

Rete con quattro raddrizzatori: casi non trattati nel testo.

Caso III β:

$$I_{1c} < I_{2c} < 0 < I_{3c} < I_{4c} ;$$
$$V_{a_0} < 0 < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{1_0} .$$

Si è già visto che l'unica soluzione possibile con l'interruttore 1 chiuso è: interruttore 1 chiuso, aperti gli altri. Se invece l'interruttore 1 fosse aperto, l'interruttore c, nel restante triplo-bipolo a, b, c, sarebbe chiuso, in base alle regole sui tripli-bipoli. Ma anche l'interruttore b sarebbe chiuso. Infatti, se esso fosse aperto, nel triplo-bipolo a, b, 1, l'interruttore 1 sarebbe chiuso, contro quanto si è ammesso. Poichè nulla può dirsi in generale dell'interruttore a, la soluzione è certamente una delle tre possibili:

1) interruttore 1 chiuso, aperti gli altri;

2) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri;

3) interruttori 1 ed a aperti, chiusi gli altri.

Si dispongano allora gli interruttori come nella 3) e si determini la tensione ai capi dell'interruttore 1. Se essa è positiva l'assetto 3) non è coerente. Si può allora provare l'assetto 2) determinando le correnti nei tre interruttori chiusi. Se queste sono tutte positive, la soluzione è l'assetto 2), altrimenti è coerente l'assetto 1). Se invece la tensione ai capi dell'interruttore 1 è negativa, in base alla proprietà del paragrafo 3 della parte II, le correnti negli interruttori b e c sono positive. Basta quindi determinare, sempre nell'assetto 3), la tensione ai morsetti a. Se questa è negativa, l'assetto 3) è coerente, se non lo è, l'interruttore a deve essere chiuso in base al teorema f, e quindi è coerente l'assetto 2).

Caso III γ:

$$I_{1c} < I_{2c} < 0 < I_{3c} < I_{4c} ;$$
$$0 < V_{a_0} < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{1_0} .$$

Anche in questo caso l'interruttore 1 può risultare chiuso solo se gli altri tre sono aperti. D'altra parte l'interruttore 1 può essere aperto solo se almeno due interruttori sono chiusi, come si può constatare ammettendo per assurdo che due degli interruttori *a*, *b*, *c* siano aperti, e considerando il restante doppio-bipolo.

Sono dunque possibili le soluzioni:

1) interruttore 1 chiuso, aperti gli altri;

2) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri;

3) interruttore 1, e un altro aperti, chiusi i rimanenti.

Si provi allora l'assetto 2), e si determinino le correnti nei tre interruttori chiusi. Si può intanto osservare che esse non possono essere tutte negative, giacchè le corrispondenti tensioni a vuoto sono tutte positive.

Se tali correnti sono tutte positive, e solo allora, è coerente l'assetto 2). In ogni altro caso, sia I_x la minore (algebricamente) delle tre correnti. Se allora l'interruttore 1 risultasse veramente aperto nell'assetto coerente, l'interruttore *x* sarebbe aperto, in base alle regole del triplo-bipolo applicate alle coppie 2, 3, 4. Ma anche nella soluzione 1 l'interruttore *x* è aperto. Quindi l'assetto coerente dell'interruttore *x* è aperto.

Si provi allora l'assetto: interruttori 1 ed *x* aperti, chiusi gli altri, e si determini la tensione ai morsetti dell'interruttore 1. Se questa è negativa, è coerente l'assetto 3) con 1 ed *x* aperti, altrimenti, per esclusione, è coerente l'assetto 1).

Con il Caso III γ si è completato l'esame del Caso III, ossia il caso in cui due correnti di corto circuito sono negative, e due positive. Per dualità si può considerare risolto anche il caso in cui due tensioni a vuoto sono positive e due negative, comunque siano le correnti di corto circuito. Il Caso IV, che verrà ora esaminato, è quello in cui tre correnti di corto circuito sono negative ed almeno tre tensioni a vuoto positive.

Sia dunque:

Caso IV α:

$$I_{1c} < I_{2c} < I_{3c} < 0 < I_{4c} ;$$
$$V_{a_0} < 0 < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{d_0} .$$

Per la già ricordata proprietà che le tensioni a vuoto non possono avere tutte segno opposto alle corrispondenti correnti di corto circuito si può intanto escludere che sia $a = 4$.

Conviene trattare separatamente il caso che i morsetti d coincidano coi morsetti 1 e il caso in cui ciò non accade.

Sia allora intanto $d = 1$. Se almeno uno degli interruttori 2 e 3 fosse chiuso nell'assetto coerente del quadruplo-bipolo, l'interruttore 1 risulterebbe aperto nel restante triplo-bipolo, come risulta dall'esame delle correnti di corto circuito. Quindi l'interruttore 1 può essere chiuso solo se gli interruttori 2 e 3 sono entrambi aperti. Dualmente, osservando le tensioni a vuoto, si conclude che l'interruttore 1 può essere aperto solo se gli interruttori b e c sono chiusi. Sono dunque possibili quattro soluzioni:

1) interruttore 1 chiuso, aperti gli altri;

2) interruttori 1 e 4 chiusi, aperti gli altri;

3) interruttore 1 ed a aperti, chiusi gli altri;

4) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri.

Si consideri l'assetto 2). Partendo dalle condizioni di corto circuito, se si apre l'interruttore 3 la corrente ai morsetti 2 resta negativa, e quindi la successiva apertura dell'interruttore 2 lascia ai morsetti di questo tensione negativa. Quindi, nell'assetto 2), l'interruttore 2 è coerente. D'altra parte, partendo dalle condizioni a vuoto, se si chiude l'interruttore 4 (che è coincidente con b o con c) la tensione ai morsetti 1 resta positiva, e quindi la successiva chiusura dell'interruttore 1 lascia questo coerente nell'assetto 2). Ma, per la proprietà dimostrata al paragrafo 3 della parte II, se la corrente ai morsetti 1 nell'assetto 2) è positiva, la tensione ai morsetti 3 è certamente negativa. Ma allora nell'assetto 2) tutti gli interruttori sono in assetto coerente fuorchè l'interruttore 4.

D'altra parte l'interruttore 4 è chiuso solo nell'assetto 1) e quindi sono possibili solo gli assetti 1) e 2).

Se però si esamina in modo duale l'assetto 3) si conclude che sono possibili solo gli assetti 3) e 4). Si conclude che, essendo la soluzione coerente unica, è impossibile l'assetto supposto. È così provata una singolare proprietà dei quadrupli-bipoli normali attivi, ossia che è impossibile avere:

$$I_{1_c} < I_{2_c} < I_{3_c} < 0 < I_{4_c}$$

e simultaneamente:

$$V_{a_0} < 0 < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{1_0} .$$

Sia quindi $d \neq 1$. Resta ancora valida l'affermazione precedente che l'interruttore 1 può essere chiuso solo se gli interruttori 2 e 3 sono aperti. Però è ora impossibile che l'interruttore 1 sia l'unico chiuso. Infatti si può constatare dalle tensioni a vuoto che la chiusura di un solo interruttore (a, b oppure c) dà sempre luogo ad un assetto non coerente. L'inter-

ruttore 1 può allora essere chiuso solo se gli interruttori 2 e 3 sono aperti, e l'interruttore 4 chiuso. Ma, in base alla solita proprietà della parte II questo assetto può essere coerente solo se, chiudendo il solo interruttore 4, la tensione ai morsetti 1 è positiva, negative le altre. Ora è evidente che ciò può avvenire solo se $d = 4$. Quindi se i morsetti d non coincidono con i morsetti 4 l'interruttore 1 è senz'altro aperto, e si procede come al caso II. Dualmente, se i morsetti a non coincidono con i morsetti 1, l'interruttore d è senz'altro chiuso, e si procede come al caso II. Resta dunque da esaminare il caso di $d = 4$, $a = 1$. Sia allora:

$$I_{1c} < I_{2c} < I_{3c} < 0 < I_{4c} \qquad \text{e} \qquad V_{1_0} < 0 < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{4_0} \,.$$

Per le stesse ragioni sopra dette la sola configurazione possibile con l'interruttore 1 chiuso è: interruttori 1 e 4 chiusi, aperti gli altri. Dualmente, l'unico assetto possibile con l'interruttore 4 aperto è: interruttori 1 e 4 aperti, chiusi gli altri. In ogni altro assetto possibile sarà allora chiuso l'interruttore 4 e aperto l'interruttore 1. Gli assetti possibili sono dunque:

1) interruttori 1 e 4 chiusi, aperti gli altri;
2) interruttori 1 e 4 aperti, chiusi gli altri;
3) interruttori 1 e 3 aperti, chiusi gli altri;
4) interruttori 1 e 2 aperti, chiusi gli altri;
5) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri;
6) interruttore 4 chiuso, aperti gli altri.

Si dispongano gli interruttori nell'assetto 5) e si determinino le correnti ai morsetti 2 e 3. Se esse sono entrambe positive gli interruttori 1, 2, 3 sono in assetto coerente, quindi, per il teorema f, l'interruttore 4 è chiuso o aperto a seconda che la corrente ai morsetti 4 sia positiva o negativa. Si determina allora tale corrente: se essa è positiva l'assetto 5) è coerente, altrimenti lo è l'assetto 2) essendo l'unico ove l'interruttore 4 è aperto.

Se invece le correnti ai morsetti 2 e 3 non sono entrambe positive, l'assetto 5) è ovviamente non coerente. Ma lo stesso accade per l'assetto 2). Infatti, esso può essere coerente, in base alle proprietà del triplo-bipolo 2, 3, 4, solo se la corrente I_4 è negativa e le correnti I_2 e I_3 positive nell'assetto 5). Allora, siccome in tutte le restanti possibilità l'interruttore 4 è chiuso, esso è effettivamente tale nell'assetto coerente finale. Essendo poi le possibilità restanti simmetriche rispetto agli interruttori 2 e 3, basta considerare il caso in cui, per esempio, $I_2 < I_3$.

Se l'interruttore 1 fosse effettivamente aperto, poichè l'interruttore 4, chiuso, si può ignorare, nel restante doppio-bipolo 2, 3 l'interruttore 2 sarebbe aperto, in base alle regole relative ai doppi-bipoli. Ma anche nel-

l'assetto 1) in cui l'interruttore 1 è chiuso, l'interruttore 2 è aperto. Quindi l'interruttore 2 è senz'altro aperto, e resta da stabilire l'assetto degli interruttori 1 e 3, ossia resta da stabilire quale dei tre assetti 1), 4) e 6) è coerente.

Si dispongano allora gli interruttori nell'assetto 6) e si determinino le tensioni ai morsetti 1 e 3. Se esse sono entrambe negative, è coerente l'assetto 6), se almeno una di esse è positiva, e la maggiore è quella ai morsetti 1, è coerente l'assetto 1), altrimenti lo è l'assetto 4).

Si consideri infine il caso in cui tre correnti di corto circuito sono negative e tutte le tensioni a vuoto positive:

Caso IV β:

$$I_{1c} < I_{2c} < I_{3c} < 0 < I_{4c} ;$$
$$0 < V_{a_0} < V_{b_0} < V_{c_0} < V_{d_0} .$$

Si può intanto osservare che non può essere $a = 4$. Infatti, se si chiude il solo interruttore a, le tensioni a vuoto dei restanti tre interruttori sono tutte positive, e quindi, se fosse $a = 4$, nel triplo-bipolo 1, 2, 3 le tensioni a vuoto avrebbero tutte segno opposto delle corrispondenti correnti di corto circuito, il che è impossibile. Inoltre, dall'esame delle correnti di corto circuito, risulta ancora che l'interruttore 1 può essere chiuso solo se gli interruttori 2 e 3 sono entrambi aperti.

Ancora è conveniente considerare separatamente il caso di $d = 1$ e di $d \neq 1$.

Sia dunque intanto $d = 1$. Osservando le tensioni a vuoto si rileva subito che, se l'interruttore 1 (cioè d) è aperto, debbono essere chiusi almeno due degli altri interruttori. Infatti, la chiusura di uno solo dei tre interruttori a, b, c lascia ai capi dell'interruttore d tensione positiva. Sono dunque possibili quattro soluzioni:

1) interruttore 1 chiuso, aperti gli altri;
2) interruttori 1 e 4 chiusi, aperti gli altri;
3) interruttori 1 ed un altro aperti, chiusi i rimanenti;
4) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri.

Si dispongano gli interruttori nell'assetto 2). L'interruttore 2 è senza altro coerente, come si rileva subito dalle correnti di corto circuito pensando di aprire prima l'interruttore 3 e poi l'interruttore 2. L'interruttore 1 è anch'esso coerente, come si rileva dalle tensioni a vuoto immaginando di chiudere prima l'interruttore 4 e poi l'interruttore 1. Ma, nel triplo-bipolo 1, 2, 3 (4 essendo chiuso) se aprendo gli interruttori 2 e 3 la corrente nell'interruttore 1 è positiva, la tensione ai morsetti 3 è certamente

negativa. Quindi anche l'interruttore 3 è in assetto coerente. Ma allora basta determinare la corrente ai morsetti 4. Se essa è positiva la soluzione 2) è coerente, altrimenti, in base al teorema f, l'interruttore 4 è aperto, e quindi o è coerente l'assetto 1), oppure l'assetto 3) con gli interruttori 1 e 4 aperti.

Come quarta prova si dispongono gli interruttori nell'assetto 3) con 1 e 4 aperti, e si determina la tensione ai morsetti 1. Se essa è positiva, è coerente l'assetto 1), se è negativa è coerente l'assetto 3). Infatti, per la proprietà del paragrafo 3 della parte II, se la tensione ai morsetti 1 è negativa le correnti ai morsetti 2 e 3 sono positive, quindi sono coerenti gli interruttori 1, 2, 3 nell'assetto 3). Ma anche l'interruttore 4 è coerente, perchè altrimenti esso dovrebbe essere chiuso, contro quanto provato. Perciò l'assetto 3) è senz'altro coerente.

È interessante notare che la soluzione 4) non può mai presentarsi.

Sia ora $d \neq 1$. La soluzione 1) non è più possibile, perchè la chiusura del solo interruttore 1 lascia positiva la tensione ai morsetti d, aperti. La sola soluzione possibile con l'interruttore 1 chiuso è dunque la 2). Per le proprietà delle reti con tre raddrizzatori, tale soluzione è possibile solo se, chiudendo il solo interruttore 4, la tensione ai morsetti 2 e 3 diventa negativa, e quella ai morsetti 1 positiva. Ciò implica che sia $c = 4$, $d = 1$, caso già contemplato prima, oppure che sia $d = 4$. Quindi, se $d = 2$ oppure $d = 3$ la soluzione 2) è anch'essa impossibile, quindi l'interruttore 1 è senz'altro aperto, e si procede come al caso II.

Sia infine $d = 4$. In questo caso è possibile la soluzione 1), oppure l'interruttore 1 è aperto. Ma se l'interruttore 1 è aperto, nel restante triplobipolo, con tensioni a vuoto tutte positive, l'interruttore d (cioè 4) è chiuso, oppure aperto, ma con gli altri due chiusi. Sono in definitiva possibili le soluzioni:

1) interruttori 1 e 4 chiusi, aperti gli altri;
2) interruttori 1 e 4 aperti, chiusi gli altri;
3) interruttori 1 e 3 aperti, chiusi gli altri;
4) interruttori 1 e 2 aperti, chiusi gli altri;
5) interruttore 1 aperto, chiusi gli altri;
6) interruttore 4 chiuso, aperti gli altri.

Si osservi che queste possibilità sono le stesse esaminate al caso IV a, ed inoltre che le deduzioni là svolte per pervenire alla soluzione finale non sono basate sui valori delle correnti di corto circuito e delle tensioni a vuoto, ma solo sui risultati delle successive terza e quarta prova. Quelle deduzioni sono dunque valide anche in questo caso, che va dunque risolto con la stessa procedura.

È così esaurito il caso IV β. Il suo duale, risolto per dualità, ha tutte le correnti di corto circuito negative e tre tensioni a vuoto positive. E poichè il caso di tutte le correnti di corto circuito negative e tutte le tensioni a vuoto positive non può verificarsi, l'indagine è a questo punto completata.

I risultati sono raccolti nella tabella I. Da essa, o da questa Appendice, si rileva che il numero di prove non eccede mai quattro, e che il numero dei rilievi è al più eguale a 12.

BIBLIOGRAFIA

1. G. Biorci, *Reti a correnti costanti con raddrizzatori ideali*, « L'Elettrotecnica XLIV », n. 9, p. 541 (1957).
2. G. Biorci, *Nuove considerazioni sulle reti contenenti raddrizzatori ideali*, « L'Elettrotecnica XLV », n. 3 bis, p. 179 (1958).
3. G. Biorci, *Unicità della soluzione di una rete con raddrizzatori ideali e conseguenze sui circuiti equivalenti dei tiratron*, « Alta Frequenza XXVII », n. 1, p. 161 (1958).
4. G. Biorci, *Un teorema sulle reti con raddrizzatori*, « Atti Acc. delle Scienze di Torino », vol. XCII (1958).
5. G. Biorci, *Proprietà di reti con raddrizzatori e di k-bipoli attivi normali*, « Alta Frequenza XXVII », n. 5, p. 528 (1958).
6. T. E. Stern, *Piecewise-linear Network Theory*, « Res. Lab. of Electronics », M. I. T., Tech. Rep. 315 (1956).

RELAZIONE

LETTA ED APPROVATA NELL'ADUNANZA DEL 20 APRILE 1960
SULLA MEMORIA DI GIOVANNI FIORIO INTITOLATA

SCOMPOSIZIONE DEI VETTORI SINUSOIDALI

Un generico vettore sinusoidale può essere scomposto, oltre che, com'è d'uso, in due addendi con polarizzazione rettilinea o in due addendi con polarizzazione circolare sul suo stesso piano, anche in due vettori sinusoidali qualsiasi, e quindi, in particolare, in una coppia costituita da un addendo rettilineo e da uno rotante.

Questa scomposizione, che è studiata dall'ing. Fiorio, non è unica per un dato vettore sinusoidale, ma dà luogo a una semplice infinità di coppie, se si considerano soltanto quelle giacenti nel piano di polarizzazione del vettore dato, e a una doppia infinità, se si considerano tutte le possibili coppie di componenti, comunque orientati nello spazio.

Nella memoria sono poste in evidenza alcune relazioni fra gli elementi caratteristici di un componente rettilineo e quelli del relativo componente rotante di un dato vettore sinusoidale, limitatamente alla scomposizione nel piano di questo. Queste relazioni sono poi usate per risolvere alcuni casi particolari, come quelli in cui è assegnata la direzione o la fase del componente rettilineo oppure l'ampiezza o la direzione in un dato istante del componente rotante.

Più in generale è anche considerata assegnata la direzione del componente rettilineo o la giacitura del piano del componente rotante, indipendentemente dal piano di polarizzazione del vettore sinusoidale.

La trattazione, svolta per via geometrica e per via algebrica, limitatamente ai problemi di primo grado, porta un utile contributo alla conoscenza delle proprietà dei vettori sinusoidali e pertanto si ritiene il lavoro degno di essere inserito nella collezione delle memorie di questa Accademia.

La Commissione

RINALDO SARTORI
CATALDO AGOSTINELLI.

SCOMPOSIZIONE DEI VETTORI SINUSOIDALI

Memoria di Giovanni Fiorio
presentata dal Socio corrisp. Rinaldo Sartori
nell'adunanza del 17 Giugno 1959

Riassunto. — *Si considera la scomposizione di un generico vettore sinusoidale in due addendi: uno con polarizzazione rettilinea ed uno con polarizzazione circolare. Dopo una discussione sulle condizioni necessarie e sufficienti a rendere determinato il problema, sia nello spazio, sia nel piano di polarizzazione del vettore sinusoidale da scomporre, si svolge più ampiamente la trattazione della scomposizione nel piano. Relativamente a questa, vengono enunciate e dimostrate sei proprietà generali, e risolti i problemi corrispondenti a quattro condizioni particolari. Per la scomposizione in componenti comunque orientati nello spazio, si affrontano soltanto i problemi corrispondenti a due condizioni particolari.*

1. Introduzione.

I vettori sinusoidali sono stati oggetto di uno studio sistematico, che ha messo in luce la possibilità di una loro corrispondenza biunivoca con i vettori complessi. Per le definizioni, le proprietà, le operazioni algebriche o infinitesimali finora esaminate, si fa diretto riferimento agli studi del prof. R. Sartori (1).

Si riportano qui per comodità soltanto alcune notizie di carattere generale.

Un vettore sinusoidale può essere definito come un vettore le cui componenti cartesiane sono funzioni sinusoidali isofrequenziali del tempo. Se un suo estremo rimane fisso nello spazio, l'altro estremo risulta mobile

(1) *a*) R. Sartori, *Uso dei vettori complessi per lo studio dei vettori alternanti sinusoidali*, « Commentationes della Pontificia Achademia Scientiarum », vol. XI, n. 7, 1947, pp. 241-270. — *b*) R. Sartori, *Vettori complessi nello studio dei campi elettromagnetici sinusoidali*, « L'Elettrotecnica ». vol. XXV, n. 2, 1948, pp. 57-73.

su una traiettoria ellittica, il cui centro coincide con l'estremo fisso; la legge cinematica dall'estremo mobile è quella del moto elastico [2].

Quanto segue costituisce un complemento ad una limitata parte della teoria dei vettori sinusoidali, poichè si riferisce alla scomposizione di un generico vettore sinusoidale in due addendi di forma particolare. Non si considerano qui perciò i campi di vettori sinusoidali, ma vettori sinusoidali applicati in un solo punto.

La scomposizione è un'operazione algebrica, lineare, definita da certe condizioni che, per il caso in esame, saranno studiate in seguito. In quanto lineare, l'operazione di scomposizione è tale che i suoi risultati possono essere sempre rappresentati con la consueta notazione complessa.

La forma particolare che si vuole attribuire ai due addendi della scomposizione in oggetto è la seguente: *un componente deve essere a polarizzazione rettilinea, e l'altro a polarizzazione circolare.*

Con espressione convenzionale si denominano i due componenti qui considerati semplicemente con i termini di *componente rettilineo* e *componente rotante*; essi verranno designati complessivamente con denominazione di coppia di *componenti misti*, e si dirà pure scomposizione in componenti misti quella presentemente considerata, per distinguerla dalle altre scomposizioni, più semplici e comunemente usate in ottica, o, più in generale, in elettromagnetismo: la scomposizione in due componenti rettilinei sfasati di un quarto di periodo [3], e quella in due componenti rotanti sullo stesso piano e con sensi di rotazione mutuamente opposti.

È ovvio che una scomposizione è tanto più utile, quanto più è semplice, ed invero la scomposizione di un vettore sinusoidale generico in due componenti che, al limite, avessero gli stessi caratteri di genericità del vettore dato, non avrebbe praticamente alcun interesse, pur essendo ovviamente sempre possibile. Tuttavia, anche se la scomposizione in oggetto è meno semplice di quelle usate tradizionalmente, sembra che la sua considerazione possa essere giustificata dai seguenti motivi: ha carattere intermedio fra i due tipi di scomposizioni comunemente usati, e quindi non è di tipo troppo generale, pur avendo, contrariamente a quelli, un certo numero di elementi indeterminati, da fissare ad arbitrio; sembra

---

(2) Per un punto, dicesi moto elastico un caso particolare di moto centrale, cioè tale che l'accelerazione del punto sia costantemente rivolta verso un altro punto fisso, detto centro del moto. Proprietà di tutti i moti centrali è la costanza della velocità areolare del vettore avente per estremi il punto fisso e quello mobile. Proprietà caratteristica del moto elastico è la costante proporzionalità del modulo dell'accelerazione con la distanza del punto mobile dal centro del moto.

(3) Questa scomposizione è anche usata per la rappresentazione complessa dei vettori sinusoidali.

inoltre avere qualche utilità nello studio, che si intende svolgere in seguito, dei prodotti fra vettori sinusoidali.

È certamente possibile pensare ancora ad altri tipi di scomposizione di un vettore sinusoidale: ad esempio in due componenti rotanti, polarizzati su piani diversi; in un componente rettilineo ed un componente ellittico della stessa eccentricità del vettore dato, ecc.

La serie di tipi possibili di scomposizione risulta, com'è ovvio, teoricamente infinita, pur essendo pochi i tipi che, per la loro semplicità o per particolari proprietà, possono offrire un certo interesse. Non è nell'intenzione di esaminare altri tipi all'infuori di quello precedentemente proposto, il quale ha sufficienti elementi indeterminati per dar luogo a vari problemi particolari; questi assumono aspetto diverso a seconda delle ulteriori condizioni, che possono essere stabilite per rendere definita la forma della scomposizione.

2. Considerazioni generali.

2.1. – Discussione preliminare.

È di primario interesse la ricerca di un criterio che permetta di giudicare quali caratteristiche devono avere le ulteriori condizioni da stabilirsi, affinchè esse siano necessarie e sufficienti a definire la scomposizione di un generico vettore sinusoidale in componenti misti.

In altri termini ci si propone di stabilire quanti gradi di libertà possiede la suddetta scomposizione (4).

Si considerano due casi:

a) *i due componenti misti possono essere comunque orientati nello spazio;*

b) *essi devono giacere sul piano di polarizzazione del vettore dato.*

---

(4) Il numero di gradi di libertà della scomposizione coincide ovviamente con l'ordine di infinito dell'insieme di tutte le coppie di componenti misti di un vettore sinusoidale determinato, ossia al numero di dimensioni di uno spazio, i cui punti possono essere messi in corrispondenza biunivoca con le possibili coppie dei componenti in oggetto. Per definire perciò la scomposizione, è necessario e sufficiente fornire ulteriori relazioni scalari indipendenti in numero uguale ai gradi di libertà: relazioni scalari particolarmente semplici possono essere le uguaglianze di certi parametri, relativi ai componenti cercati, fra loro o con determinati numeri reali. Inoltre il numero di gradi di libertà di un vettore sinusoidale generico, o particolare, è il numero di parametri atti a definirlo in un certo sistema di riferimento. Si può così, ad esempio, constatare che un vettore sinusoidale generico nello spazio tridimensionale, sempre supposto con un estremo fisso, ha sei gradi di libertà; che un vettore rotante nello spazio ne ha quattro, come pure un vettore sinusoidale generico nel piano, ecc...

La scomposizione di un vettore sinusoidale generico in componenti misti comunque orientati nello spazio possiede due gradi di libertà; la scomposizione in componenti misti contenuti nel piano di polarizzazione del vettore sinusoidale dato possiede un grado di libertà.

Infatti il numero di gradi di libertà di vettori sinusoidali generici, o particolari, nello spazio, o su un piano, è dato, per quanto interessa la presente dimostrazione, dalla Tabella I.

TABELLA I.

Tipo del vettore sinusoidale	Dominio di esistenza	Numero di gradi di libertà
generico	nello spazio	6
rettilineo	» »	4
rotante	» »	4
generico	nel piano	4
rettilineo	» »	3
rotante	» »	2

Si suppone ovvia la verifica di quanto contenuto nella tabella, e si considera quanto segue: una coppia di componenti misti ha, nello spazio, otto gradi di libertà, mentre il generico vettore sinusoidale ne ha sei: fissato questo, vi sono quindi per esso ∞^2 possibili coppie di componenti misti; una coppia di componenti misti ha, nel piano, cinque gradi di libertà, mentre il generico vettore sinusoidale ne ha quattro: fissato questo, vi sono quindi per esso ∞^1 possibili coppie di componenti misti.

Si ritiene pertanto giustificata la precedente asserzione.

2.2. – Scomposizione nello spazio.

Si considerano ora alcune fra le più semplici condizioni, che si possono stabilire per la scomposizione nello spazio:

1) condizioni corrispondenti a due relazioni scalari indipendenti (e quindi sufficienti a definire il problema): sia fissato p. es. uno dei seguenti elementi:

— giacitura del componente rotante;
— direzione del componente rettilineo;
— direzione del componente rotante in un istante determinato;

2) condizioni corrispondenti ad una relazione scalare (e quindi non sufficienti da sole a definire il problema): sia fissato per es. uno dei seguenti elementi:

— ampiezza del componente rettilineo (5);
— ampiezza del componente rotante;
— costante di fase del componente rettilineo;
— angolo fra la direzione del componente rettilineo e quella della normale al piano del rotante;
— fascio dei piani di polarizzazione in cui deve giacere il componente rotante;
— piano che deve contenere le direzioni del componente rettilineo.

Le condizioni corrispondenti ad una sola relazione scalare possono combinarsi a due a due in modo qualsiasi per ottenere così altrettante condizioni necessarie e sufficienti a definire la scomposizione. Il numero delle condizioni particolari che possono ottenersi come coppie delle sole condizioni ora elencate è quindi notevole.

2.3. – Scomposizione nel piano.

Si considerano invece ora alcune fra le più semplici condizioni, che si possono stabilire per la scomposizione nel piano: sia fissato p. es. uno dei seguenti elementi:

— direzione del componente rettilineo;
— costante di fase del componente rettilineo;
— direzione del componente rotante in un certo istante;
— ampiezza del componente rotante.

Non si cita la condizione che sia fissata l'ampiezza del componente rettilineo, perchè si dimostrerà che essa non può essere scelta a caso, ma dipende strettamente dal vettore sinusoidale da scomporre.

---

(5) Si denominerà « modulo istantaneo » di un vettore sinusoidale (in particolare rettilineo) lo scalare che caratterizza la sua intensità in un certo istante; « ampiezza » il valore massimo del modulo istantaneo di un vettore rettilineo, o il valore costante del modulo di un vettore rotante; « posizione » di un vettore sinusoidale generico, o rettilineo, o rotante, il vettore dato con tutti i suoi elementi: intensità, direzione e verso, quale esso è in un certo istante. Per un vettore rettilineo, in relazione ad un riferimento temporale determinato, si dirà poi « costante di fase », com'è d'uso, il prodotto della pulsazione per l'intervallo di tempo fra l'origine dei tempi e l'istante immediatamente precedente, in cui il modulo istantaneo si è annullato con derivata positiva.

2.4. – Limiti degli argomenti trattati.

Per la scomposizione nel piano si tratteranno tutti i problemi definiti ciascuno da una delle quattro ultime condizioni elencate. Per la scomposizione nello spazio si tratteranno solo i problemi definiti dalle due prime condizioni di tipo 1) par. 2.2. Le soluzioni possono sempre essere dedotte per via analitica o geometrica. Si può prevedere che i problemi relativi a tutte le condizioni semplici elencate sono riconducibili alla risoluzione di sistemi di equazioni razionali, e tuttavia non è immediatamente prevedibile il grado di questi sistemi. La trattazione per via puramente analitica verrà svolta, per ciascun problema, solo se esso è riconducibile ad un sistema di equazioni lineari: se ciò non accade, ci si limita all'indicazione del procedimento per via geometrica, ed alla deduzione delle espressioni analitiche dei componenti, facendo uso del procedimento e dei risultati di questa.

Nel caso della scomposizione nel piano risulta agevole una discussione di tipo generale, che metta in luce delle proprietà sulle relazioni fra i componenti misti di un determinato vettore sinusoidale, visti nel loro insieme, e quindi senza riferimento ad una particolare condizione. La stessa cosa sembra, per la scomposizione nello spazio, molto più complessa, ed inoltre più riposte sembrano le eventuali proprietà generali: la discussione non verrà svolta e l'argomento resta perciò aperto. Non si è ritenuto di poter considerare la scomposizione nel piano come caso particolare di quella nello spazio, sia perchè quest'ultima non è stata trattata con sufficiente completezza, sia perchè si è notato che alcuni risultati relativi alla scomposizione nello spazio conducono, qualora applicati alla scomposizione nel piano, ad espressioni indeterminate.

3. Proprietà relative alla scomposizione nel piano.

3.1. – Relazioni fra direzione del componente rettilineo ed ampiezza del rotante.

Si suppone di aver scomposto un vettore sinusoidale $\boldsymbol{A}(t)$ (6) in una coppia qualsiasi di componenti misti, giacenti sul suo piano di polarizzazione. Si può allora considerare il moto elastico dell'estremo del vettore

(6) Anche qui, come negli studi di nota (1), si adotterà il grassetto per indicare « vettore », ed il segno ¯ per indicare « complesso ». Il segno _ (sottolineatura) indica il « complesso coniugato » dell'ente a cui si riferisce. Solo nel caso in cui il vettore debba essere caratterizzato dai punti costituenti i suoi estremi, il suo segno caratteristico sarà: →, sopra la coppia di simboli (lettere maiuscole) che indicano quegli estremi: in tal caso trattasi però sempre di vettore reale.

sinusoidale come la composizione dei due moti, armonico e circolare uniforme di ugual periodo, degli estremi mobili dei due componenti. Si supponga perciò di far coincidere il punto di applicazione del componente rotante con l'estremo mobile del componente rettilineo, il cui altro estremo è fisso, e considerare istante per istante la loro somma, che è il vettore sinusoidale $\boldsymbol{A}(t)$ dato.

La fig. 1 vuole illustrare questo aspetto cinematico del fenomeno: in essa sia γ l'ellisse di $\boldsymbol{A}(t)$, il cui verso di rotazione sia ad es. antiorario;

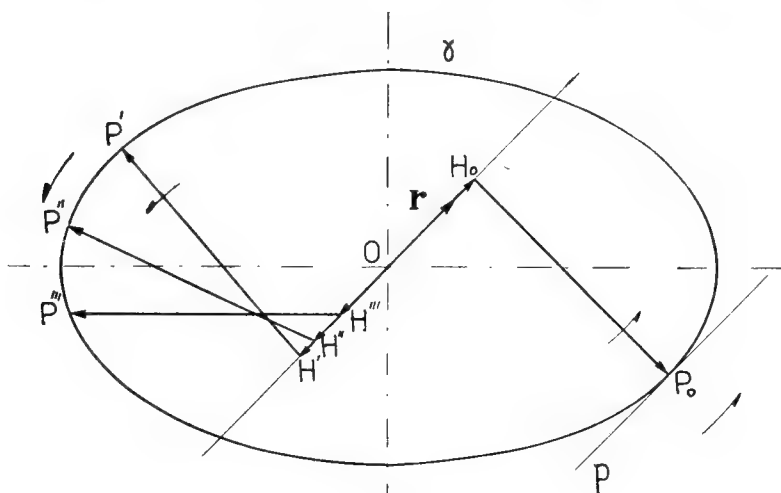



Fig. 1.

sia $\boldsymbol{r}$ uno dei due versori della direzione del componente rettilineo; siano poi $\overrightarrow{OH'}$, $\overrightarrow{OH''}$, $\overrightarrow{OH'''}$ le posizioni del componente rettilineo in tre istanti successivi nel tempo ed $\overrightarrow{H'P'}$, $\overrightarrow{H''P''}$, $\overrightarrow{H'''P'''}$ le posizioni del componente rotante (di verso pure antiorario) nello stesso istante: $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$, $\overrightarrow{OP'''}$ saranno quindi le posizioni corrispondenti del vettore $\boldsymbol{A}(t)$.

Se si traccia una retta p, parallela alla direzione di $\boldsymbol{r}$ e tangente all'ellisse γ nel punto P_0, la posizione $\overrightarrow{OP_0}$ e le corrispondenti $\overrightarrow{OH_0}$ ed $\overrightarrow{H_0P_0}$ dei componenti possono servire ad alcune semplici considerazioni.

La velocità dell'estremo di $\boldsymbol{A}(t)$ in P_0 è parallela ad $\boldsymbol{r}$; quella dell'estremo del componente rettilineo in H_0 è pure, per definizione, parallela ad $\boldsymbol{r}$; lo dovrà pur essere quella dell'estremo del componente rotante, anche considerandone l'altro estremo fisso. Si deduce che $\overrightarrow{H_0P_0}$ appartiene ad una perpendicolare alla direzione di $\boldsymbol{r}$.

Si può perciò affermare:

Proprietà 1. – *La posizione del vettore sinusoidale, per cui il componente rotante è perpendicolare al rettilineo, è quella corrispondente al punto*

dell'ellisse per il quale la retta tangente è parallela alla direzione del componente rettilineo stesso.

Inoltre, osservando la fig. 1, è immediatamente intuibile la:

PROPRIETÀ 2. – *L'ampiezza del componente rotante è eguale alla massima proiezione del vettore sinusoidale sulla direzione ortogonale a quella del componente rettilineo.*

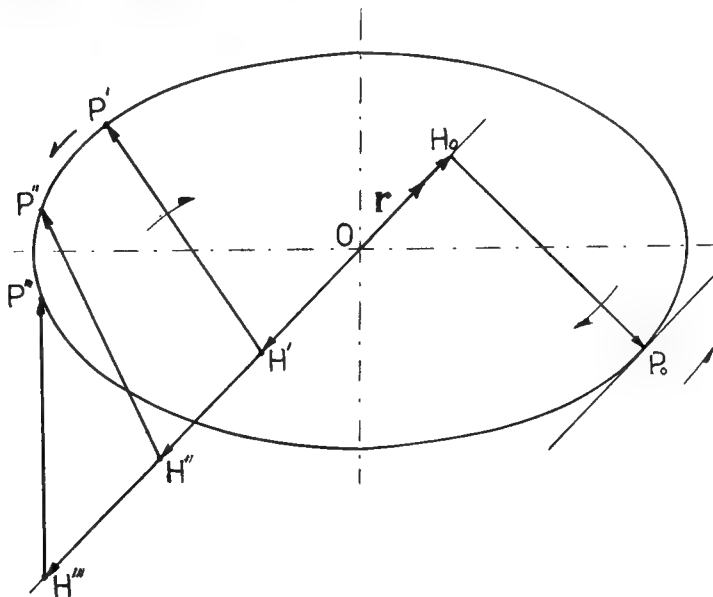



Fig. 2.

Fra le possibili coppie di componenti di un generico vettore sinusoidale, vi sono anche quelle il cui componente rotante ha senso di rotazione opposto a quello del vettore sinusoidale in oggetto: esiste cioè un insieme ∞^1 di coppie con componente rotante in un senso, e un insieme ∞^1 di coppie con componente rotante in senso opposto. Un esempio di quest'ultimo tipo è dato in fig. 2. Si denomineranno, con ovvio significato, « concordi » e « discordi » i componenti rotanti dei due insiemi suddetti (7).

(7) Vi è un caso particolare in cui non è possibile parlare di componente rotante concorde, o discorde, ed è il caso in cui il vettore da scomporre sia rettilineo; ma per esso non è nemmeno definito il piano di polarizzazione, che può essere uno qualsiasi del fascio che ha per asse la direzione stessa del vettore in esame; il problema ha un grado di libertà in più. Fissato però il piano di scomposizione ed una sua faccia come positiva, si potrà comunque parlare di componenti rotanti in verso orario e antiorario.

Anche per le coppie con componente rotante discorde valgono ovviamente le proprietà 1 e 2.

Si può quindi affermare che:

PROPRIETÀ 3. – *Se due coppie di componenti misti di un generico vettore sinusoidale sono corrispondenti a componenti rettilinei aventi una medesima direzione ed a componenti rotanti in verso mutuamente opposto, questi ultimi hanno ampiezze uguali fra loro.*

Se poi si vuol studiare la legge di variazione dell'ampiezza dei componenti rotanti al variare della direzione dei componenti rettilinei, si può

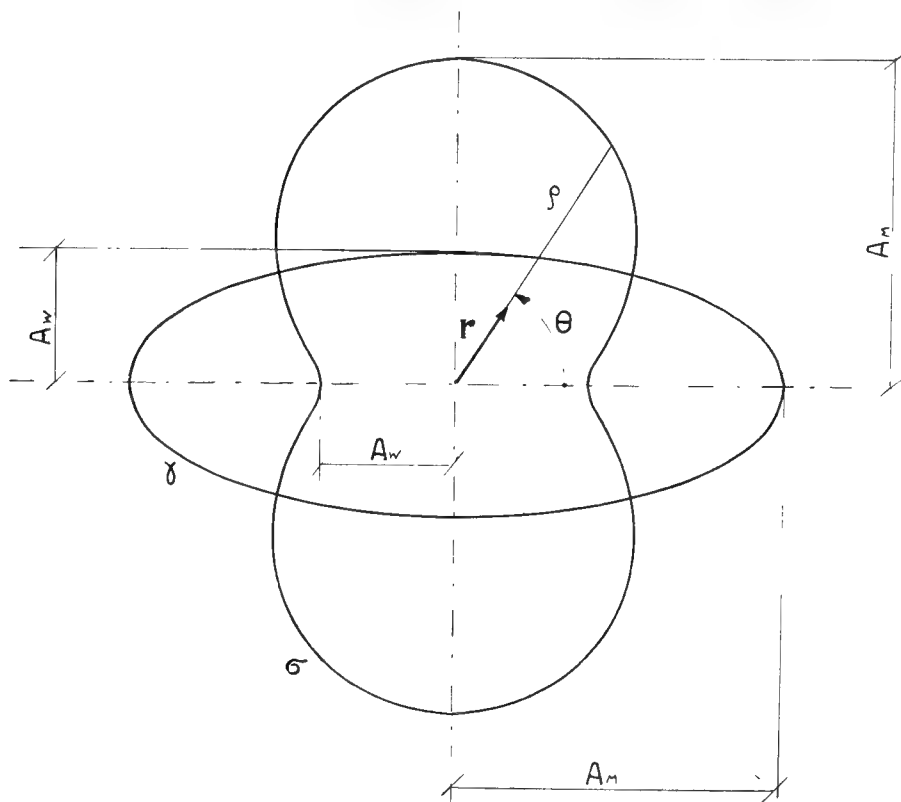



Fig. 3.

considerare una diagramma polare che, per ogni angolo θ formato dalla direzione del rettilineo con una direzione prefissata, ad es. quella dell'asse maggiore dell'ellisse γ del vettore sinusoidale da scomporre, associ una ampiezza ϱ del rispettivo componente rotante. Tale diagramma è una curva (σ) del 4^{o} ordine, disegnata in fig. 3 insieme all'ellisse γ, per mo-

strarne la posizione relativa; la sua equazione in coordinate polari risulta (v. Append. 1):

$$\varrho = \sqrt{A_M^2 \operatorname{sen}^2 \theta + A_W^2 \cos^2 \theta} \tag{1}$$

ove con A_M ed A_W si sono indicati rispettivamente il raggio massimo e minimo dell'ellisse.

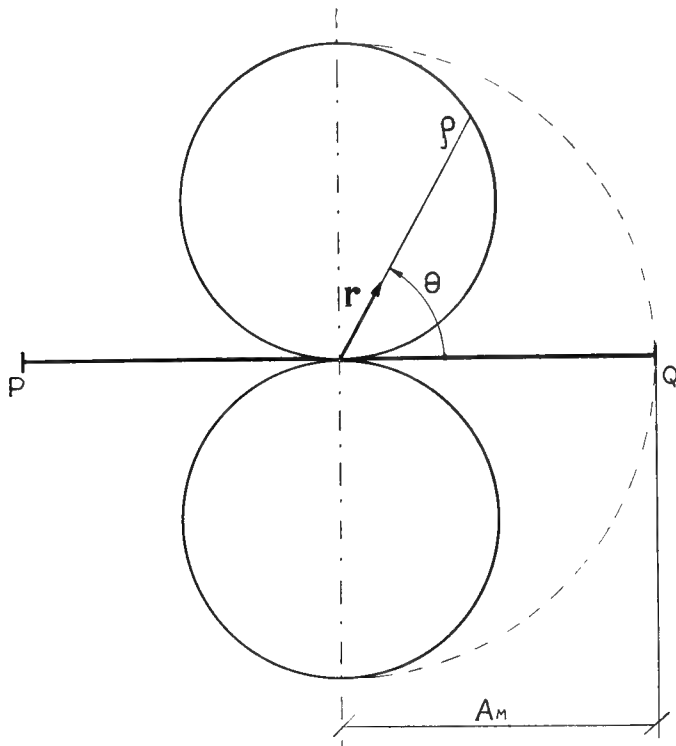



Fig. 4.

Nel caso particolare in cui il vettore da scomporre sia rotante, la curva σ è un cerchio coincidente con quello descritto dall'estremo del vettore stesso. Se invece il vettore da scomporre è rettilineo, la curva σ è l'insieme di due cerchi, come indica la fig. 4, ove il segmento PQ indica il luogo degli estremi del vettore polarizzato rettilineamente. Infatti l'espressione (1) diviene:

$$\varrho = A_M \operatorname{sen} \theta \,. \tag{1 bis}$$

Si può vedere dalla fig. 4 che il componente rotante è nullo, com'è ovvio, solo se si scompone un vettore polarizzato rettilineamente, e si impone al componente rettilineo la stessa direzione del vettore dato: in tal caso il componente rettilineo coincide con quest'ultimo.

3.2. – Relazioni fra direzione del componente rettilineo e sua costante di fase.

Si considerino due coppie particolari di componenti misti, e cioè quelle per cui il componente rotante sia concorde e di ampiezza eguale al semiasse maggiore ed a quello minore dell'ellisse di $\boldsymbol{A}(t)$; si supponga, per queste

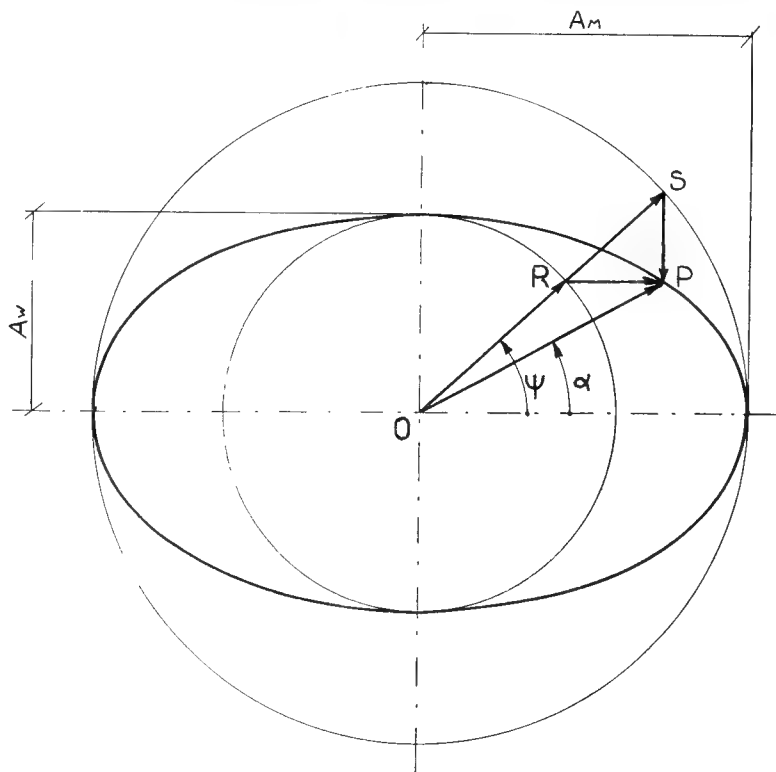



Fig. 5.

due coppie di componenti misti, di far coincidere questa volta il punto di applicazione di un componente rettilineo sull'estremo mobile del rispettivo componente rotante (fig. 5). In essa, se P è l'estremo mobile del vettore $\boldsymbol{A}(t)$ in una certa posizione, le posizioni delle due coppie considerate dei corrispondenti componenti sono: $\overrightarrow{OR}$ (rotante) ed $\overrightarrow{RP}$ (rettilineo), oppure $\overrightarrow{OS}$ (rot.) e $\overrightarrow{SP}$ (rett.), le quali godono della seguente proprietà: i punti R ed S stanno su una medesima semiretta uscente da O; $\overrightarrow{RP}$ ed $\overrightarrow{SP}$ giacciono su rette parallele rispettivamente agli assi maggiore e minore dell'ellisse. Queste proprietà sono direttamente collegate a note proprietà dell'ellisse, e si ritengono perciò dimostrate. L'angolo ψ formato da $\overrightarrow{OR}$ con una semiretta stabilita (ad es. quella dell'asse maggiore, verso destra)

è ovviamente proporzionale al tempo impiegato dal punto P a percorrere l'arco di ellisse, contato a partire dal punto di intersezione con la semiretta di riferimento. Si può dire quindi che ψ misura anche un angolo nel tempo, o « angolo cinematico », relativo al moto elastico di P. Angoli cinematici ed angoli geometrici relativi allo stesso punto P (rispettiv. ψ

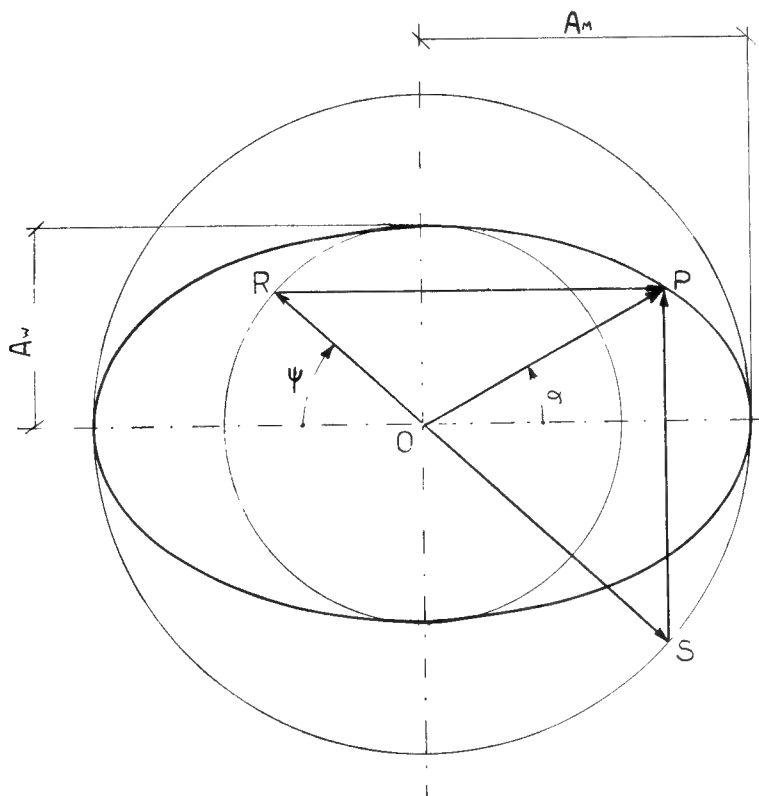



Fig. 6.

ed α di fig. 5) coincidono solo nel caso di vettore polarizzato circolarmente. Altrimenti è:

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\psi \frac{A_W}{A_M} \tag{2}$$

ove A_W e A_M sono rispettivamente i raggi minimo e massimo dell'ellisse [8].

---

[8] Le coppie con componenti rotanti discordi e di ampiezze eguali ancora ad A_M ed A_W sono illustrate in fig. 6. Per definire gli angoli nello spazio in funzione degli angoli nel tempo, queste coppie sono meno adatte, pur essendo ciò ancora possibile, come mostra la figura stessa.

Tornando ora ad una generica coppia di componenti misti, si può dimostrare (v. Append. 1) quanto segue (fig. 7).

PROPRIETÀ 4 *a*. – *Dato un vettore sinusoidale, e quindi la sua ellisse di polarizzazione, sia* θ *l'angolo formato dalla direzione del componente rettilineo considerato con l'asse maggiore di quella; le posizioni del vettore, per le quali il componente rettilineo in esame può annullarsi, sono quelle sfasate di un medesimo angolo cinematico* $\psi = \theta$, *in anticipo ed in ritardo rispetto alle due posizioni del vettore giacenti sull'asse minore.*

Le posizioni a cui si accenna nella proprietà ora enunciata sono quattro: $\overrightarrow{OZ}'$, $\overrightarrow{OZ}''$, $\overrightarrow{OZ}'''$, $\overrightarrow{OZ}^{IV}$. Due posizioni diametralmente opposte corrispondono alla coppia avente il componente rotante concorde, e le altre due a quella con il componente rotante discorde. Si tratta ora di distinguerle. A tale scopo (v. ancora Append. 1) si può enunciare la seguente proprietà.

PROPRIETÀ 4 *b*. – *Considerando i quadranti determinati dagli assi principali dell'ellisse di polarizzazione di un vettore sinusoidale, e la coppia di quelli, opposti fra loro, in cui giace la direzione del componente rettilineo, si può affermare che tale coppia di quadranti contiene le posizioni relative*

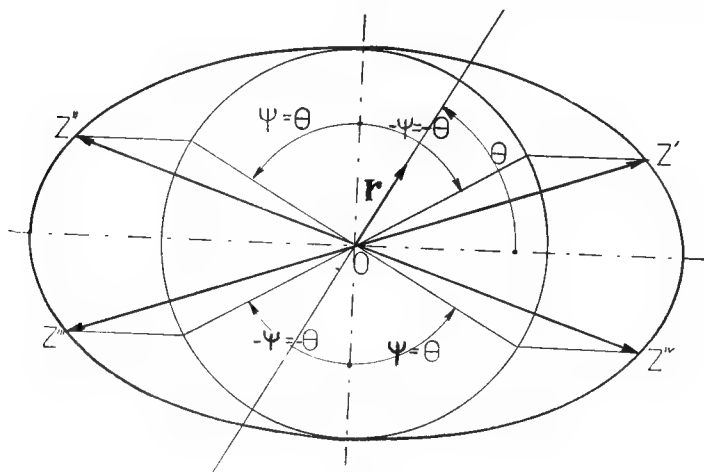



Fig. 7.

all'annullarsi del componente rettilineo corrispondente al rotante concorde ($\overrightarrow{OZ}'$ *e* $\overrightarrow{OZ}'''$ *di fig.* 7); *l'altra coppia di quadranti al rotante discorde* ($\overrightarrow{OZ}''$ *e* $\overrightarrow{OZ}^{IV}$ *di fig.* 7).

Se ora si considera il versore $\boldsymbol{r}$ della direzione del componente rettilineo, si può anche fissare il segno del modulo istantaneo di questo com-

ponente, supponendolo positivo quando è concorde con $\boldsymbol{r}$. Allora si può anche parlare di costante di fase nel senso di nota (5). Per tutte le considerazioni che interessano la costante di fase del componente rettilineo è utile tener presente la seguente:

PROPRIETÀ 4 *c*. – *Considerando i semipiani limitati dall'asse minore dell'ellisse di polarizzazione di un vettore sinusoidale, quello di essi che contiene il versore* $\boldsymbol{r}$, *contiene pure due posizioni* ($\overrightarrow{OZ'}$ *e* $\overrightarrow{OZ^{IV}}$ *di fig.* 7) *del vettore sinusoidale dato, per le quali il componente rettilineo si annulla con derivata rispettivamente positiva o negativa a seconda se, trovandosi in esse, il vettore ha modulo crescente o decrescente* (9).

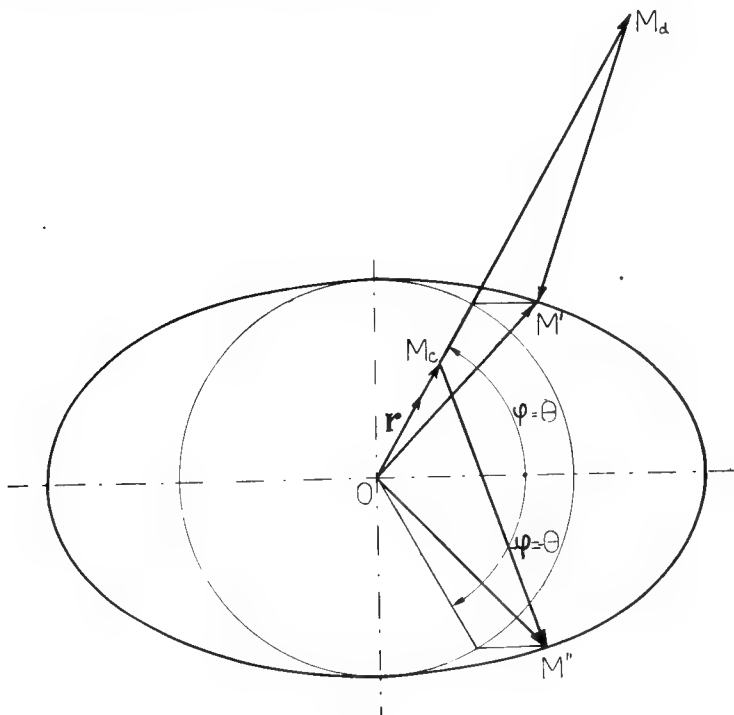



Fig. 8.

Il caso particolare in cui il versore $\boldsymbol{r}$ giace su uno degli assi principali dell'ellisse, porta a coincidere a due a due le posizioni per le quali si annulla il componente rettilineo.

---

(9) Questo criterio non ha senso se il vettore da scomporre è rotante; ma in tal caso vi è componente rettilineo solo con componente rotante in senso opposto e la scomposizione assume caratteri così particolari, che si suppone ogni cosa evidente.

Si ritorna in tal modo ai casi di fig. 5 e fig. 6, per i quali non sembra necessario insistere ulteriormente.

I diametri coniugati a quelli indicati con $Z'Z'''$ e $Z''Z^{IV}$ in fig. 7 contengono le posizioni del vettore sinusoidale, quando i rispettivi componenti rettilinei, aventi la direzione di $\boldsymbol{r}$, sono massimi.

La fig. 8 riporta le due posizioni $\overrightarrow{OM'}$ e $\overrightarrow{OM''}$ corrispondenti agli istanti in cui sono massimi e positivi i componenti rettilinei, corrispondenti rispettivamente ai componenti rotanti in senso concorde e discorde (gli estremi dei suddetti componenti rettilinei sono M_c e M_d rispettivamente).

3.3. – Ampiezze dei componenti rettilinei.

Si enunciano due proprietà relative ai componenti rettilinei, che verranno dimostrate in Append.: 1.

Proprietà 5 *a*. – *In tutte le coppie di componenti misti di un determinato vettore sinusoidale, nelle quali il componente rotante ha un senso di rotazione fisso, i componenti rettilinei hanno ampiezza costante.*

Proprietà 5 *b*. – *L'ampiezza costante di tutti i componenti rettilinei, appartenenti alle coppie di componenti misti, per le quali i relativi componenti rotanti sono concordi, o discordi, nei confronti del vettore sinusoidale da scomporre, è uguale rispettivamente alla differenza e alla somma fra raggio massimo A_M e raggio minimo A_W dell'ellisse di quello.*

Così le due ampiezze dei componenti rettilinei coincidono, se il vettore dato è rettilineo, ed anzi coincidono con la sua ampiezza. Se il vettore dato è rotante, le ampiezze dei componenti rettilinei sono rispettivamente una nulla, e una doppia di quella del vettore dato.

3.4. – Relazioni fra direzione e modulo istantaneo dei vari componenti rettilinei, relativi ad una posizione determinata del vettore da scomporre.

Si consideri una determinata posizione $\overrightarrow{OP}$ di un vettore sinusoidale. Si vuol studiare forma e posizione del diagramma polare che, per ogni direzione del componente rettilineo, dà il modulo istantaneo ed il verso di questo, riferiti ovviamente alla posizione $\overrightarrow{OP}$ prescelta del vettore sinusoidale. Si può dimostrare (v. Append. 1) la seguente proprietà (fig. 9).

Proprietà 6. – *Data una posizione $\overrightarrow{OP}$ di un generico vettore sinusoidale, il luogo degli estremi delle posizioni dei componenti rettilinei, corrispondenti alla posizione $\overrightarrow{OP}$ al variare della loro direzione, è una coppia di*

cerchi (c_1 e c_2) passanti per l'estremo fisso O del vettore dato (centro dell'ellisse); un cerchio (c_1) corrisponde alle coppie di componenti col rotante in verso concorde, e l'altro (c_2) a quelle col rotante in verso discorde. I diametri

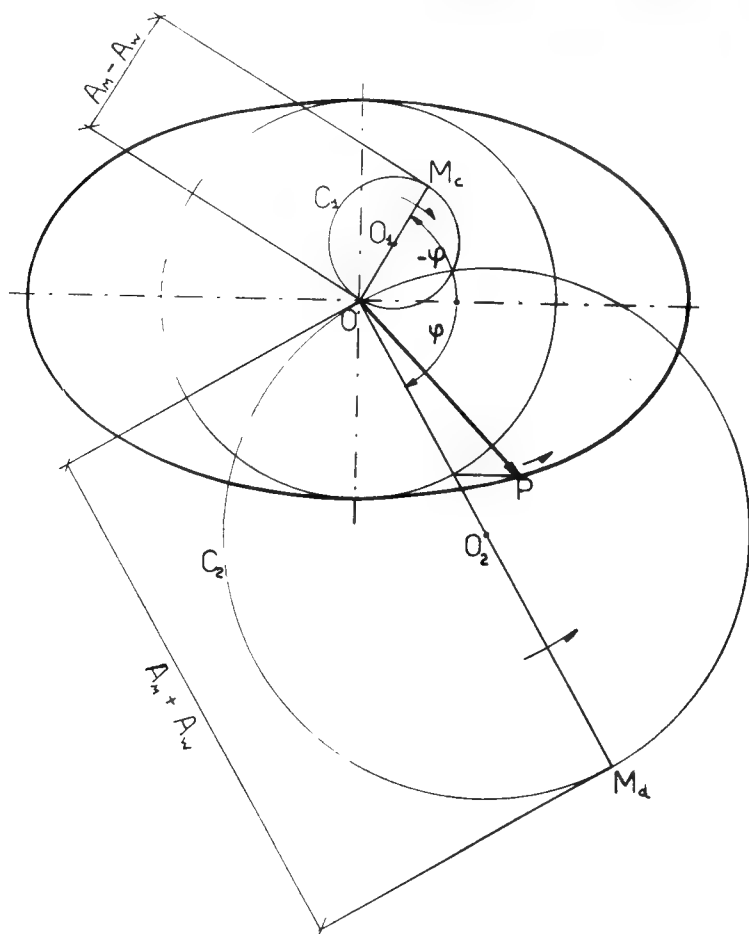



Fig. 9.

$\overrightarrow{OM_c}$ del cerchio c_1, e $\overrightarrow{OM_d}$ di c_2, coincidono con il doppio dei componenti entrambi rotanti del vettore sinusoidale, rispettivamente concorde e discorde.

Dalla proprietà 6 si possono dedurre parecchi corollari, note essendo le proprietà dei componenti rotanti (v. ancora gli studi citati in nota [1]).

Fra le proprietà fondamentali dei componenti rotanti, si ricorda che quello concorde ha ampiezza eguale alla semisomma, e quello discorde ha ampiezza eguale alla semidifferenza dei raggi rispettivamente massimo (A_M) e minimo (A_W) dell'ellisse del vettore sinusoidale; le posizioni di

questo, per cui i componenti rotanti hanno eguale direzione e verso, sono quelle corrispondenti ai raggi massimi; quelle per cui hanno eguale direzione, e verso opposto, sono quelle corrispondenti ai raggi minimi. Si deduce perciò quanto segue.

I diametri dei due cerchi c_1 e c_2 sono rispettivamente $A_M - A_W$ ed $A_M + A_W$. Se si considera l'estremo del vettore sinusoidale nel suo moto elastico, i diametri OM_c ed OM_d sopracitati, corrispondenti a ciascuna posizione di quello, ruotano con velocità costante e, rispettivamente, in senso discorde e concorde col vettore dato, rimanendo sempre simmetrici rispetto all'asse maggiore dell'ellisse. I centri O_1 e O_2 dei cerchi c_1 e c_2 sono gli estremi dei componenti entrambi rotanti. Nel moto elastico del vettore sinusoidale, il suo estremo P (supposto ora variabile) si mantiene sempre ad egual distanza da O_1 e da O_2, poichè è $\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_2}$ ed $\overrightarrow{O_2P} = \overrightarrow{OO_1}$. Ciò significa pure che le distanze massima e minima dei punti di entrambi i cerchi c_1 e c_2 dal punto P si mantengono costantemente eguali, rispettivamente ad A_M ed A_W.

4. Premesse ai problemi particolari di scomposizione nel piano.

Come accennato al par. 2.4, verranno affrontati i quattro problemi relativi alle condizioni riportate in 2.3.

La prima e la seconda condizione danno origine a problemi riconducibili ad un'equazione di primo grado: le loro soluzioni sono sempre due, solo perchè corrispondono ad una ambivalenza nel segno che può essere attribuito ad un simbolo nell'espressione risolutiva, ma questa non contiene mai termini con radicali. Le due soluzioni corrispondono a due coppie di componenti, ma una col rotante in senso orario, e l'altra in senso antiorario.

La terza e la quarta condizione danno invece origine a problemi di secondo grado. Per la ragione detta or ora, si possono avere soluzioni in numero doppio del grado del problema, ma in questo caso alcune di esse possono essere non reali. Infatti il problema relativo alla terza condizione può avere al massimo tre soluzioni, di cui due anche coincidenti, e al minimo una soluzione. Quello relativo alla quarta condizione può avere quattro soluzioni, eventualmente coincidenti a due a due, o non averne alcuna.

5. Scomposizione nel piano. Componente rettilineo avente direzione prefissata.

Si consideri il versore perpendicolare al piano di polarizzazione del vettore da scomporre. Sia esso $\boldsymbol{u}$.

Con ciò viene definita anche una faccia positiva del piano considerato, con le consuete convenzioni. Anche il versore può però essere assunto

come elemento per definire il piano del vettore sinusoidale e dei suoi componenti. Dato comunque il versore $\boldsymbol{u}$ e quindi anche la faccia positiva del piano, i componenti rotanti in versi opposti saranno riferiti ciascuno ad una faccia, e quindi ad uno o all'altro dei versi suddetti, ma si stabilirà che, per la faccia alla quale sono riferiti, il loro verso sia sempre antiorario.

Le formule dei componenti saranno scritte soltanto in riferimento al versore $\boldsymbol{u}$, e con ciò si otterrà una coppia di essi; l'altra potrà sempre essere ottenuta cambiando il segno ad $\boldsymbol{u}$. Questa osservazione vale per tutti i problemi riconducibili ad equazioni lineari, e cioè anche a quello relativo alla condizione che sia prefissata la costante di fase del componente rettilineo.

Come già stabilito in precedenza, $\boldsymbol{r}$ è il versore della direzione del componente rettilineo, ed il suo verso è quello dei moduli istantanei positivi. Il vettore sinusoidale da scomporre verrà qui indicato con notazione complessa, cioè con $\bar{\boldsymbol{A}}$, il componente rotante con $\bar{\boldsymbol{R}}_A$, ed il rettilineo con $\bar{\lambda}\boldsymbol{r}$, ove $\bar{\lambda}$ è uno scalare complesso (10).

5.1. – Determinazione analitica dei componenti.

Per quanto detto sopra, si può scrivere:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{R}}_A + \bar{\lambda}\boldsymbol{r} . \tag{3}$$

Considerando le proprietà dei vettori rotanti, e ricordando la convenzione fatta per il loro verso di rotazione, si ha:

$$j\boldsymbol{u} \wedge \bar{\boldsymbol{A}} = - \bar{\boldsymbol{R}}_A + j\boldsymbol{u} \wedge \bar{\lambda}\boldsymbol{r} . \tag{4}$$

Sommando la (3) con la (4) si ottiene poi:

$$(1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}} = (1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\bar{\lambda}\boldsymbol{r} , \tag{5}$$

ed infine, moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\boldsymbol{r}$, che è noto:

$$\bar{\lambda} = \boldsymbol{r} \times (1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}} . \tag{6}$$

Dalla (3) e dalla (6), si può allora ottenere l'espressione del componente rotante (v. append.: 2)

$$\bar{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{r} = \{1 - \boldsymbol{r}[(1 - j\boldsymbol{u} \wedge)\boldsymbol{r} \times]\}\bar{\boldsymbol{A}} = \\ = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}})(j + \boldsymbol{u} \wedge)\boldsymbol{r} . \tag{7}$$

(10) Si adotta la convenzione che i termini reali siano quelli che, in funzione del tempo, sono moltiplicati per sen ωt, e gli immaginari per cos ωt.

Se nelle (6) e (7), che danno una soluzione del problema, si cambia il segno di $\boldsymbol{u}$, si ottiene la seconda coppia di componenti misti che soddisfa la condizione posta.

5.2. – Costruzione geometrica dei componenti. Primo procedimento.

Dato il vettore sinusoidale nella sua posizione $\overrightarrow{OP}$ (fig. 10), si esegua prima la costruzione delle corrispondenti posizioni dei suoi componenti

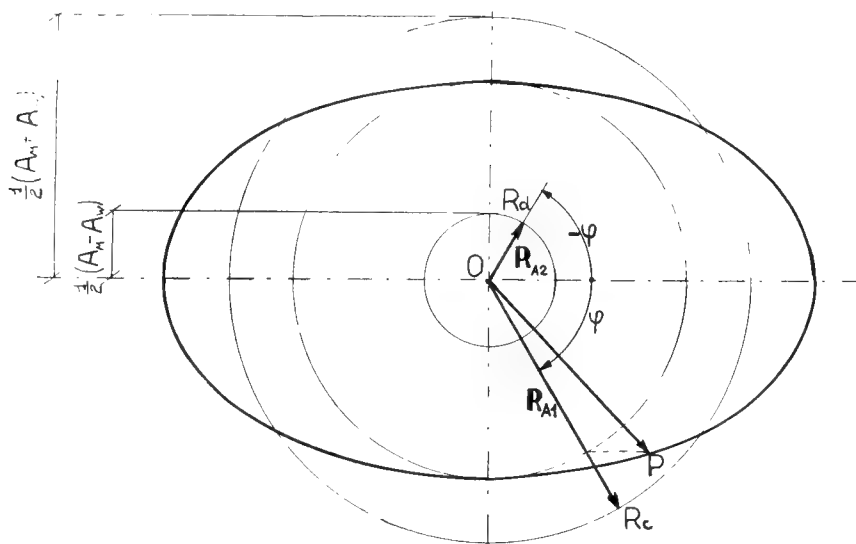



Fig. 10.

entrambi rotanti ([11]), il cui procedimento, anche per quanto detto in 3.4, si suppone ormai noto. Siano $O\vec{R}_c$ ed $O\vec{R}_d$ questi componenti, che verranno anche chiamati rispettivamente $\boldsymbol{R}_{A1}$ ed $\boldsymbol{R}_{A2}$. Noti i componenti entrambi rotanti, la costruzione delle due coppie di componenti misti si esegue facilmente, come indicato in fig. 11.

La fig. 11 *a* indica la costruzione dei componenti misti con il rotante concorde. Si scomponga $\boldsymbol{R}_{A1}$ (che è concorde) in due addendi, rotanti solidalmente con esso, uno dei quali ($\boldsymbol{R}'_{A1}$) di ampiezza uguale e di orientazione simmetrica a quella di $\boldsymbol{R}_{A2}$ rispetto alla retta del componente rettilineo cercato, data dal versore $\boldsymbol{r}$. L'altro addendo sia $\boldsymbol{R}''_{A1}$. La somma di $\boldsymbol{R}'_{A1}$ con $\boldsymbol{R}_{A2}$ dà il componente rettilineo cercato; $\boldsymbol{R}''_{A1}$ dà il componente rotante.

([11]) Cfr. bibl. di nota ([1]), *b*), par. 12.

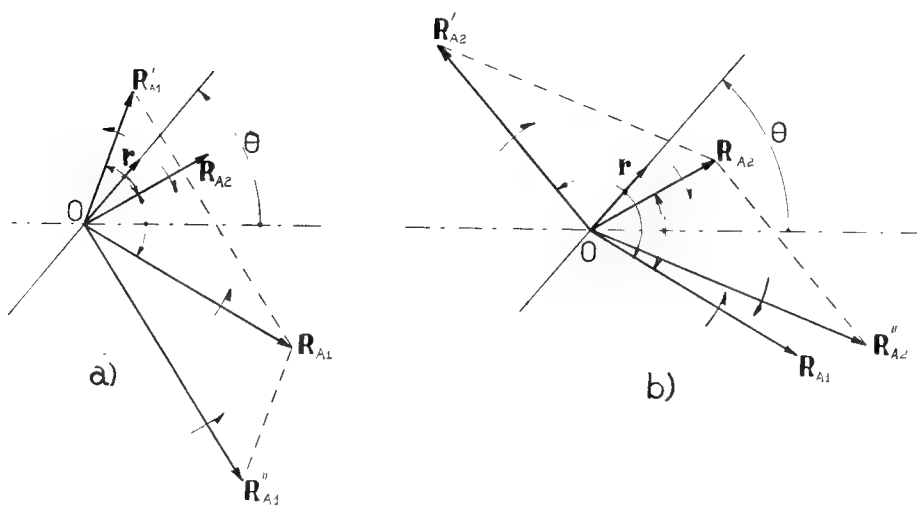



Fig. 11.

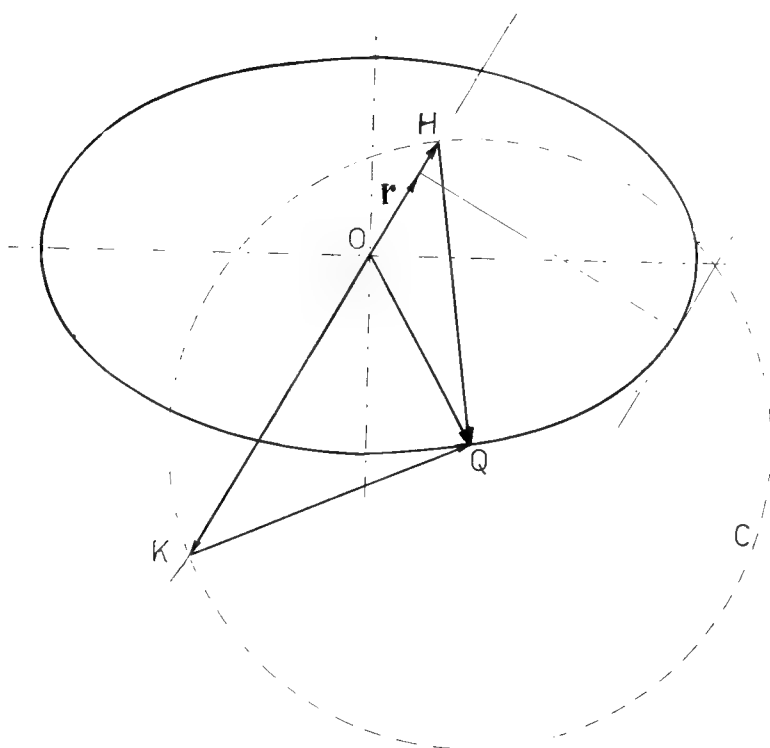



Fig. 12.

La fig. 11 *b* indica invece la costruzione dei componenti misti col rotante discorde. Si scomponga $\boldsymbol{R}_{A2}$ (che è discorde) in due addendi, rotanti solidalmente con esso, uno dei quali ($\boldsymbol{R}'_{A2}$) di ampiezza uguale, e di orientazione simmetrica a quella di $\boldsymbol{R}_{A1}$ rispetto alla retta di $\boldsymbol{r}$. L'altro addendo sia $\boldsymbol{R}''_{A2}$. La somma di $\boldsymbol{R}'_{A2}$ e di $\boldsymbol{R}_{A1}$ dà il componente rettilineo cercato. $\boldsymbol{R}''_{A2}$ dà il componente rotante.

5.3. – Costruzione geometrica dei componenti. Secondo procedimento.

Un altro procedimento per la costruzione dei componenti è quello seguito in fig. 12.

In base alle considerazioni svolte a par. 3.1., si consideri la posizione $\vec{OQ}$ del generico vettore sinusoidale; nota la direzione del componente rettilineo data da $\boldsymbol{r}$, si può dedurre, p. es. tramite il diagramma di fig. 3, l'ampiezza del rotante. Le intersezioni H e K della retta contenente $\boldsymbol{r}$, con la circonferenza c di centro Q e raggio eguale all'ampiezza del rotante, sono gli estremi delle posizioni dei componenti rettilinei relativi alla posizione $\vec{OQ}$ del vettore sinusoidale; le corrispondenti posizioni dei componenti rotanti sono $\vec{HQ}$ e $\vec{KQ}$. Le considerazioni di carattere cinematico, che permettono di giudicare quale dei due componenti rotanti ha verso concorde o discorde rispetto a quello del vettore sinusoidale, sono di assai facile deduzione.

6. Scomposizione nel piano. Componente rettilineo di cui è prefissata la costante di fase.

6.1. – Determinazione analitica dei componenti.

Poichè la costante di fase φ del componente rettilineo è l'argomento del numero complesso λ, e cioè:

$$\bar{\lambda} = \lambda e^{j\varphi} , \tag{8}$$

si può dedurre dalla (6) la seguente relazione (v. Append.: 3):

$$\boldsymbol{r} = \text{vers}\,(\boldsymbol{u} \wedge \Re e + \Im m)\bar{\boldsymbol{A}}e^{j(\pi/2-\varphi)} \tag{9}$$

ove i simboli $\Re e$ e $\Im m$ indicano rispettivamente parte reale e parte immaginaria dell'espressione che segue, cioè $\bar{\boldsymbol{A}}e^{j(\pi/2-\varphi)}$.

La (10) vale anche in segno, cioè il vettore a secondo membro è concorde con $\boldsymbol{r}$.

Anche in questo caso sono soluzioni del problema sia la (9), sia l'espressione che si ottiene da essa cambiando segno ad $\boldsymbol{u}$.

La (9) può portare ad un'espressione nulla, ma non potrà mai darsi che questo avvenga per entrambi i segni attribuibili ad $\boldsymbol{u}$. Comunque ciò può verificarsi solo se il vettore è polarizzato circolarmente, ed è ovvio che la scomposizione di questo porta, per componente rotante concorde, ad un componente rettilineo nullo.

Dalla (7) e dalla (9) si ottiene poi (v. Append.: 3):

$$\bar{\boldsymbol{R}}_A = (1 + \boldsymbol{u} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\varphi} \frac{\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \Re e + \Im m)\bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2-\varphi)}}{[(\boldsymbol{u} \wedge \Re e + \Im m)\bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2-\varphi)}]^2} \tag{10}$$

6.2. – Costruzione geometrica dei componenti.

La costruzione geometrica dei componenti, data la costante di fase del componente rettilineo, si può realizzare, usufruendo delle proprietà 4 *a*), *b*), *c*).

Fig. 13.

Sia dato il vettore sinusoidale e la sua posizione $\Im m\bar{\boldsymbol{A}}$ all'istante assunto come origine dei tempi; sia data inoltre la costante di fase φ che si vuole abbia il componente rettilineo. Si traccia allora la posizione del

vettore sinusoidale che è retrocessa dell'angolo φ nel tempo rispetto alla posizione prima considerata (fig. 13): sia questa $\boldsymbol{A}(-\varphi)$. Si costruiscono in base alla proprietà 4 *a*, le direzioni in cui possono esservi dei componenti rettilinei che si annullano in corrispondenza alla posizione $\boldsymbol{A}(-\varphi)$. Si scelgono poi i versi di queste direzioni col criterio stabilito dalle proprietà 4 *b*) e 4 *c*), e si stabiliscono i moduli istantanei dei componenti rettilinei con opportuna scelta fra quelli che si ottengono dalla costruzione accennata a par. 5.3. In fig. 13 essi sono $\overrightarrow{OM}$ ed $\overrightarrow{ON}$.

7. Scomposizione nel piano. Componente rotante con direzione e verso prefissati in un istante determinato.

7.1. – Costruzione geometrica dei componenti.

Il problema che ci si propone non si può ricondurre alla soluzione di un'equazione di primo grado; viene perciò risolto direttamente soltanto per via geometrica; il numero di soluzioni possibili è ricavabile dalle semplici costruzioni che seguono.

Si consideri in fig. 14 la posizione $\overrightarrow{OP}$ del vettore sinusoidale da scomporre, corrispondente all'istante in cui si fissa la direzione ed il verso del componente rotante. Queste siano date dal versore $\boldsymbol{w}$, applicato all'estremo P. Al variare dell'orientazione del versore $\boldsymbol{w}$, ossia di una semiretta per P, si possono avere o tre soluzioni del problema, due delle quali eventualmente coincidenti, o una soluzione sola. Infatti sono soluzioni possibili del problema le coppie di vettori che hanno un estremo su uno dei cerchi c_1 o c_2, e l'altro estremo su O e su P, rispettivamente per il componente rettilineo e per il rotante. Fissato il versore $\boldsymbol{w}$ del componente rotante, si considerano le intersezioni della semiretta opposta a $\boldsymbol{w}$ con i cerchi c_1 e c_2: esse possono essere tre (ad es. per il versore $\boldsymbol{w}$), di cui eventualmente due coincidenti (casi particolari $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$), o una sola (ad es. per il versore $\boldsymbol{w}'$).

Poichè P è in ogni caso interno al cerchio c_2 ed esterno a c_1, ed il cerchio c_2 corrisponde alle coppie di componenti con il rotante in verso discorde, si può dire che vi è sempre una sola soluzione con il rotante in verso discorde, e due, eventualmente coincidenti fra loro, o nessuna, con il rotante in verso concorde.

L'angolo β (v. fig. 14) in cui deve essere contenuto il versore $\boldsymbol{w}$, per avere soluzioni con componente rotante concorde, dipende dall'eccentricità dell'ellisse e vale (v. Append.: 4).

$$\beta = 2 \operatorname{arcsen} \frac{A_M - A_W}{A_M + A_W}. \tag{11}$$

L'angolo β tende a zero per ellissi tendenti al cerchio. In tal caso non c'è altro componente rotante concorde se non il vettore stesso, ed il componente rettilineo si annulla.

Fig. 14.

La costruzione geometrica sembra sufficientemente illustrata dalle considerazioni precedenti. Esempio di tre coppie di componenti che risolvono il problema è dato in fig. 14 dalle coppie $\overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{H'P}$; $\overrightarrow{OH''} - \overrightarrow{H''P}$; $\overrightarrow{OH'''} - \overrightarrow{H'''P}$: esse corrispondono al versore $\boldsymbol{w}$.

7.2. – Espressione analitica della direzione del componente rettilineo.

Dal procedimento geometrico si possono ricavare ad es. elementi per l'espressione del versore $\boldsymbol{r}$ del componente rettilineo. Si vuole qui esprimere soltanto l'angolo da esso formato con l'asse maggiore dell'ellisse. Si abbandona per ora la notazione complessa e si dà la posizione del vettore sinusoidale nell'istante t_0 considerato mediante l'espressione:

$$x_0 = A_M \cos \omega t_0$$

$$y_0 = A_W \operatorname{sen} \omega t_0 \,,$$

avendo supposto gli assi principali dell'ellisse coincidenti con gli assi cartesiani.

Sia k il coefficiente angolare della direzione su cui si desidera il componente rotante all'istante t_0; non tenendo conto del verso che ad essa si può attribuire, si possono ricavare i coefficienti angolari μ_c e μ_d dei componenti rettilinei corrispondenti rispettivamente ai rotanti in senso concorde e discorde. Si ottengono due soluzioni per μ_c e due per μ_d: le prime due possono essere anche coincidenti o non reali. Si ha (v. Append.: 5):

$$(12)\quad \begin{aligned} \mu_c &= \frac{1}{2A_M(\operatorname{sen}\omega t_0 - k\cos\omega t_0)}\left[(A_M - A_W)(k\operatorname{sen}\omega t_0 + \cos\omega t_0) \pm \right.\\ &\left.\pm\sqrt{(A_M - A_W)^2(k\operatorname{sen}\omega t_0 + \cos\omega t_0)^2 - 4A_MA_W(\operatorname{sen}\omega t_0 - k\cos\omega t_0)^2}\,\right]\\ \mu_d &= \frac{1}{2A_M(\operatorname{sen}\omega t_0 + k\cos\omega t_0)}\left[(A_M + A_W)(k\operatorname{sen}\omega t_0 - \cos\omega t_0) \pm \right.\\ &\left.\pm\sqrt{(A_M + A_W)^2(k\operatorname{sen}\omega t_0 - \cos\omega t_0)^2 + 4A_MA_W(\operatorname{sen}\omega t_0 + k\cos\omega t_0)^2}\,\right]. \end{aligned}$$

La scelta del senso del versore del componente rotante all'istante t_0 impone delle esclusioni nei valori di μ_c e μ_d dati dalle (12) e si suppone che tali esclusioni si possano fare di volta in volta con considerazioni alquanto elementari tenendo presente la fig. 15.

I valori accettabili di μ_c e μ_d non escludono comunque che si debba fare ancora la scelta del senso del versore $\boldsymbol{r}$. Questa non influisce però sull'espressione complessa del componente rotante, ma solo sul segno del componente rettilineo. I risultati definitivi della scomposizione si possono poi ricavare, noto $\boldsymbol{r}$, dalle (6) e (7).

8. Scomposizione nel piano. Componente rotante di ampiezza prefissata.

8.1. – Costruzione geometrica dei componenti.

Il problema ha soluzioni reali solo se l'ampiezza prefissata del componente rotante è compresa fra quelle del raggio minimo e massimo dell'ellisse del vettore da scomporre. Sia ϱ l'ampiezza del componente rotante. L'intersezione con l'ellisse del cerchio di raggio ϱ, e centro coincidente con quello dell'ellisse (fig. 16), determina quattro punti, che sono estremi delle posizioni del vettore sinusoidale, per cui si annulla il componente rettilineo. Tenendo presenti le proprietà 4, si può portare a termine la costruzione delle coppie di componenti.

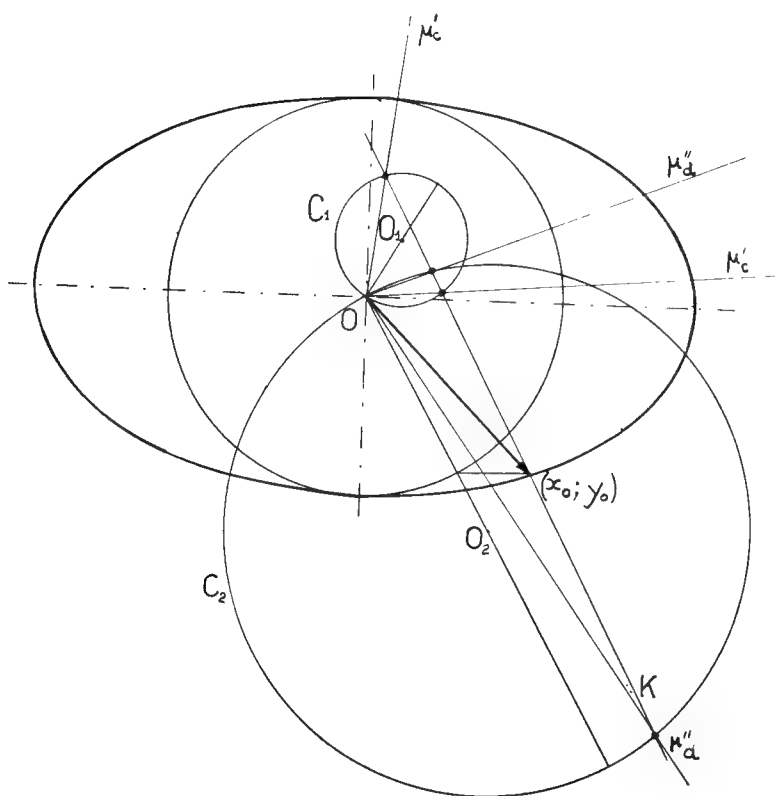



Fig. 15.

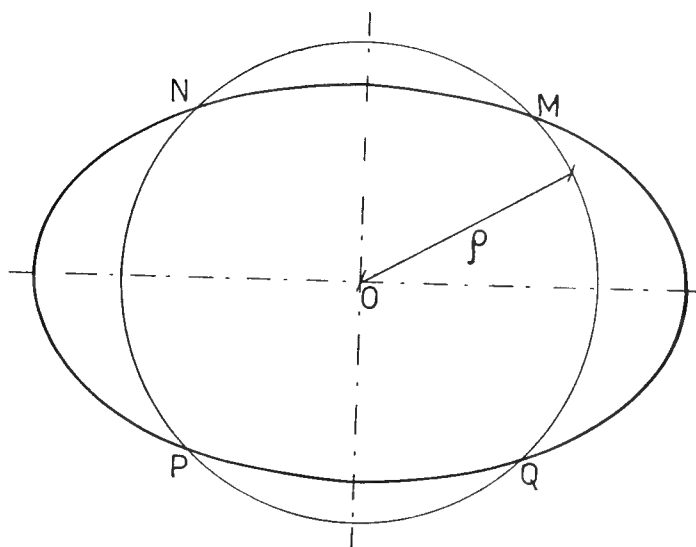



Fig. 16.

8.2. – DEDUZIONE ANALITICA DELLA DIREZIONE DEL COMPONENTE RETTILINEO.

Nota l'ellisse e l'ampiezza ϱ del componente rotante, si ricavano dalla (1) le direzioni dei corrispondenti componenti rettilinei, per applicarle poi ancora alle (6) e (7).

9. Scomposizione nello spazio. Componente rotante polarizzato su un piano prefissato.

Se $\boldsymbol{u}$ è il versore normale al piano di polarizzazione del vettore $\bar{\boldsymbol{A}}$, sia $\boldsymbol{n}$ quello normale al piano del componente rotante cercato. Sia noto $\boldsymbol{n}$ e sia sempre $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{u}$. Con le stesse convenzioni di segno adottate all'inizio di par. 5 per i sensi di rotazione dei vettori e per l'ambivalenza nel segno di $\boldsymbol{n}$, si possono ora scrivere le espressioni analitiche dei componenti.

9.1. – DETERMINAZIONE ANALITICA DEI COMPONENTI.

Del calcolo svolto in Appendice (par. 6) si danno qui soltanto i risultati:

$$\bar{\boldsymbol{R}}_A = \frac{1}{2}(1 - j\boldsymbol{n}\wedge)\left[\bar{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{A}}\,\frac{\boldsymbol{n}\times\bar{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{n}\times\underline{\boldsymbol{A}}}\right], \tag{13}$$

$$\lambda\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\left[(1 + j\boldsymbol{n}\wedge)\bar{\boldsymbol{A}} + \frac{\boldsymbol{n}\times\bar{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{n}\times\underline{\boldsymbol{A}}}(1 - j\boldsymbol{n}\wedge)\underline{\boldsymbol{A}}\right]. \tag{14}$$

Si può notare che, se fosse $\boldsymbol{n}\times\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{n}\times\underline{\boldsymbol{A}} = 0$, cioè se il piano prefissato del componente rotante coincidesse con quello del vettore sinusoidale da scomporre, le espressioni (13) e (14) sarebbero indeterminate.

Come già avvertito, ad $\boldsymbol{n}$ possono essere attribuiti entrambi i segni e si ottengono così le due soluzioni del problema.

9.2. – COSTRUZIONE GEOMETRICA DEI COMPONENTI.

Si consideri (fig. 17) l'ellisse γ (di centro O) del vettore da scomporre, e le posizioni $\mathfrak{Im}\bar{\boldsymbol{A}}$ e $\mathfrak{Re}\bar{\boldsymbol{A}}$ all'istante di riferimento e dopo un quarto di periodo. Sia η il piano dell'ellisse γ; sia poi π il piano, passante per il centro dell'ellisse, sul quale si vuole che giaccia il componente rotante. π non coincide mai con η; allora è anche ovvio che il componente rettilineo non giacerà mai nè su η, nè su π.

L'ellisse γ interseca π in due punti, ovviamente equidistanti dal centro, e cioè M ed N. Quando l'estremo del vettore $\bar{\boldsymbol{A}}$ passa per M o per N, il

componente rettilineo è nullo, perchè in ogni caso esso, se diverso da zero, giacerebbe fuori del piano π. $\vec{OM}$ ed $\vec{ON}$ sono perciò due posizioni del componente rotante, la cui traiettoria è quindi il cerchio χ, avente per raggi i vettori suddetti. Si consideri sull'ellisse γ il diametro PQ coniugato ad MN: gli estremi P e Q corrispondono alle posizioni del vettore $\bar{A}$

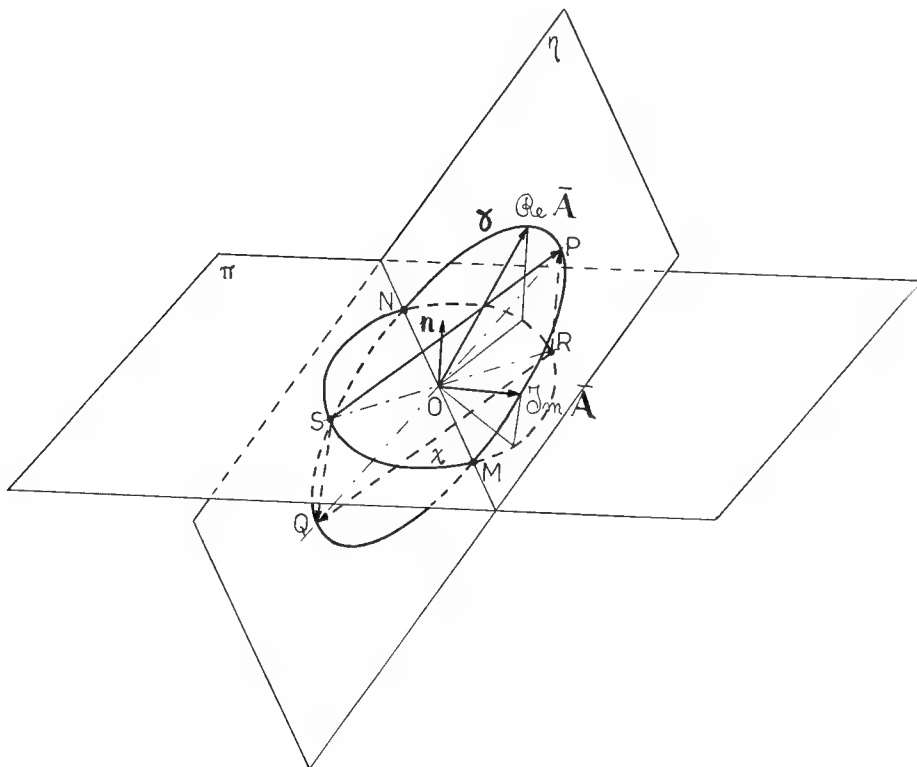



Fig. 17.

in quadratura con OM ed ON e cioè a quelle in cui il componente rettilineo è massimo.

Siano R ed S i punti sul cerchio χ in quadratura con M ed N. I vettori $\vec{RP}$ ed $\vec{SP}$ oppure i loro opposti $\vec{SQ}$ ed $\vec{RQ}$ indicano i valori massimi dei componenti rettilinei corrispondenti alle due soluzioni con componenti rotanti in un senso e nell'altro: le due soluzioni sono perciò tali che i rispettivi componenti rettilinei sono fra di loro in fase eventualmente a meno di π rad, a seconda del verso assunto per i moduli istantanei positivi.

Nel caso particolare in cui il vettore da scomporre fosse rettilineo, non esisterebbe in alcun caso il componente rotante, ed il problema della scomposizione perderebbe la sua importanza.

10. Scomposizione nello spazio. Componente rettilineo con direzione prefissata.

10.1. – Costruzione geometrica dei componenti.

Si consideri l'ellisse γ del vettore $\bar{\boldsymbol{A}}$ ed, a partire dal suo centro O, il vettore $\boldsymbol{r}$ del componente rettilineo (fig. 18 *a*); il cilindro ellittico con-

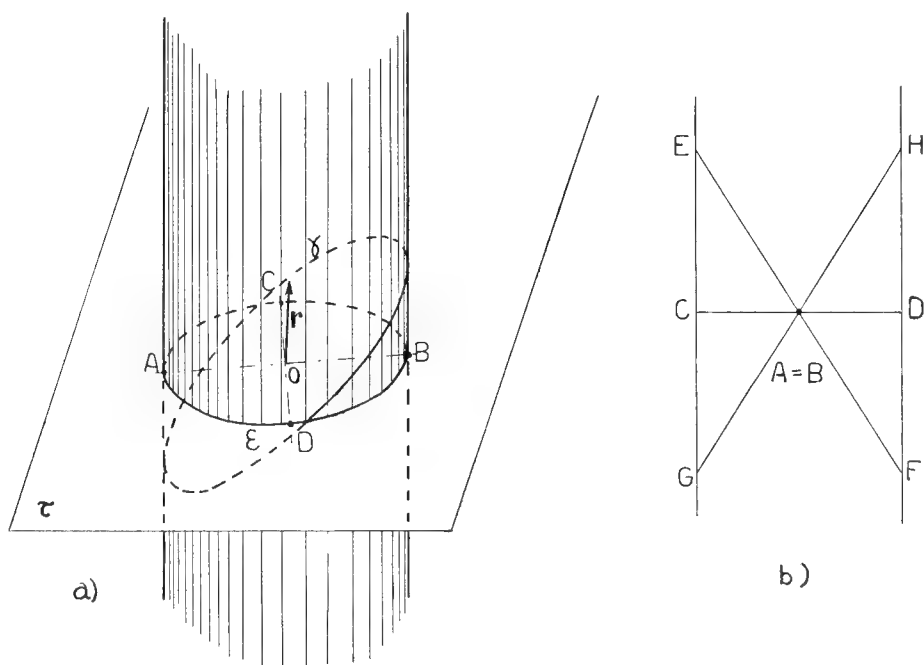



Fig. 18.

tenente γ, ed avente generatrici parallele ad $\boldsymbol{r}$, venga sezionato da un piano τ, per O, ortogonale ad $\boldsymbol{r}$: ε ne sia la sezione, generalmente ellittica; siano poi AB e CD rispettivamente agli assi maggiore e minore dell'ellisse ε. Piani passanti per O, tali da sezionare il cilindro secondo cerchi, ve ne sono due, aventi necessariamente per diametro il segmento AB; in fig. 18 *b* si consideri la proiezione ortogonale del cilindro su un piano perpendicolare ad AB: in questa figura le tracce delle due suddette sezioni circolari sono EF e GH: la lunghezza di questi segmenti è eguale ad AB.

Si sono ricavati così i piani di polarizzazione dei componenti rotanti, e si può pensare di ricondurre il problema nei termini di par. 9.2, scegliendo poi le sole soluzioni per le quali il componente rettilineo è parallelo al versore $\boldsymbol{r}$ dato.

10.2. – Espressione analitica della giacitura dei piani di polarizzazione dei componenti rotanti.

Poichè il presente problema è di secondo grado, non si ricerca la soluzione analitica con procedimento diretto, ma si utilizza la costruzione geometrica dei componenti, per dedurne le espressioni in termini di vettori complessi.

Il vettore che si ottiene proiettando $\bar{\boldsymbol{A}}$ sul piano normale ad $\boldsymbol{r}$ si può esprimere:

$$\overline{\boldsymbol{P}}_A = \boldsymbol{r} \wedge (\bar{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{r}) .$$

L'ellisse di $\overline{\boldsymbol{P}}_A$ è ε di fig. 18 *a*. Secondo le formule che danno l'espressione di $\overline{\boldsymbol{P}}_A$ in forma ortogonale (v. nota [1]), bibl. *a*: tab. a pag. 68, bibl. *b*: tab. a pag. 266), si possono scrivere le espressioni dei raggi massimo e minimo di $\overline{\boldsymbol{P}}_A$:

$$\boldsymbol{P}_{AM} = (\cos\psi\,\mathfrak{Re} + \operatorname{sen}\psi\,\mathfrak{Im})\,\overline{\boldsymbol{P}}_A \,, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}_{AW} = (-\operatorname{sen}\psi\,\mathfrak{Re} + \cos\psi\,\mathfrak{Im})\,\overline{\boldsymbol{P}}_A \tag{16}$$

ove è:

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(\mathfrak{Re} \times \mathfrak{Im})\,\overline{\boldsymbol{P}}_A}{(\mathfrak{Re}^2 - \mathfrak{Im}^2)\,\overline{\boldsymbol{P}}_A} \tag{17}$$

e ψ deve intendersi in ogni caso compreso fra O e $\pi/2$. I piani di polarizzazione dei componenti rotanti contengono la direzione del raggio massimo $\boldsymbol{P}_{AM}$ di $\overline{\boldsymbol{P}}_A$; l'altra direzione che caratterizza i suddetti piani è quella data dalla somma del raggio minimo $\boldsymbol{P}_{AW}$ e del vettore $\pm\,\boldsymbol{r}\sqrt{P_{AM}^2 - P_{AW}^2}$, ove il doppio segno sta ad indicare che i piani sono due.

I versori normali ai componenti rotanti cercati sono:

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{vers}\left[\pm\,\boldsymbol{P}_{AM} \wedge \left(\boldsymbol{P}_{AW} \pm \boldsymbol{r}\sqrt{P_{AM}^2 - P_{AW}^2}\right)\right] \tag{18}$$

ove, dei quattro valori che si possono ottenere con tutte le combinazioni di segno, si scelgono soltanto quei due che rappresentano i versori, che stanno nello stesso semispazio limitato dal piano normale ad $\boldsymbol{r}$, in cui sta il versore $\boldsymbol{u}$ ortogonale ad $\bar{\boldsymbol{A}}$. Ciò per rispettare le convenzioni di segno dei versori normali ai piani di polarizzazione in relazione ai sensi di rotazione intesi come positivi (cfr. Appendice: 7).

Noti i valori di $\boldsymbol{n}$, essi possono venire sostituiti nelle (13) e (14) per ottenere $\overline{\boldsymbol{R}}_A$ e $\bar{\lambda}$.

Il versore $\boldsymbol{n}$ si può pure esprimere in funzione di $\bar{\boldsymbol{A}}$, anzichè di $\bar{\boldsymbol{P}}_A$; esso perciò assume la forma (v. Appendice: 7).

$$(19)\qquad \boldsymbol{n} = \operatorname{vers}\Big\{ \pm (\Re e \wedge \Im m + \boldsymbol{r} \times \Im m \cdot \boldsymbol{r} \wedge \Re e - \boldsymbol{r} \times \Re e \cdot \boldsymbol{r} \wedge \Im m)\bar{\boldsymbol{A}} \cdot$$

$$\pm [\cos\psi\, \boldsymbol{r} \wedge \Re e + \operatorname{sen}\psi\, \boldsymbol{r} \wedge \Im m]\bar{\boldsymbol{A}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{[(\boldsymbol{r} \wedge \Re e)^2 + (\boldsymbol{r} \wedge \Im m)^2]^2 \bar{\boldsymbol{A}} - 4(\Re e \wedge \Im m + \boldsymbol{r} \times \Im m \cdot \boldsymbol{r} \wedge \Re e - \boldsymbol{r} \times \Re e \cdot \boldsymbol{r} \wedge \Im m)^2 \bar{\boldsymbol{A}}}\Big\}$$

ove:

$$(20)\qquad \operatorname{sen}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - \frac{[\Im m^2 - \Re e^2 + (\boldsymbol{r} \times \Re e)^2 - (\boldsymbol{r} \times \Im m)^2]\bar{\boldsymbol{A}}}{\sqrt{[\Re e^2 - \Im m^2 - (\boldsymbol{r} \times \Re e)^2 + (\boldsymbol{r} \times \Im m)^2]\bar{\boldsymbol{A}} + 4(\Re e \wedge \Im m - \boldsymbol{r} \times \Re e \cdot \boldsymbol{r} \times \Im m)\bar{\boldsymbol{A}}}}}$$

$$(21)\qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 + \frac{[\Im m^2 - \Re e^2 + (\boldsymbol{r} \times \Re e)^2 - (\boldsymbol{r} \times \Im m)^2]\bar{\boldsymbol{A}}}{\sqrt{[\Re e^2 - \Im m^2 - (\boldsymbol{r} \times \Re e)^2 + (\boldsymbol{r} \times \Im m)^2]\bar{\boldsymbol{A}} + 4(\Re e \wedge \Im m - \boldsymbol{r} \times \Re e \cdot \boldsymbol{r} \times \Im m)\bar{\boldsymbol{A}}}}} .$$

11. Osservazioni.

Facendo riferimento a quanto è stato detto riguardo ai limiti degli argomenti trattati, sembra ancora opportuno mostrare in che cosa consiste la difficoltà della via puramente analitica per la soluzione dei problemi di grado superiore al primo. In questi casi si devono risolvere sistemi di equazioni, in cui compaiono come incognite dei versori o dei vettori, anche complessi, legati fra loro da prodotti scalari o vettoriali.

Ad esempio, il problema di par. 10 si potrebbe impostare analiticamente come quello di par. 5, sostituendo al posto di $\boldsymbol{u}$ (versore perpendicolare ad $\bar{\boldsymbol{A}}$) il versore $\boldsymbol{n}$ (perpendicolare ad $\bar{\boldsymbol{R}}_A$, ed in questo caso non coincidente con $\boldsymbol{u}$). Si potrebbero scrivere, al posto delle (6) e (7), le relazioni:

$$(22)\qquad \bar{\lambda} = \boldsymbol{r} \times (1 + j\boldsymbol{n} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}},$$

$$(23)\qquad \bar{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{r} .$$

Queste però non permettono ancora di risolvere il problema, essendo $\boldsymbol{n}$ incognito. Per trovare $\boldsymbol{n}$ si deve esprimere una nuova condizione, in

modo da assicurare che $\bar{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{r}$ sia effettivamente un vettore rotante, cioè:

$$(\bar{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{r}) \times (\bar{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{r}) = 0 \tag{24}$$

ossia, in base alla (22):

$$(\bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}} - j\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \wedge \bar{\boldsymbol{A}}) \times \\ \times (\bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}} - j\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \wedge \bar{\boldsymbol{A}}) = 0\,. \tag{25}$$

Questa risulta un'equazione non lineare nell'incognita $\boldsymbol{n}$. Non si può pensare che essa possa venire risolta con artifici di calcolo simili a quelli adottati in precedenza. Se si esplicitasse l'espressione del versore $\boldsymbol{n}$, scrivendola nei termini dei suoi coseni direttori rispetto a tre assi cartesiani di riferimento, sarebbe perso l'interesse che presentano gli sviluppi delle espressioni in forma vettoriale. Anche in ciò pertanto si presenta l'argomento di un nuovo eventuale studio.

Lo scrivente ringrazia il Prof. R. Sartori ed il Prof. R. Marenesi per i preziosi aiuti e l'incoraggiamento benevolmente accordati nello svolgimento del presente lavoro.

Torino, Istituto Elettrotecnico Nazionale « Galileo Ferraris ».
Giugno 1959.

APPENDICE

1. – Dimostrazione delle proprietà 4, 5, 6 e della form. (1).

È facile dimostrare l'eguaglianza dei triangoli aventi per coppie di lati corrispondenti i segmenti dati rispettivamente dai vettori $\boldsymbol{R}_{A1}$, $\boldsymbol{R}'_{A1}$ (fig. 11 *a*) ed $\boldsymbol{R}'_{A2}$, $\boldsymbol{R}_{A2}$ (fig. 11 *b*). Il terzo lato è, rispettivamente per i due triangoli, $\boldsymbol{R}''_{A1}$ ed $\boldsymbol{R}''_{A2}$. Questo lato ha lunghezza eguale all'ampiezza del componente rotante. Con ciò si può ritenere dimostrata la proprietà 3.

Indipendentemente dall'angolo θ, l'ampiezza del componente rettilineo equivale al doppio dell'ampiezza del vettore $\boldsymbol{R}_{A2}$ per la scomposizione con il rotante concorde (fig. 11 *a*) e del vettore $\boldsymbol{R}_{A1}$ per quella con il rotante discorde (fig. 11 *b*). Cioè l'ampiezza del componente rettilineo è in ogni caso eguale rispettivamente ad $A_M - A_W$ e ad $A_M + A_W$. Con ciò si possono ritenere dimostrate le proprietà 5 *a* e 5 *b*.

Si calcola anche facilmente l'ampiezza del componente rotante $\boldsymbol{R}''_{A1}$ oppure $\boldsymbol{R}''_{A2}$. Considerando il triangolo formato da $\boldsymbol{R}_{A1}$, $\boldsymbol{R}'_{A1}$, ed $\boldsymbol{R}''_{A1}$, oppure quello uguale formato da $\boldsymbol{R}'_{A2}$, $\boldsymbol{R}_{A2}$ ed $\boldsymbol{R}''_{A2}$, si può vedere facilmente che l'angolo in O di questi triangoli è 2θ: si considerino infatti, in fig. 11 *a*, l'uguaglianza degli angoli formati da $\boldsymbol{R}'_{A1}$ e da $\boldsymbol{R}_{A2}$ con $\boldsymbol{r}$ e quella degli angoli formati da $\boldsymbol{R}_{A2}$ e da $\boldsymbol{R}'_{A1}$ con la direzione dell'asse maggiore: è immediata la deduzione di quanto affermato.

Si considerino poi i lati corrispondenti ai vettori $\boldsymbol{R}_{A1}$ ed $\boldsymbol{R}'_{A1}$: essendo la loro lunghezza eguale rispettivamente alla semisomma ed alla semidifferenza dei raggi massimo A_M e minimo A_W dell'ellisse, e l'angolo fra essi compreso eguale a 2θ, risulta dal teorema di Carnot che la lunghezza θ del terzo lato può essere espressa dalla (1); identiche considerazioni valgono per il corrispondente triangolo di fig. 11 *b*.

Si supponga ora di considerare le posizioni particolari dei vettori di fig. 11 *a*, quando $\boldsymbol{R}_{A2}$ ed $\boldsymbol{R}'_{A1}$ sono perpendicolari alla direzione di $\boldsymbol{r}$ (fig. A1 *a*).

In tal caso il componente rettilineo è nullo e la posizione del vettore sinusoidale è data dal solo componente rotante $\boldsymbol{R}''_{A1}$. Secondo la proprietà 4 *a* esso deve formare un angolo cinematico eguale a θ con l'asse minore dell'ellisse, cioè eguale a $\pi/2 - \theta$ con l'asse maggiore: secondo quanto definito a par. 3.2, l'an-

golo geometrico formato da $\boldsymbol{R}''_{A1}$ con l'asse maggiore deve essere legato a θ dalla relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{A_W}{A_M} = \frac{A_W}{A_M \operatorname{tg} \theta} \cdot$$

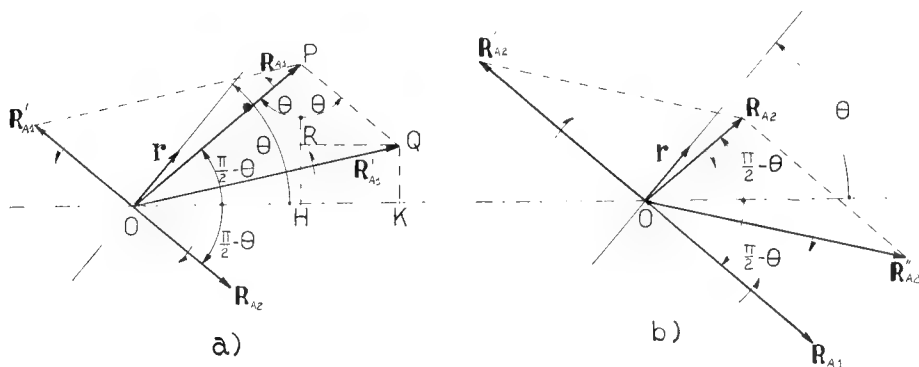



Fig. A 1.

Potendo dimostrare questa relazione dal disegno di fig. A1, rimane dimostrata la proprietà 4 *a*. Infatti (v. fig. A1 *a*) PQ è parallelo ad $\boldsymbol{R}_{A2}$; perciò, essendo H e K le proiezioni di P e Q sull'asse maggiore, è: $\widehat{OPH} = \theta$ e $\widehat{HPQ} = \theta$; inoltre è:

$$OP = \frac{1}{2}(A_W + A_M)$$

e

$$PQ = \frac{1}{2}(A_W - A_M)\,; \qquad \operatorname{tg} \alpha = QK/OK\,.$$

D'altra parte:

$$QK = PH - PR = \frac{1}{2}(A_M + A_W)\cos\theta - \frac{1}{2}(A_M - A_W)\cos\theta = A_W \cos\theta\,;$$

$$OK = OH + HK = \frac{1}{2}(A_M + A_W)\,\text{sen} + \frac{1}{2}(A_M - A_W)\,\text{sen} = A_M\,\text{sen}\,\theta\,.$$

Risulta cioè:

(1 A) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_W}{A_M \operatorname{tg} \theta} \cdot$$

Si è così dimostrata la proprietà 4 *a* per la coppia di componenti col rotante concorde. Si può dimostrare anche per l'altra coppia, e ciò si suppone ovvio, con quanto ora detto.

Dalla fig. A1 *a* e A1 *b*, o da quelle che si otterrebbero ruotando i vettori di π rad., risulta evidente la proprietà 4 *b*. Si dimostra pure che per $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

la posizione del componente rotante all'istante in cui il rettilineo s'annulla è, nei due casi, sempre compresa nel medesimo quadrante.

Si può così ritenere dimostrata la proprietà 4 *b* in ogni caso.

La dimostrazione della proprietà 4 *c* è poi elementare dall'osservazione dei sensi di rotazione dei vettori, e degli angoli da essi formati con gli assi principali, come risulta da fig. A1.

Per la dimostrazione della proprietà 6 si consideri poi la posizione del vettore sinusoidale, dato dai componenti entrambi rotanti $\boldsymbol{R}_{A1}$ ed $\boldsymbol{R}_{A2}$ di fig. 11. Si supponga che la loro posizione resti fissa e che ruoti invece il versore $\boldsymbol{r}$. I vettori $\boldsymbol{R}'_{A1}$ ed $\boldsymbol{R}''_{A1}$ per la fig. 11 *a* ed i vettori $\boldsymbol{R}'_{A2}$ ed $\boldsymbol{R}''_{A2}$ per la 11 *b*, onde continuare a soddisfare le condizioni imposte nella costruzione di par. 5.2, ruoteranno anch'essi. Si vede che, considerando i componenti rettilinei della scomposizione in esame, $\boldsymbol{R}_{A2} + \boldsymbol{R}'_{A1}$ è massimo quando $\boldsymbol{r}$ coincide con il versore di $\boldsymbol{R}_{A2}$, ed $\boldsymbol{R}_{A1} + \boldsymbol{R}'_{A2}$ è massimo quando $\boldsymbol{r}$ coincide con quello di $\boldsymbol{R}_{A1}$.

Questi valori massimi sono rispettivamente $2\boldsymbol{R}_{A2}$, il cui modulo vale $A_M - A_W$, e $2\boldsymbol{R}_{A1}$, il cui modulo vale $A_M + A_W$. Si vede poi che, variando $\boldsymbol{r}$, i componenti rettilinei variano di modulo come le proiezioni rispettivamente di $2\boldsymbol{R}_{A2}$ e $2\boldsymbol{R}_{A1}$ sulla retta di $\boldsymbol{r}$. Si ritiene di aver esposto così i concetti fondamentali per la dimostrazione della proprietà 6.

2. – Deduzione della form. (7) di par. (5.1).

Dalla (3) si ha:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{r} \tag{2 A}$$

e, sostituendo l'espressione di $\bar{\lambda}$ data dalla (6), si ottiene:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times (1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}} = \{1 - [(1 - j\boldsymbol{u} \wedge)\boldsymbol{r} \times]\boldsymbol{r}\}\bar{\boldsymbol{A}} \tag{3 A}$$

ed inoltre:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}} + j\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}}\,, \tag{4 A}$$

ove

$$\bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}}\,;$$

e perciò:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_A = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times j\boldsymbol{r})(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{A}})(j + \boldsymbol{u} \wedge)\boldsymbol{r}\,. \tag{5 A}$$

3. – Deduzione delle form. (9) e (10) di par. (6.1).

Data la (8), si ricava dalla (6):

$$\lambda e^{j\varphi} = \lambda(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi) = \boldsymbol{r} \times (1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\bar{\boldsymbol{A}} \tag{6 A}$$

e cioè:

$$\lambda \cos \varphi = \boldsymbol{r} \times (\mathfrak{Re} - \boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}}$$

$$\lambda \operatorname{sen} \varphi = \boldsymbol{r} \times (\mathfrak{Im} + \boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re}) \bar{\boldsymbol{A}} \; ;$$

moltiplicando in croce queste due eguaglianze si ottiene:

$$\text{(7 A)} \qquad \boldsymbol{r} \times [(\mathfrak{Im} + \boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re}) \bar{\boldsymbol{A}} \cos \varphi - (\mathfrak{Re} - \boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} \operatorname{sen} \varphi] = 0 \, .$$

Ciò significa che il secondo termine del prodotto interno è ortogonale ad $\boldsymbol{r}$, perciò quest'ultimo si può ottenere ruotando quello di un angolo retto, ossia moltiplicando vettorialmente $\boldsymbol{u}$ o $-\boldsymbol{u}$ per il medesimo. La scelta del segno si può fare tenendo presente che φ è assegnato, facendo riferimento al verso positivo di $\boldsymbol{r}$. Si moltiplicherà perciò $-\boldsymbol{u}$ vettorialmente per il secondo fattore del prodotto (7*A*) e si constaterà l'esattezza del segno:

$$\text{(8 A)} \qquad \boldsymbol{r} = \operatorname{vers} [(-\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Im} + \mathfrak{Re}) \bar{\boldsymbol{A}} \cos \varphi + (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} \operatorname{sen} \varphi] =$$

$$= \operatorname{vers} [(\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) j \bar{\boldsymbol{A}} \cos \varphi + (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} \operatorname{sen} \varphi] =$$

$$= \operatorname{vers} (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)} \, .$$

Quest'ultima espressione significa che è:

$$\text{(9 A)} \qquad \boldsymbol{r} = \zeta (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)}$$

con ζ costante positiva. Per verificare il segno di ζ, si può sostituire la (9 *A*) nella (6 *A*) e si ottiene:

$$\text{(10 A)} \qquad \zeta = \frac{\lambda}{(\mathfrak{Re}^2 + \mathfrak{Im}^2 + 2 \boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} \times \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}}} \, ,$$

ed essendo λ positivo, è certamente $\zeta > 0$.

La (8 *A*) coincide con la (9).

Sostituendo poi la (8 *A*) nella (4 *A*), e ricordando che può essere scritto:

$$\boldsymbol{r} = \frac{(\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)}}{|(\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)}|} \, ,$$

si ottiene:

$$\text{(11 A)} \qquad \bar{\boldsymbol{R}}_A = \frac{[\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)} \times \bar{\boldsymbol{A}}] (j + \boldsymbol{u} \wedge) (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)}}{[(\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)}]^2} \, .$$

Sviluppando la seconda parte del numeratore, si ottiene:

$$(j + \boldsymbol{u} \wedge) (\boldsymbol{u} \wedge \mathfrak{Re} + \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2} (j + \boldsymbol{u} \wedge) [\boldsymbol{u} \wedge (\bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)} + \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j(\pi/2 - \varphi)}) + j (\bar{\boldsymbol{A}} e^{j(\pi/2 - \varphi)} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j(\pi/2 - \varphi)})] =$$

$$= \frac{1}{2} (j + \boldsymbol{u} \wedge) [\boldsymbol{u} \wedge (j \bar{\boldsymbol{A}} e^{-j\varphi} - j \underline{\boldsymbol{A}} e^{j\varphi}) + \bar{\boldsymbol{A}} e^{-j\varphi} + \underline{\boldsymbol{A}} e^{j\varphi}] =$$

$$= \frac{1}{2} (j + \boldsymbol{u} \wedge) [(j \boldsymbol{u} \wedge + 1) \bar{\boldsymbol{A}} e^{-j\varphi} + (-j \boldsymbol{u} \wedge + 1) \underline{\boldsymbol{A}} e^{j\varphi}]$$

e poichè:

$$(12\,A)\qquad \begin{aligned}(j + \boldsymbol{u} \wedge)(1 + j\boldsymbol{u} \wedge) &= j - \boldsymbol{u} \wedge + \boldsymbol{u} \wedge - j = 0\\ (j + \boldsymbol{u} \wedge)(1 - j\boldsymbol{u} \wedge) &= j + \boldsymbol{u} \wedge + \boldsymbol{u} \wedge + j = 2(j + \boldsymbol{u} \wedge)\,,\end{aligned}$$

l'espressione scritta or ora vale:

$$(13\,A)\qquad (j + \boldsymbol{u} \wedge)(\boldsymbol{u} \wedge \Re e + \Im m)\,\bar{\boldsymbol{A}}\,e^{j(\pi/2-\varphi)} = (1 + j\boldsymbol{u} \wedge)\,\underline{\boldsymbol{A}}\,e^{j\varphi}\,.$$

Sostituendo la (12 A) nella (11 A), si ottiene la (10) del testo.

4. – Deduzione della form. (11).

Tenuta presente la fig. 14, si ricorda che è:

$$|\overrightarrow{O_1P}| = |\overrightarrow{OO_2}| = \frac{1}{2}(A_M + A_W)$$

ed il raggio del cerchio c_1 è $\frac{1}{2}(A_M - A_W)$. I due segmenti in oggetto possono servire per esprimere l'angolo β, poichè risulta:

$$(14\,A)\qquad \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{|\overrightarrow{OO_1}|}{|\overrightarrow{O_1P}|} = \frac{\frac{1}{2}(A_M - A_W)}{\frac{1}{2}(A_M + A_W)}\,,$$

da cui segue immediatamente la (11).

5. – Deduzione della form. (12).

I coefficienti angolari μ_c e μ_d possono essere ricavati considerando le intersezioni della retta di coefficiente angolare k, passante per i punti x_0 e y_0, con i cerchi c_1 e c_2. È utile in questo caso la rappresentazione in coordinate polari ϱ e θ.

Le equazioni dei cerchi c_1 e c_2 sono rispettivamente:

$$(15\,A)\qquad \varrho = (A_M + A_W)\cos(\theta - \omega t_0)\,,$$

$$(16\,A)\qquad \varrho = (A_M - A_W)\cos(\theta + \omega t_0)\,.$$

L'equazione della retta è:

$$(17\,A)\qquad \varrho = \frac{A_W \operatorname{sen}\theta - kA_M \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - k\cos\theta}\,.$$

Le intersezioni della retta con i due cerchi sono tali che, rispettivamente, si può esprimere per esse:

$$\operatorname{tg}\theta = \mu_c$$

oppure:

$$\operatorname{tg} \theta = \mu_d$$

e le soluzioni delle due equazioni in $\operatorname{tg} \theta$ che si ottengono sostituendo la (16 A) sia nella (14 A), sia nella (15 A), sono date dalle (12) del testo.

6. – Deduzione delle form. (13) e (14).

Per convenzioni qui adottate [v. nota (10)], il valore del vettore sinusoidale $\boldsymbol{A}(t)$ in un istante t qualsiasi è la parte immaginaria del vettore complesso corrispondente, cioè:

(18 A) $$\boldsymbol{A}(t) = \Im m\, \bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t} .$$

Ma è:

(19 A) $$\Im m\, \bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t} = -j\,(\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t}) .$$

Si scrive nuovamente l'espressione fondamentale della scomposizione:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{R}}_A + \bar{\lambda} \boldsymbol{r} ,$$

sapendo, questa volta, che $\bar{\boldsymbol{R}}_A$ ed $\bar{\boldsymbol{A}}$ non giacciono sullo stesso piano, ma che $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale al piano di $\bar{\boldsymbol{R}}_A$. Si considera l'istante t_1 in cui il vettore da scomporre giace sul piano del componente rotante, e quindi il componente rettilineo è nullo. In questo istante è:

$$\boldsymbol{n} \times \Im m\, \bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} = 0$$

cioè:

$$\boldsymbol{n} \times (\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1}) = 0 ,$$

$$\boldsymbol{n} \times \bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} = \boldsymbol{n} \times \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1}$$

ed infine:

(20 A) $$e^{j2\omega t_1} = \frac{\underline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}{\bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}} .$$

Nell'istante t_1 è pure

(21 A) $$\Im m\, \bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} = \Im m\, \bar{\boldsymbol{R}}_A e^{j\omega t_1}$$

cioè:

$$\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1} = \bar{\boldsymbol{R}}_A e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{R}}_A e^{-j\omega t_1} =$$

$$= [e^{j\omega t_1}(1 - j\boldsymbol{n} \wedge) - e^{-j\omega t_1}(1 + j\boldsymbol{n} \wedge)]\, \Re e\, \bar{\boldsymbol{R}}_A .$$

Moltiplicando ambo i membri per $(j + \boldsymbol{n} \wedge)$ si ha:

$$(j + \boldsymbol{n} \wedge)(\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1}) =$$

$$= (j + \boldsymbol{n} \wedge)\,[e^{j\omega t_1}(1 - j\boldsymbol{n} \wedge) - e^{-j\omega t_1}(1 + j\boldsymbol{n} \wedge)]\, \Re e\, \bar{\boldsymbol{R}}_A$$

e, per le (12 A):

$$(j + \boldsymbol{n} \wedge)(\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1}) = 2 e^{j\omega t_1}(j + \boldsymbol{n} \wedge) \Re\mathrm{e}\, \overline{\boldsymbol{R}}_A =$$
$$= 2j e^{j\omega t_1}(1 - j\boldsymbol{n} \wedge) \Re\mathrm{e}\, \overline{\boldsymbol{R}}_A = 2j e^{j\omega t_1} \overline{\boldsymbol{R}}_A$$

cioè:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_A = \frac{1}{2j}(j + \boldsymbol{n} \wedge)(\bar{\boldsymbol{A}} e^{j\omega t_1} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-j\omega t_1}) e^{-j\omega t_1},$$

$$\text{(22 A)} \qquad \overline{\boldsymbol{R}}_A = \frac{1}{2}(1 - j\boldsymbol{n} \wedge)(\bar{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{A}} e^{-2j\omega t_1}) = \frac{1}{2}(1 - j\boldsymbol{n} \wedge)\left(\bar{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{A}} \frac{\bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}{\underline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}\right).$$

Si ha inoltre:

$$\text{(23 A)} \qquad \bar{\lambda} \boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{R}}_A = \bar{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{2} j\boldsymbol{n} \wedge \bar{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{A}} \frac{\bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}{\underline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}} - \frac{1}{2} j\boldsymbol{n} \wedge \underline{\boldsymbol{A}} \frac{\bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}{\underline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left|(1 + j\boldsymbol{n} \wedge) \bar{\boldsymbol{A}} + \frac{\bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}}{\underline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}} (1 - j\boldsymbol{n} \wedge) \underline{\boldsymbol{A}}\right|.$$

7. – Deduzione delle form. (19), (20) e (21).

L'espressione delle ampiezze dei raggi massimo e minimo dell'ellisse di un vettore sinusoidale $P(t)$ [v. nota 1, bibl. b): tab. a pag. 68; bibl. a): tab. a pag. 266]

$$\text{(24 A)} \qquad P_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Re\mathrm{e}^2 + \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}} + \sqrt{(\Re\mathrm{e}^2 + \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}} - 4|\Re\mathrm{e} \wedge \Im\mathrm{m}|^2\, \overline{\boldsymbol{P}}}},$$

$$\text{(25 A)} \qquad P_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Re\mathrm{e}^2 + \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}} - \sqrt{(\Re\mathrm{e}^2 + \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}} - 4|\Re\mathrm{e} \wedge \Im\mathrm{m}|^2\, \overline{\boldsymbol{P}}}}.$$

Ricordando che, per angoli ψ compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos 2\psi}\,; \qquad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos 2\psi}\,;$$

$$\cos 2\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi}},$$

si può ricavare, dalla (17):

$$\text{(26 A)} \qquad \operatorname{sen} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{(\Re\mathrm{e}^2 - \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}}_A}{(\Re\mathrm{e}^2 - \Im\mathrm{m}^2)^2\, \overline{\boldsymbol{P}}_A + 4(\Re\mathrm{e} \times \Im\mathrm{m})^2\, \overline{\boldsymbol{P}}_A}},$$

$$\text{(27 A)} \qquad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{(\Re\mathrm{e}^2 - \Im\mathrm{m}^2)\, \overline{\boldsymbol{P}}_A}{(\Re\mathrm{e}^2 - \Im\mathrm{m}^2)^2\, \overline{\boldsymbol{P}}_A + 4(\Re\mathrm{e} \times \Im\mathrm{m})^2\, \overline{\boldsymbol{P}}_A}}.$$

Ricordando inoltre che la proiezione sul piano ortogonale ad $\boldsymbol{r}$ di $\bar{\boldsymbol{A}}$ è:

(28 A) $$\bar{\boldsymbol{P}}_A = \boldsymbol{r} \wedge (\bar{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{r}) = \bar{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{r} \cdot \bar{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{r}$$

e cioè:

$$\boldsymbol{r} \wedge \bar{\boldsymbol{P}}_A = \boldsymbol{r} \wedge \bar{\boldsymbol{A}} ,$$

si può dedurre:

(29 A) $$(\mathfrak{Re} \times \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{P}}_A = (\mathfrak{Re} \times \mathfrak{Im} - \boldsymbol{r} \times \mathfrak{Re} \cdot \boldsymbol{r} \times \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{A}} ,$$

(30 A) $$(\mathfrak{Re} \wedge \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{P}}_A = (\mathfrak{Re} \wedge \mathfrak{Im} + \boldsymbol{r} \wedge \mathfrak{Re} \cdot \boldsymbol{r} \times \mathfrak{Im} - \boldsymbol{r} \wedge \mathfrak{Im} \cdot \boldsymbol{r} \times \mathfrak{Re}) \bar{\boldsymbol{A}} ,$$

(31 A) $$\mathfrak{Re}^2 \bar{\boldsymbol{P}}_A = [\mathfrak{Re}^2 - (\boldsymbol{r} \times \mathfrak{Re})^2] \bar{\boldsymbol{A}} ,$$

(32 A) $$\mathfrak{Im}^2 \bar{\boldsymbol{P}}_A = [\mathfrak{Im}^2 - (\boldsymbol{r} \times \mathfrak{Im})^2] \bar{\boldsymbol{A}} .$$

Poichè, infine, è [v. bibl. *a*) di nota 1, pag. 60]

(33 A) $$\boldsymbol{P}_{AM} \wedge \boldsymbol{P}_{AW} = (\mathfrak{Re} \wedge \mathfrak{Im}) \bar{\boldsymbol{P}}_A ,$$

e poichè dalle (24 *A*) e (25 *A*) si può ottenere:

(34 A) $$P^2_{AM} - P^2_{AW} = \sqrt{(\mathfrak{Re}^2 - \mathfrak{Im}^2)^2 \bar{\boldsymbol{P}}_A - 4 |\mathfrak{Re} \wedge \mathfrak{Im}|^2 \bar{\boldsymbol{P}}_A} ,$$

tenendo ancora presenti le (15), (16), (18), (33 *A*), (30 *A*), (28 *A*), (34 *A*), (31 *A*) e (32 *A*), si ricava la (19).

Tenendo poi presenti le (26 *A*), (27 *A*), (29 *A*), (31 *A*) e (32 *A*), si ricavano le (20) e (21).

LE RELAZIONI FRA TENSIONI E DEFORMAZIONI IN ELASTOPLASTICITÀ

Memoria del Socio nazionale residente PLACIDO CICALA

presentata nell'adunanza del 15 Giugno 1960

Riassunto. — Introduzione. - *Si espone lo scopo del presente studio e si precisano i limiti del campo di indagine.*

Capitolo I. - *Si svolge l'analisi dello stato di tensione nella notazione delle matrici e si giunge alla rappresentazione vettoriale dello stato stesso e alla interpretazione geometrica delle trasformazioni e degli invarianti. Con lo stesso algoritmo si sviluppa l'analisi delle deformazioni finite e delle piccole variazioni di deformazioni finite. Si considerano in generale le proprietà di isotropia.*

Capitolo II. - *Si esamina il procedimento col quale nella deformazione complessiva viene individuata la componente plastica. Dalla esperienza basica di sollecitazione semplice si desumono i caratteri fondamentali della deformazione elastoplastica: in particolare, la variazione della regione elastica. Ammessa la regolarità del contorno di questa, risulta definita la direzione dell'incremento di deformazione plastica. Nella formulazione più generale della teoria isotropa, le relazioni incrementali vengono poste in una nuova forma che presenta certi vantaggi. Si fa cenno delle teorie anisotrope. Sono considerate le condizioni di carico proporzionale per deformazioni finite.*

Capitolo III. - *La deformazione creata dallo scorrimento di due date direzioni, legato alla relativa tensione tangenziale, viene rappresentata nello spazio vettoriale mediante la traslazione di un iperpiano, luogo di limiti elastici. La teoria di Batdorf e Budiansky è presentata come estensione del medesimo concetto ad una infinità di sistemi di scorrimento indipendenti; sono indicati alcuni importanti risultati ottenuti da quella teoria. Della teoria di Lin è indicata una variante semplificata e sono mostrate alcune conclusioni che ne derivano. Le relazioni fondamentali della teoria di Besseling vengono sintetizzate nella forma vettoriale.*

Capitolo IV. - *Si espongono in sintesi i concetti delle teorie della deformazione plastica. Si distinguono: teorie olonome, che postulano relazioni in ter-*

mini finiti fra i valori attuali di tensioni e deformazioni, e teorie incrementali, che pongono relazioni differenziali considerando l'incremento di deformazione non calcolabile come variazione di una funzione locale dello spazio delle tensioni. Le incrementali sono suddivise in teorie lineari e non lineari a seconda che considerino sovrapponibili o no gli effetti di incrementi di tensione che diano deformazione plastica. Le prime si dividono in isotrope e anisotrope. Le seconde trattano, con varie schematizzazioni, il materiale come un aggregato eterogeneo. Un ultimo gruppo di indagini, ancora in fase di sviluppo, ricerca le proprietà dell'aggregato cristallino sulla base delle cognizioni sperimentali sul monocristallo.

Capitolo V. - *Nel tentativo di frazionare il complesso problema in esame, sono formulati i quesiti fondamentali e si indicano le relative conclusioni deducibili dai dati sperimentali. I quesiti riguardano: la compressibilità del materiale nella deformazione plastica, la linearità delle relazioni incrementali, le variazioni di forma della regione elastica, la direzione dell'incremento di deformazione plastica e la grandezza dell'incremento stesso.*

INTRODUZIONE

Scopo e limitazioni della ricerca.

È ovvia l'importanza che riveste la conoscenza del comportamento dei materiali da costruzione oltre i limiti elastici. Se si restasse nel campo di validità della legge di Hooke, non ci sarebbe modo di studiare il cedimento delle aste «corte» nè i fenomeni di instabilità nelle piastre non sottilissime. Delle concentrazioni di sforzi si potrebbe affrontare solo un'analisi sostanzialmente irreale. Il modo di resistere delle strutture in genere potrebbe essere studiato solo in un campo assai più ristretto di quello in cui esse possono servire. Inoltre, poichè dopo una deformazione anelastica, l'ambito nel quale il materiale si comporta elasticamente risulta modificato, occorre conoscere i fenomeni plastici per prevedere quegli assestamenti grazie ai quali un elemento permanentemente deformato può lavorare in condizioni elastiche. Ancora, lo studio delle lavorazioni meccaniche che implicano deformazioni plastiche ha bisogno delle stesse conoscenze fondamentali.

Alcune delle questioni prospettate possono essere risolte sulla base dei soli dati delle prove a sollecitazione semplice. Molte però richiedono la conoscenza delle relazioni sforzi-deformazioni nella situazione generale triassiale. Nè l'analisi uniassiale è mai sicuramente completa. Anche nelle travature reticolari, strutture tipicamente semplici, molte questioni sfuggono all'analisi basata solo sulla conoscenza delle caratteristiche del materiale dedotte dalla prova di trazione. A parte gli attacchi, dove le sollecitazioni sono di tipo complesso, per le aste l'instabilità torsionale porta

a sollecitazioni composte. Persino la trave inflessa semplicemente è assai dubbio che possa calcolarsi, oltre i limiti elastici, come un fascio di elementi tesi o compressi.

Sebbene la determinazione delle relazioni fra sforzi e deformazioni oltre i limiti elastici sia così importante, essa costituisce un problema non ancora risolto. Per quanto la ricerca non sia conclusa, tuttavia è assai interessante conoscerne l'attuale posizione; grazie al progresso, in gran parte recente, di studi teorici e sperimentali, molti concetti sono già acquisiti e formeranno la base del futuro sviluppo.

In questa nota si vuole prospettare la situazione attuale dell'indagine. Le trattazioni note sono state rielaborate e presentate in una forma unitaria, talvolta discosta dall'originale. Non è negli intenti della nota esporre la storia della ricerca nel suo sviluppo e perciò, in generale, solo la bibliografia più recente è stata menzionata; da quella si può risalire alle fonti. Sono solo trattate questioni relative alle deformazioni plastiche, non viscose, del corpo inizialmente isotropo. Quindi i processi dipendenti dal tempo e i materiali che li presentano (metalli a caldo, calcestruzzo) sono esclusi da queste considerazioni. Il problema della rottura non è considerato. È evidente però che la risoluzione del problema ristretto della elastoplasticità fornirà informazioni assai utili alle indagini menzionate, con esso confinanti.

In un primo capitolo si presenta, in termini generali, l'analisi dello stato di tensione e di deformazione. Lo studio della plasticità implica un approfondimento dei concetti fondamentali; l'uso dei mezzi di rappresentazione più sintetici è necessario perchè le idee essenziali risaltino evidenti. Si è però rinunciato alla notazione tensoriale, comunemente adottata in questo campo; si è fatto largo uso della notazione vettoriale e, dove necessario, dell'algoritmo delle matrici che nell'ingegneria acquista sempre maggiore importanza, per l'utilizzazione dei moderni strumenti di calcolo numerico. Nell'analisi della deformazione si è sviluppato, in particolare, il caso di spostamenti finiti.

Nei capitoli II e III si sono più o meno ampiamente sviluppate le teorie più rappresentative dei vari gruppi, per le relazioni fra sforzi e deformazioni plastiche. Nel IV capitolo sono sinteticamente esposti i concetti contenuti nelle varie formulazioni. Nel V capitolo sono presentati i risultati più salienti di numerose ricerche sperimentali in risposta ai vari quesiti sui quali si impernia la classificazione delle teorie di plasticità. A conclusione sono rilevati i punti controversi sui quali si attende che una documentazione sperimentale più completa faccia luce.

Allo stato attuale delle conoscenze, finchè i quesiti prospettati non trovino risposta nell'esperimento, sarebbe vano formulare, sia pure sulla base di razionali congetture, una teoria in aggiunta alle molte esistenti.

È auspicabile invece che volenterosi sperimentatori chiariscano le questioni non ancora risolte, sicchè si giunga a costituire una salda base per le ricerche applicative di elastoplasticità.

Capitolo I.

ANALISI GENERALE DELLO STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE

I. 1. - NOTAZIONE DELLE MATRICI. — Molte delle relazioni che intervengono nella teoria della plasticità, scritte esplicitamente nell'ordinaria notazione, assumono forma di lunghe espressioni che, oltre agli svantaggi tipografici, presentano difficoltà per l'interpretazione dei concetti fisici in esse racchiusi. Perciò generalmente viene adottata la concisa notazione tensoriale. Qui si è fatto uso combinato della notazione vettoriale e delle matrici, in considerazione del fatto che quest'ultimo algoritmo va sempre più diffondendosi nei calcoli strutturali [1], per i vantaggi che esso presenta, fra l'altro, nella calcolazione numerica.

Per brevità, si dirà *matrice* $_{m.n}$ una matrice di m linee e n colonne. Le matrici che qui intervengono sono quadrate o formate da una colonna o da una linea; nel primo caso le si indica con $[a]$, nel secondo con $\{a\}$, nel terzo con $\{a\}^*$, essendo a un generico elemento della matrice (di solito, il primo). Si indica con $[a]^*$ la trasposta di una matrice $[a]$; così la formula di trasposizione del prodotto si scrive

$$([a]\,[b])^* = [b]^*\,[a]^* . \tag{1}$$

Si indica con $[1]_m$ la matrice $_{m.m}$ unitaria.

Nella fig. 1 è indicato lo schema delle operazioni del prodotto $[p] = [a]\,[A]$, nella disposizione suggerita da Falk. Nel prodotto $[p]$ si dice che la matrice $[a]$ *premoltiplica* $[A]$ e $[A]$ *posmoltiplica* $[a]$.

Le proprietà della somma delle matrici sussistono invariate se gli elementi delle matrici addende sono vettori invece che scalari. Anche le proprietà del prodotto si estendono al prodotto scalare di due matrici formate da vettori. Infatti, se a_x, a_y, a_z e b_x, b_y, b_z sono le componenti dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ sui versori ortogonali $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$ si può scrivere

$$[\vec{a}] = [a_x]\vec{i}_x + [a_y]\vec{i}_y + [a_z]\vec{i}_z \tag{2}$$

$$[\vec{b}] = [b_x]\vec{i}_x + [b_y]\vec{i}_y + [b_z]\vec{i}_z \tag{3}$$

---

[1] Vedasi, ad esempio, l'elencazione bibliografica di J. H. ARGYRIS in « Applied Mechanics Reviews », 1958, p. 337-338.

e quindi si ha

$$[\vec{a}] \cdot [\vec{b}] = [a_x]\,[b_x] + [a_y]\,[b_y] + [a_z]\,[b_z]\,. \tag{4}$$

Perciò gli elementi della matrice prodotto si ottengono moltiplicando scalarmente gli elementi della matrice a fattore, associati come indica la fig. 1 per il caso di elementi scalari.

Sussistono ovviamente le proprietà

$$[\vec{a}] \cdot ([\vec{b}] + [\vec{c}]) = [\vec{a}] \cdot [\vec{b}] + [\vec{a}] \cdot [\vec{c}], \quad ([\vec{a}] \cdot [\vec{b}])\,[c] = [\vec{a}] \cdot ([\vec{b}]\,[c])\,. \tag{5}$$

Si osserva che, poichè l'uguaglianza di due matrici ${}_{m \cdot n}$ comporta l'uguaglianza degli $m \cdot n$ elementi corrispondenti, un'equazione fra matrici di

$$p = aA + bB + cC + dD \qquad \begin{bmatrix} . & A & . \\ . & B & . \\ . & C & . \\ . & D & . \end{bmatrix} = [A]$$

$$[a] = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & | & . \\ . & \downarrow & . \\ . \rightarrow & p & . \end{bmatrix} = [p]$$

Fig. 1.

elementi scalari equivale a $m \cdot n$ equazioni scalari; un'equazione fra matrici ${}_{m \cdot n}$ di vettori in uno spazio a tre dimensioni equivale a $m \cdot n$ equazioni vettoriali, ossia a $3m \cdot n$ equazioni scalari.

I. 2. - COORDINATE E LORO TRASFORMAZIONE. — Siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali e siano $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$ i versori degli assi. Siano $\vec{i}_{\bar{x}}$, $\vec{i}_{\bar{y}}$, $\vec{i}_{\bar{z}}$ i versori di una terna congruente alla prima, direzione degli assi del nuovo riferimento cartesiano $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Siano $\bar{x}_x$, $\bar{x}_y$, $\bar{x}_z$ i coseni direttori dell'asse $\bar{x}$ rispetto alla prima terna: ossia

$$\vec{i}_{\bar{x}} = \bar{x}_x \vec{i}_x + \bar{x}_y \vec{i}_y + \bar{x}_z \vec{i}_z\,. \tag{6}$$

Questa relazione e le analoghe relative ai versori $\vec{i}_{\bar{y}}$, $\vec{i}_{\bar{z}}$ si compendiano nell'equazione

$$\{\vec{i}_{\bar{x}}\} = [\bar{x}_x]\,\{\vec{i}_x\} \tag{7}$$

le matrici che qui compaiono essendo definite nella Tabella I.

Tabella I.

$$[\bar{x}_x\bar{x}_x] = \begin{bmatrix} \bar{x}_x\bar{x}_x & \bar{x}_x\bar{x}_y & \bar{x}_x\bar{x}_z & \bar{x}_y\bar{x}_x & \dots & \bar{x}_z\bar{x}_z \\ \bar{x}_x\bar{y}_x & \bar{x}_x\bar{y}_y & \bar{x}_x\bar{y}_z & \bar{x}_y\bar{y}_x & \dots & \bar{x}_z\bar{y}_z \\ \bar{x}_x\bar{z}_x & \bar{x}_x\bar{z}_y & \bar{x}_x\bar{z}_z & \bar{x}_y\bar{z}_x & \dots & \bar{x}_z\bar{z}_z \\ \bar{y}_x\bar{x}_x & \bar{y}_x\bar{x}_y & \bar{y}_x\bar{x}_z & \bar{y}_y\bar{x}_x & \dots & \bar{y}_z\bar{x}_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{z}_x\bar{z}_x & \bar{z}_x\bar{z}_y & \bar{z}_x\bar{z}_z & \bar{z}_y\bar{z}_x & \dots & z_z\bar{z}_z \end{bmatrix} \qquad \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial\bar{x}}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial\bar{x}} \\ \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial\bar{y}} \\ \dfrac{\partial\vec{r}'}{\partial\bar{z}} \end{bmatrix}$$

$$\{\vec{i}_x\} = \begin{bmatrix} \vec{i}_x \\ \vec{i}_y \\ \vec{i}_z \end{bmatrix} \qquad \{\vec{i}_{\bar{x}}\} = \begin{bmatrix} \vec{i}_{\bar{x}} \\ \vec{i}_{\bar{y}} \\ \vec{i}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma_{xx}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad [D_{xx}] = [1]_3 + \left|\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|$$

$$\{\bar{x}\} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \qquad \{\vec{\sigma}_{\bar{x}}\} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma}_{\bar{x}} \\ \vec{\sigma}_{\bar{y}} \\ \vec{\sigma}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \qquad \{\vec{\sigma}_x\} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma}_x \\ \vec{\sigma}_y \\ \vec{\sigma}_z \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{xx}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad [s_{xx}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \qquad [\Gamma_{xx}] = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{x}_x] = \begin{bmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y & \bar{x}_z \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y & \bar{y}_z \\ \bar{z}_x & \bar{z}_y & \bar{z}_z \end{bmatrix} \qquad [\bar{x}_x]^* = \begin{bmatrix} \bar{x}_x & \bar{y}_x & \bar{z}_x \\ \bar{x}_y & \bar{y}_y & \bar{z}_y \\ \bar{x}_z & \bar{y}_z & \bar{z}_z \end{bmatrix} \qquad [\varepsilon_{xx}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial x_0}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \partial x_0/\partial x & \partial y_0/\partial x & \partial z_0/\partial x \\ \partial x_0/\partial y & \partial y_0/\partial y & \partial z_0/\partial y \\ \partial x_0/\partial z & \partial y_0/\partial z & \partial z_0/\partial z \end{bmatrix} \qquad \left|\frac{\partial u_x}{\partial x}\right| = \begin{bmatrix} \partial u_x/\partial x & \partial u_y/\partial x & \partial u_z/\partial x \\ \partial u_x/\partial y & \partial u_y/\partial y & \partial u_z/\partial y \\ \partial u_x/\partial z & \partial u_y/\partial z & \partial u_z/\partial z \end{bmatrix}$$

Se r è la coordinata vettoriale del punto generico, ossia

$$\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z = \bar{x}\vec{i}_{\bar{x}} + \bar{y}\vec{i}_{\bar{y}} + \bar{z}\vec{i}_z \tag{8}$$

moltiplicando (scalarmente) ambo i membri della (7) per $\vec{r}$ si ha

$$\{x\} = [\bar{x}_x]\{x\} \tag{9}$$

con le notazioni della Tab. I. La matrice ${}_{3\cdot 3}[x_x]$ è dunque l'operatore che trasforma la terna degli assi x, y, z e le relative coordinate, nel passaggio al nuovo riferimento ortogonale x, y, z. La matrice trasposta $[x_x]^*$ rappresenta anche la matrice reciproca, essendo [2]

$$[x_x][x_x]^* = 1\,. \tag{10}$$

La stessa matrice trasposta si ottiene da $[x_x]$ scambiando i simboli sopralineati con quelli che non lo sono e notando che è $h_{\bar{k}} = k_h$ $(h, k = x, y, z)$. La matrice $[x_x]$ rappresenta la rotazione che porta dagli assi x, y, z agli assi x, y, z; la sua trasposta dà la rotazione inversa. Se, ad esempio, la terna $\bar{x}$, y, $\bar{z}$ si ottiene dalla prima terna con una rotazione di ampiezza ϑ intorno a x, la matrice $[x_x]$ è data da

$$[R_\vartheta] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Se dalla terna x, y, z con la rotazione $[R'] = [x'_x]$ si passa alla terna x', y', z' e da questa con la rotazione $[R''] = [x_{x'}]$ si ottiene la terna x, y, z, la rotazione che conduce direttamente dalla prima alla terza terna è rappresentata dalla matrice prodotto $[R''][R']$. Ciò appare evidente sostituendo nella relazione

$$\{\vec{i}_{\bar{x}}\} = [\bar{x}_{x'}]\{\vec{i}_{x'}\} \tag{12'}$$

la colonna $\{\vec{i}_{x'}\}$ dalla relazione

$$\{\vec{i}_{x'}\} = [x'_x]\{\vec{i}_x\} \tag{12''}$$

e confrontando con la (7).

I. 3. - Analisi dello stato di tensione. — Lo stato di tensione della particella in esame viene riferito agli assi x, y, z; $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$, $\vec{\sigma}_z$ sono i vettori che rappresentano la tensione esistente sulle sezioni perpendico-

[2] L'uguaglianza si prova sviluppando il prodotto e tenendo presenti le relazioni fra i coseni direttori della terna ortogonale $\vec{i}_{\bar{x}}$, $\vec{i}_{\bar{y}}$, $\vec{i}_{\bar{z}}$.

lari rispettivamente agli assi x, y, z. Si indicano con σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} le componenti di $\vec{\sigma}_x$ su x, y, z; per uniformità di notazione, si denota dunque con σ_{xx} la tensione normale, usualmente chiamata σ_x; σ_{xy} e σ_{xz} sono le tensioni tangenziali di solito indicate con τ_{xy} e τ_{xz}. Per le altre componenti di tensione si pongono analoghe definizioni, riassunte dalla relazione:

$$\{\vec{\sigma}_x\} = [\sigma_{xx}]\,\{\vec{i}_x\}\,. \tag{13}$$

La matrice $[\sigma_{xx}]$, esplicitamente scritta nella Tab. I, trasforma la terna dei versori dei tre assi nei vettori rappresentanti la tensione sulle sezioni normali a x, y, z. Come è noto, questa matrice è simmetrica; ossia è

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}\,. \tag{14}$$

Similmente nel riferimento x, y, z si scrive

$$\{\vec{\sigma}_{\bar{x}}\} = [\sigma_{\bar{x}\bar{x}}]\,\{\vec{i}_x\}\,. \tag{15}$$

Il vettore $\vec{\sigma}_{\bar{x}}$ è legato ai vettori tensione relativi alla prima terna dalla relazione (3)

$$\vec{\sigma}_{\bar{x}} = x_x\vec{\sigma}_x + x_y\vec{\sigma}_y + x_z\vec{\sigma}_z\,. \tag{16}$$

Questa e le analoghe relazioni che sussistono per i vettori $\vec{\sigma}_x$ e $\vec{\sigma}_z$ sono compendiate dalla

$$\{\vec{\sigma}_{\bar{x}}\} = [\bar{x}_x]\,\{\vec{\sigma}_x\}\,. \tag{17}$$

---

(3) Il tetraedro elementare (di Cauchy) (fig. 2) definito dai tre piani coordinati per l'origine O e dal piano normale a $\vec{i}_{\bar{x}}$ intercettante sugli assi x, y, z i segmenti OA,

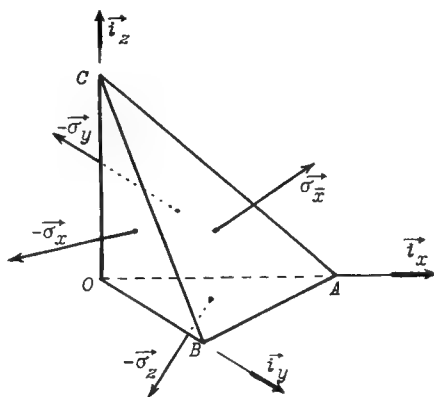



Fig. 2.

OB, OC, ha le facce OBC, OCA, OAB, ABC soggette rispettivamente alle tensioni $-\vec{\sigma}_x$, $-\vec{\sigma}_y$, $-\vec{\sigma}_z$, $\vec{\sigma}_{\bar{x}}$; le aree delle facce stesse stanno nei rapporti $x_x : x_y : x_z : 1$. Uguagliando a zero la somma delle forze, si ha la (16).

Facendo uso delle (7), (13) e (15) questa equazione si scrive

$$[\sigma_{\bar{x}\bar{x}}]\,\{\vec{i}_x\} = [\sigma_{\bar{x}x}]\,[\bar{x}_x]\,\{\vec{i}_x\} = [\bar{x}_x]\,[\sigma_{xx}]\,\{\vec{i}_x\}\,. \tag{18}$$

Dall'eguaglianza fra la seconda e la terza espressione, che equivale a tre equazioni vettoriali, ossia a nove scalari, si deduce l'eguaglianza fra matrici$_{3\cdot 3}$:

$$[\sigma_{x\bar{x}}]\,[\bar{x}_x] = [\bar{x}_x]\,[\sigma_{xx}]\,. \tag{19}$$

Posmoltiplicando ambo i membri per $[\bar{x}_x]^*$ si ottiene

$$[\sigma_{\bar{x}x}] = [\bar{x}_x]\,[\sigma_{xx}]\,[\bar{x}_x]^*\,. \tag{20}$$

Sono sintetizzate in questa formula le ben note relazioni fra le componenti di tensioni relative a due riferimenti cartesiani. In forma scalare esse si possono scrivere

$$\sigma_{\bar{h}\bar{k}} = \sum_{h,k} \bar{h}_h \bar{k}_k \sigma_{hk} \qquad (\bar{h}, \bar{k} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ h, k = x, y, z)\,. \tag{21}$$

La sommatoria contiene nove addendi che si scrivono ponendo per *hk* successivamente *xx*, *xy*, *xz*, *yx*, *yy*, *yz*, *zx*, *zy*, *zz*. Con le analoghe scelte per $\bar{h}\bar{k}$ si hanno le espressioni [4] dei nove elementi, componenti della matrice $[\sigma_{\bar{x}\bar{x}}]$. Indichiamo con $\{\sigma_{xx}\}$ la colonna che si ottiene allineando gli elementi della matrice $[\sigma_{xx}]$, come è indicato nella Tab. I. La relazione fra questa e l'analoga colonna delle componenti di $\{\sigma_{\bar{x}\bar{x}}\}$ si può scrivere ancora nella forma equivalente alle (20) e (21)

$$\{\sigma_{\bar{x}\bar{x}}\} = [\bar{x}_x \bar{x}_x]\,\{\sigma_{xx}\} \tag{22}$$

dove $[\bar{x}_x \bar{x}_x]$ è una matrice $_{9\cdot 9}$ formata come è indicato nella Tab. I.

È noto che la direzione $\vec{i}_{\bar{x}}$ può sempre scegliersi in modo che sia $\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = \sigma_{\bar{x}\bar{z}} = 0$. Indichiamo con σ_p il valore di $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$ quando i due parametri dai quali la direzione $\vec{i}_{\bar{x}}$ dipende siano scelti in modo da verificare le due condizioni poste. In tali condizioni le eguaglianze fra gli elementi della prima linea nelle matrici prodotto a primo e secondo membro nella (19) si scrivono

$$\bar{x}_x(\sigma_{xx} - \sigma_p) + \bar{x}_y\sigma_{xy} + \bar{x}_z\sigma_{xz} = 0 \tag{23}$$

$$\bar{x}_x\sigma_{xy} + \bar{x}_y(\sigma_{yy} - \sigma_p) + \bar{x}_z\sigma_{yz} = 0 \tag{24}$$

$$\bar{x}_x\sigma_{xz} + \bar{x}_y\sigma_{yz} + \bar{x}_z(\sigma_{zz} - \sigma_p) = 0\,. \tag{25}$$

[4] Se si tiene conto delle (14) le espressioni si semplificano un poco, ma perdono il carattere di uniformità proprio delle relazioni tensoriali.

Queste equazioni nelle incognite $\dot{x}_x$, x_y, $\dot{x}_z$ costituiscono un sistema omogeneo che ammetterà una soluzione significativa quando sia nullo il determinante dei coefficienti. Lo sviluppo di tale determinante, ordinato secondo le potenze di σ_p si può scrivere come segue

$$\sigma_p^3 - I_\sigma \sigma_p^2 - J_\sigma \sigma_p - K_\sigma = 0 \tag{26}$$

essendo (5)

$$I_\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \tag{27}$$

$$J_\sigma = \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} \tag{28}$$

$$K_\sigma = \text{Det}\,[\sigma_{xx}]\,. \tag{29}$$

La (26) come equazione in σ_p ha tre radici, come è noto, sempre reali dette tensioni principali, che indichiamo con σ_1, σ_2, σ_3. La direzione di σ_1 si ottiene sostituendo nelle (23) e (24) a σ_p il valore σ_1 e risolvendo queste equazioni sotto la condizione $\bar{x}_x^2 + \bar{x}_y^2 + \bar{x}_z^2 = 1$. Le tre direzioni di σ_1, σ_2 e σ_3 sono fra loro ortogonali e si ottengono dalle medesime equazioni, cambiando solo il nome delle incognite e il valore di σ_p.

Per le note relazioni fra i coefficienti e le radici delle equazioni algebriche si ha

$$I_\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{30}$$

$$J_\sigma = - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \tag{31}$$

$$K_\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\,. \tag{32}$$

Le tensioni principali costituiscono caratteristiche intrinseche dello stato di tensione, nel senso che i loro valori non debbono cambiare se si modifica il sistema di riferimento. Quindi le quantità I_σ, J_σ e K_σ che secondo le (30)-(32) dipendono simmetricamente da σ_1, σ_2 e σ_3 sono invarianti: ossia, per qualunque orientazione degli assi, le funzioni delle componenti di tensione espresse dalle (27)-(29) debbono assumere il medesimo valore. I_σ, J_σ e K_σ si dicono primo, secondo e terzo invariante dello stato di tensione. Qualunque grandezza che dipenda dallo stato di tensione ma non dall'orientamento dalla direzione secondo la quale è sollecitato il materiale è esprimibile in funzione di I_σ, J_σ e K_σ.

I. 4. - Rappresentazioni dello stato di tensione. — Fra le rappresentazioni in uso dello stato di tensione si passeranno in rassegna quelle di maggior interesse per il problema in esame.

---

(5) Si indica con *Det* $[a]$ il valore (scalare) del determinante formato con gli elementi della matrice $m \cdot m\,[a]$.

a) La matrice $[\sigma_{xx}]$ contiene tutti gli elementi atti a caratterizzare uno stato di tensione. Il fatto che, per il cambiamento di coordinate, le componenti di tensione si trasformino come vuole la [20] conferisce a questo gruppo di valori i caratteri di *tensore del II ordine* (*tensore degli sforzi*).

b) Risulta opportuno separare dal tensore degli sforzi il sistema di tensioni « idrostatiche » di intensità $\bar{\sigma} = I_\sigma/3$ e si scrive

$$(33) \qquad [\sigma_{xx}] = \bar{\sigma}[1]_3 + [s_{xx}] .$$

Il primo addendo a secondo membro rappresenta un sistema di tensioni che, come le azioni idrostatiche, sono per qualunque giacitura di sezione normali e di ugual valore. Questo è naturalmente un tensore (come può anche vedersi per il fatto che la matrice $[1]_3$ si trasforma in se stessa mediante la (20)). Il secondo addendo è quindi anche un tensore e segue la stessa legge di trasformazione. I suoi elementi sono

$$(34) \qquad \begin{gathered} s_{xx} = \sigma_{xx} - \bar{\sigma} = \frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{zz}, \\ s_{xy} = \sigma_{xy}, \ldots , s_{zz} = \sigma_{zz} - \bar{\sigma} . \end{gathered}$$

Questo sistema di tensioni è caratterizzato dall'annullarsi del primo invariante

$$(35) \qquad I_s = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0 .$$

Gli altri due invarianti di questo che viene detto *deviatore di tensione* si possono esprimere in vario modo, in virtù della (35). Per il secondo invariante si ha

$$(36) \qquad 2J_s = s_{xx}^2 + s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yx}^2 + s_{yy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 + s_{zy}^2 + s_{zz}^2$$

o anche nelle usuali componenti

$$(37) \qquad 6J_s = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 .$$

In funzione delle tensioni principali si può scrivere

$$(38) \qquad 2J_s = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

e, per il terzo invariante

$$(39) \qquad K_s = s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) .$$

c) In uno spazio a nove dimensioni, assegnando per ciascun elemento della colonna $\{\sigma_{xx}\}$ uno dei versori ortogonali che rispettivamente indi-

chiamo con $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{xy}$, ..., $\vec{i}_{zz}$ si può rappresentare lo stato di tensione mediante il vettore

$$(40) \qquad \vec{\sigma} = \sigma_{xx}\vec{i}_{xx} + \sigma_{xy}\vec{i}_{xy} + \ldots + \sigma_{zz}\vec{i}_{zz} .$$

Questa rappresentazione, anche se non è sostenuta dall'intuizione geometrica, che di solito deve essere guidata da analogie con lo spazio tridimensionale e suffragata da considerazioni di geometria analitica, è tuttavia utilissima in molte interpretazioni; certe conclusioni acquistano intelligibilità geometrica, quando sono riducibili, per sezioni o proiezioni, ad uno spazio tridimensionale (6).

Nell'ordinaria notazione la (40) diventa

$$(41) \qquad \vec{\sigma} = \sigma_x\vec{i}_{xx} + \tau_{xy}(\vec{i}_{xy} + \vec{i}_{yx}) + \ldots + \sigma_z\vec{i}_{zz} .$$

Il vettore rappresentativo è perciò vincolato a stare nello spazio a sei dimensioni nel quale giacciono i sei vettori ortogonali $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{yy}$, $\vec{i}_{zz}$, $\vec{i}_{xy} + \vec{i}_{yx}$, $\vec{i}_{yz} + \vec{i}_{zy}$, $\vec{i}_{zx} + \vec{i}_{xz}$.

Nello spazio a nove dimensioni si può rappresentare il deviatore di tensione mediante il vettore

$$(42) \qquad \vec{s} = s_{xx}\vec{i}_{xx} + s_{xy}\vec{i}_{xy} + \ldots s_{zz}\vec{i}_{zz} .$$

La (35) è la condizione di ortogonalità fra $\vec{s}$ e il vettore

$$(43) \qquad \vec{i}_t = \vec{i}_{xx} + \vec{i}_{yy} + \vec{i}_{zz} .$$

Il vettore rappresentativo della tensione idrostatica è parallelo a $\vec{i}_t$.

È interessante osservare come si modificano i vettori rappresentativi in conseguenza di una rotazione delle tensioni nel corpo (7). Per analizzare tali effetti è conveniente l'uso della (22), nella quale la rotazione è rappresentata dalla matrice $[\dot{x}_x \dot{x}_x]$. Anche per questa come per $[x_x]$, reciproca

---

(6) Poche nozioni generali sono sufficienti per la presente applicazione. Il prodotto scalare di due vettori si definisce, al solito, come somma dei prodotti delle componenti omologhe. Una relazione $f(\sigma_{hk})$ o fra le 9 coordinate definisce un sottospazio a 8 dimensioni, detto *ipersuperficie* o spesso, impropriamente, superficie; se la f è lineare nelle σ, si ha un *iperpiano*. Il vettore $d\vec{\sigma}$ che collega due punti prossimi dell'ipersuperficie è *tangente* ad essa. Le sue componenti soddisfano alla relazione

$$df = (\partial f/\partial\sigma_{xx})d\sigma_{xx} + \ldots + (\partial f/\partial\sigma_{zz})d\sigma_{zz} = 0$$

che si può interpretare come condizione di ortogonalità fra $d\vec{\sigma}$ ed il vettore di componenti $\partial f/\partial\sigma_{hk}$ che perciò è detto *normale* al luogo $f = 0$. Così, le normali ad un iperpiano han tutte la stessa direzione, la *direzione* di un vettore essendo definita dagli 8 rapporti fra le componenti. I punti del luogo $f = 0$ che soddisfano alla relazione $f_1 = 0$ danno un luogo a 7 dimensioni; e così via. Così, 7 relazioni lineari definiscono un piano.

(7) Ad esempio una tale rotazione si potrebbe produrre in una sfera isotropa, facendo semplicemente girare il complesso delle azioni applicate sul contorno.

e trasposta coincidono. Ne segue un'importante proprietà: il prodotto scalare dei vettori rappresentativi $\vec{\sigma}'$, $\vec{\sigma}''$ di due generici stati di tensione non varia quando quelle tensioni subiscano nel corpo la medesima rotazione. Infatti, secondo le definizioni, si può scrivere

$$\vec{\sigma}' \cdot \vec{\sigma}'' = \{\sigma'_{xx}\}^* \cdot \{\sigma''_{xx}\} .$$

In base alla (22), alla (1) e alla proprietà menzionata della matrice $[x_x x_x]$ si trova che il prodotto $\{\sigma'_{xx}\}^* \cdot \{\sigma''_{xx}\}$ ha il medesimo valore ([8]).

La trasformazione (20), e la equivalente (22), hanno quindi i caratteri di un moto rigido nello spazio dei vettori rappresentativi. Chiameremo « rotazioni » queste trasformazioni dei vettori rappresentativi. Si noti che la « rotazione » di $\vec{\sigma}$ non ne modifica la proiezione I_σ su $\vec{i}_t$.

d) Lo stato di tensione si può definire dando i valori delle tensioni principali insieme a tre parametri (ad esempio, i tre angoli di Eulero) che individuino l'orientazione delle direzioni principali. Se quindi si fa uso della rappresentazione nello spazio tridimensionale dei versori ortogonali $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$, nel quale si riporta il vettore

$$\vec{\sigma}_p = \sigma_1 \vec{i}_1 + \sigma_2 \vec{i}_2 + \sigma_3 \vec{i}_3 \tag{44}$$

si dovranno associare ad esso i tre parametri della rotazione. Di questo spazio, che diciamo *delle tensioni principali* ([9]), conviene considerare la proiezione assonometrica su un piano normale alla trisettrice dell'ottante positivo, come il piano

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{45}$$

che chiamiamo *piano dei deviatori*. Le direzioni positive degli assi coordinati si proiettano qui su tre semirette per l'origine o (fig. 3) facenti angoli di 120° fra loro, che diciamo *fondamentali positive* (linee continue nella

---

([8]) Si costruiscano 9 vettori, ciascuno avente per componenti gli elementi di una linea della matrice $[x_x x_x]$; si hanno 9 versori ortogonali. Le componenti di tensione dopo una rotazione sono le proiezioni di $\vec{\sigma}$ sui versori anzidetti.

([9]) Lo spazio delle tensioni principali può considerarsi come un sottospazio di quello a 9 dimensioni di $\vec{\sigma}$ caratterizzato dalle 6 condizioni $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \dots = 0$, $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ essendo gli stessi versori $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{yy}$, $\vec{i}_{zz}$. Il calcolo delle tensioni principali può in sostanza considerarsi come la determinazione della rotazione con la quale $\vec{\sigma}$ si porta in quel sottospazio. In quella « rotazione » si mantiene inalterata la lunghezza del vettore $\vec{\sigma}$ e la sua proiezione su $\vec{i}_t$, oltre a K_s. Si noti che se si fa girare $\vec{\sigma}$ intorno a $\vec{i}_t$ nello spazio delle tensioni principali di un angolo che non sia 120° o 240° o un altro degli angoli che portano P nei punti 2, 3, 4, 5, 6 della fig. 3, non si compie una « rotazione » perchè si altera K_s. Similmente, non tutte le rotazioni di una retta r intorno ad un suo punto O, in un piano, appartengono alle rotazioni intorno ad una retta per O nello spazio tridimensionale.

figura); diciamo *fondamentali negative* le semirette opposte (linee a tratto) e *bisettrici* le rette che bisecano gli angoli fra fondamentali positive e negative (linee punteggiate).

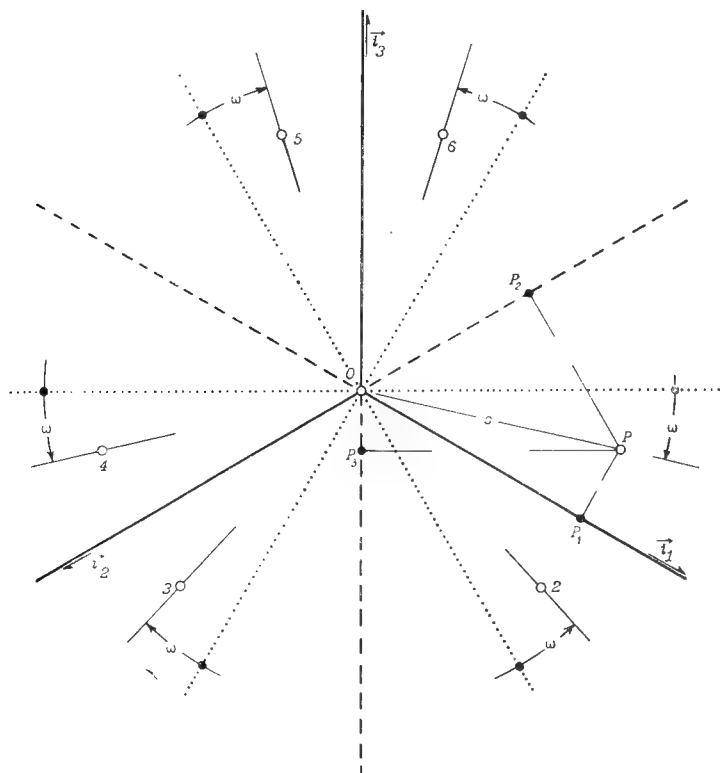



Fig. 3.

Questa assonometria gode di interessanti proprietà la cui dimostrazione, che si omette, può svolgersi sulla base di considerazioni elementari di geometria.

Sia P la proiezione dell'estremo del vettore $\vec{\sigma}_p$. Le proiezioni OP_1, OP_2, OP_3 di OP sulle fondamentali misurano in valore e segno le quantità $s_1\sqrt{1,5}$, $s_2\sqrt{1,5}$, $s_3\sqrt{1,5}$, nella scala in cui le tensioni principali sono riportate sugli assi coordinati. Quindi noti i valori di due fra le quantità s_1, s_2, s_3, il punto P viene subito individuato. Si stabilisce così nel piano dell'assonometria un sistema di coordinate triangolari, in relazione col deviatore di tensione, senza intervento della tensione media $\bar{\sigma}$: uno stesso punto P corrisponde a tutti gli stati di tensione differenti solo nella componente idrostatica.

Si indichi con ω l'angolo che la direzione OP fa con la bisettrice più vicina, positivo se P cade fra questa e una fondamentale positiva.

Sia η il parametro adimensionale

$$\eta = K_s J_s^{-1,5} . \tag{46}$$

Si trova che

$$\sin 3\omega = 1,5 \sqrt{3}\, \eta . \tag{47}$$

Si osservi che η ha espressione simmetrica nelle tensioni principali, nella quale cioè non esiste distinzione fra s_1, s_2 e s_3. La stessa equazione (47), con la definizione data di ω, sussiste quindi per ciascuno dei sei settori compresi fra le fondamentali. Lo stesso valore di ω compete alle radiali sulle quali stanno i punti 2, 3, 4, 5, 6 ottenuti da P permutandone le coordinate in tutti i modi possibili [10].

Gli invarianti I_σ, J_s, K_s stabiliscono un sistema di coordinate cilindriche nello spazio delle tensioni principali, con la trisettrice dell'ottante positivo per asse: $I_\sigma/\sqrt{3}$ rappresenta la coordinata assiale, misurata a partire dal piano dei deviatori; $\sqrt{2J_\sigma}$ misura la distanza OP, ossia la coordinata radiale s, modulo di $\vec{s}$; il parametro η definisce in modo univoco la coordinata angolare nel settore di 60° compreso fra due fondamentali. Nello spazio delle tensioni principali ad un'assegnata terna di valori per i tre invarianti corrispondono sei punti, distribuiti come appare dalla fig. 3. Questa molteplicità corrisponde alla simmetria che deve presentare qualunque figura che sia definita in funzione dei tre invarianti. L'equazione

$$f(I_\sigma, J_s, K_s) = 0$$

per la permutabilità delle coordinate σ_1, σ_2, σ_3 implicite in I_σ, J_s e K_s, rappresenta una superficie avente i tre piani di simmetria $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_3 = \sigma_1$.

Questi piani contengono la trisettrice dell'ottante positivo, che è asse ternario di simmetria della superficie. Sull'assonometria i tre piani hanno per tracce (e proiezioni) le tre fondamentali. Se nella funzione f non figura K_s la superficie è di rivoluzione intorno alla medesima trisettrice. Se non figura I_σ la superficie è cilindrica, con generatrici parallele alla stessa retta. Se la f contiene solo potenze pari di K_s la simmetria si raddoppia, poichè anche i piani per l'asse che hanno come tracce le bisettrici risultano essere di simmetria. In questo caso basta conoscere la forma della superficie di un diedro $0 \leq \omega^0 \leq 30^0$ perchè essa sia completamente

---

(10) Anche se ω si intende misurato a partire da una bisettrice senza la limitazione imposta ($-30^0 \leq \omega^0 \leq 30^0$), dalla stessa (47), considerata come equazione in ω, si ottengono le sei direzioni indicate. Si noti che il paramentro η deve sempre essere compreso fra $-2/\sqrt{27}$ e $+2/\sqrt{27}$ perchè la corrispondenza sia reale.

tamente il valore di μ proiettando il radialmente punto P sulla scala marcata. Sulla stessa figura è rappresentata la corrispondenza fra i parametri μ e η. Da questi grafici si rileva che μ è una variabile più adatta che η per la rappresentazione di una generica correlazione, in particolare se dedotta per via sperimentale. Infatti essendo $d\eta/d\mu = 0$ agli estremi dell'intervallo $-30^0 \leq \omega^0 \leq 30^0$, le ascisse di un grafico tracciato in funzione di η vengono a restringersi troppo ai due estremi (Ved. fig. 2, Rif. 47 A).

Nella fig. 5 è rappresentata la corrispondenza fra la posizione del punto P e i parametri μ e η in due adiacenti angoli di 60^0. Le stesse relazioni si ripetono negli altri settori, ma di solito l'esame può essere limitato ad un angolo di 60^0. Si rileva che alle sollecitazioni di trazione, compressione e tangenziale pura, con l'aggiunta di una qualsiasi trazione o compressione idrostatica, corrispondono rispettivamente i valori di ω^0 pari a 30^0, -30^0 e 0, di μ pari a 1, -1 e 0 e di η pari a $2/\sqrt{27}$, $-2/\sqrt{27}$ e 0.

L'invariante J_s, e quindi la distanza OP, coordinata radiale s, hanno, in relazione allo stato di tensione nel corpo, un significato che spesso viene posto in particolare rilievo: la tensione tangenziale sulle giaciture normali alle trisettrice dei triedri principali, ossia sui paini paralleli alle facce dell'ottaedro regolare con i vertici sugli assi principali è data da [12]

$$\tau_{ot} = \sqrt{2J_s/3} \tag{50}$$

L'introduzione di questa che è detta *tensione ottaedrica* appare come un concetto suggestivo in quanto fa intervenire una tensione realmente presente nel corpo in sostituzione di un ente matematico quale è l'invariante J_s. Però nessuna relazione fisica è scaturita in conseguenza di questa connessione.

I. 5. - ANALISI DELLA DEFORMAZIONE. — Nella deformazione il punto materiale P di coordinata vettoriale $\vec{r}$, si porta in un punto P' di coordinata vettoriale $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}$; il vettore $\vec{u}$ rappresenta lo *spostamento* che il punto ha subito nella deformazione. Stabilito un sistema di coordinate cartesiane

---

[12] Infatti, se si assumono come assi x, y, z le direzioni principali nel corpo e quindi è

$$\vec{\sigma}_x = \sigma_1\vec{i}_x,\ \vec{\sigma}_y = \sigma_1\vec{i}_y,\ \vec{\sigma}_z = \sigma_3\vec{i}_z$$

sulla sezione normale alla trisettrice di versore

$$\vec{i}_{\bar{x}} = (\vec{i}_x + \vec{i}_y + \vec{i}_z)/\sqrt{3}$$

per la (16) si ha la tensione

$$\vec{\sigma}_{\bar{x}} = (\sigma_1\vec{i}_x + \sigma_2\vec{i}_y + \sigma_3\vec{i}_z)/\sqrt{3}$$

In base alla definizione

$$\tau_{0t}^2 = \vec{\sigma}_{\bar{x}} \cdot \vec{\sigma}_{\bar{x}} - (\vec{\sigma}_{\bar{x}} \cdot \vec{i}_{\bar{x}})^2$$

si ha la (50).

individuata. Tale simmetria presenta il cilindro di equazione

$$J_s^3 - 2{,}25 K_s^2 = \text{costante}$$

la cui sezione è rappresentata nella fig. 4.

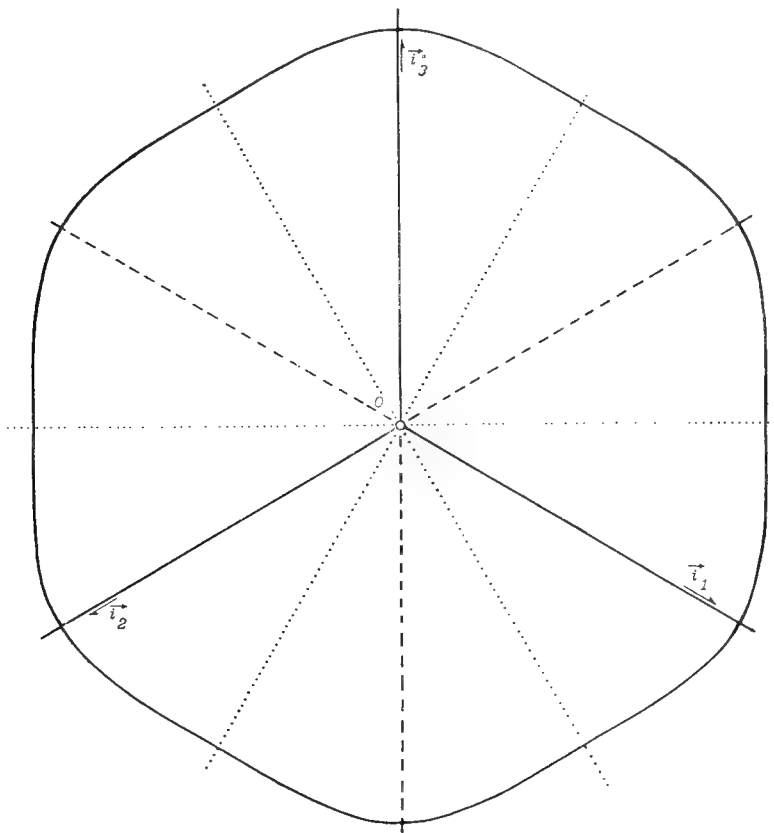



Fig. 4.

La posizione angolare del punto rappresentativo nell'assonometria può essere indicata mediante il parametro di Lode μ. Siano s', s'', s''' i valori di s_1, s_2, s_3 ordinati in modo che sia $s' < s'' < s'''$; si scrive

(48) $$\mu = 3s''/(s' - s''')$$

Si trova che è [11]

(49) $$\mu = \sqrt{3}\ \text{tang}\ \omega$$

[11] Si osservi che, mentre la (47) è verificata dagli angoli che le sei direzioni corrispondenti ad uno stesso η formano con una fissata bisettrice, per la (19) vale la limitazione posta nella definizione di ω perchè η è definito entro ciascun settore

Perciò, segnata su una normale alla bisettrice una scala lineare con valore 1 all'intersezione con la fondamentale positiva e — 1 all'intersezione con la semiretta negativa, come mostra la fig. 5, si può leggere diret-

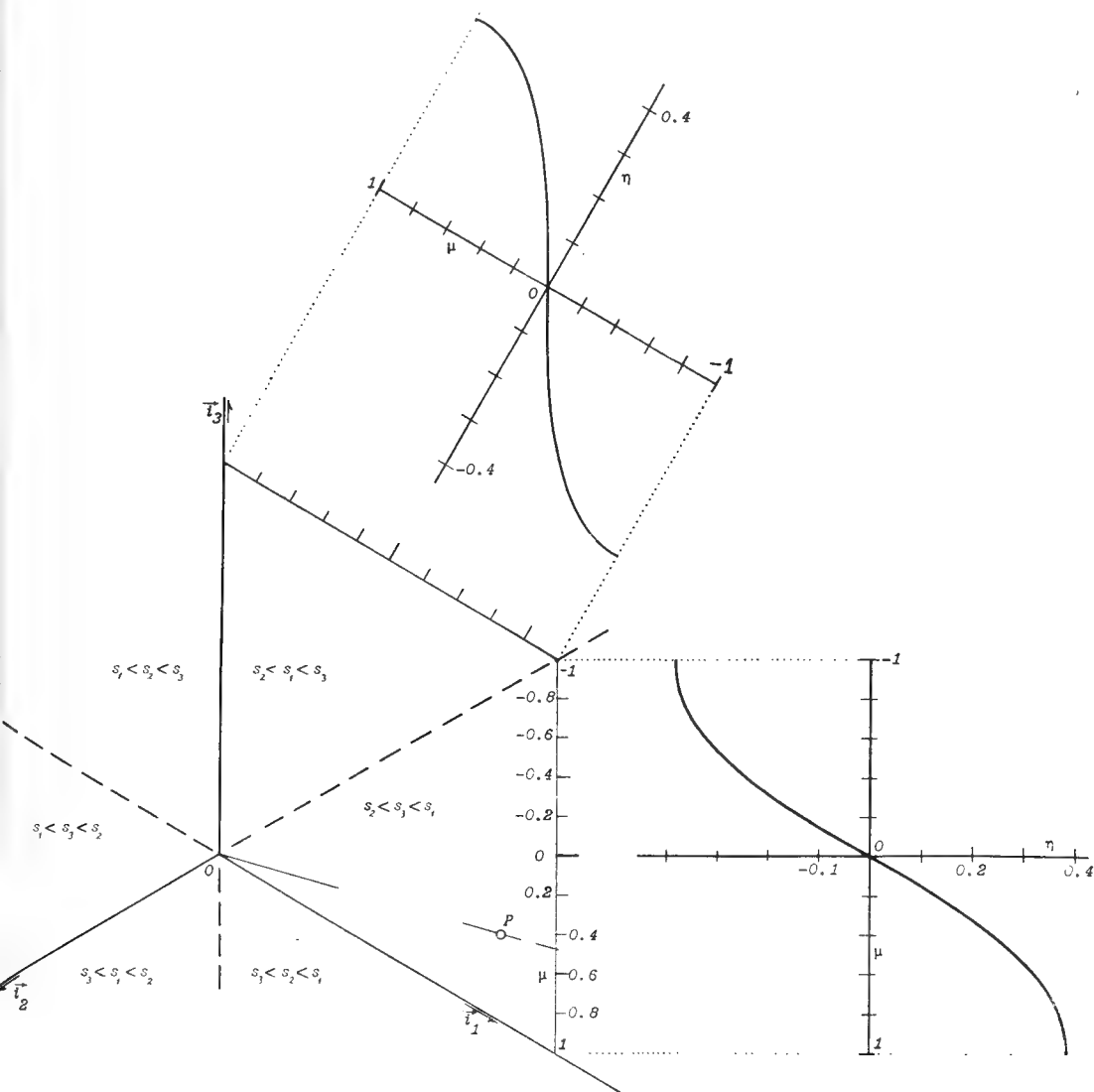



Fig. 5.

— $30^0 \leqq \omega^0 \leqq 30^0$. Così si ha il vantaggio di una corrispondenza biunivoca fra ω e μ, come fra ω e η. Si noti ancora che la definizione data di μ differisce per il segno da quella più in uso; si ha però così lo stesso segno di μ e η e inoltre è $\mu = 1$ per la sollecitazione di trazione, $\mu = -1$ per la compressione.

ortogonali x, y, z nel corpo prima della deformazione, facendo aderire i valori di queste coordinate ai punti materiali, a deformazione avvenuta le x, y, z rappresenteranno un sistema di coordinate curvilinee. Supposto che $\vec{r}$, e quindi $\vec{u}$, possano derivarsi rispetto alle coordinate, prendiamo in esame il significato della derivata $\partial\vec{r}'/\partial x$; il prodotto di essa per dx rappresenta il vettore elementare che nella deformazione considerata corrisponde all'elemento $\vec{i}_x dx$; il modulo di quel vettore, diviso per dx, rappresenta il rapporto fra la lunghezza finale e quella iniziale dello stesso elemento. Indicheremo con $1 + E_x$ detto rapporto che sarà quindi espresso dalla relazione

$$(1 + E_x)^2 = \frac{\partial\vec{r}'}{\partial x} \cdot \frac{\partial\vec{r}'}{\partial x} . \tag{51}$$

Analogamente dal vettore $\partial\vec{r}'/\partial y$ si potrà dedurre la dilatazione relativa E_y dell'elemento inizialmente parallelo a y. Il prodotto scalare dei vettori rappresentanti le due fibre elementari a deformazione avvenuta sarà uguale al prodotto delle loro lunghezze, ossia $dx\,(1 + E_x)$ e $dy\,(1 + E_y)$ per il coseno dell'angolo compreso, il cui complemento indichiamo con E_{xy}. Con questa definizione si ha

$$(1 + E_x)(1 + E_y) \sin E_{xy} = \frac{\partial\vec{r}'}{\partial x} \cdot \frac{\partial\vec{r}'}{\partial y} . \tag{52}$$

Così potranno calcolarsi le dilatazioni e le variazioni degli angoli delle fibre elementari per P parallele ai tre assi nello stato iniziale. Supponiamo ora che il corpo in questo stato venga riferito ad un altro sistema cartesiano $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Con le solite formule di derivazione si ha

$$\frac{\partial\vec{r}'}{\partial \bar{x}} = x_{\bar{x}} \frac{\partial\vec{r}'}{\partial x} + y_{\bar{x}} \frac{\partial\vec{r}'}{\partial y} + z_{\bar{x}} \frac{\partial\vec{r}'}{\partial z} . \tag{53}$$

Questa espressione e quella delle derivate rispetto a $\bar{y}$ e $\bar{z}$ si compendiano nella relazione

$$\left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial \bar{x}}\right\} = [\bar{x}_x] \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x}\right\} \tag{54}$$

il significato delle matrici essendo esplicitato nella Tab. I.

Moltiplichiamo le matrici dell'equazione (54) per le loro trasposte:

$$\left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial \bar{x}}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial \bar{x}}\right\}^* = [\bar{x}_x] \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x}\right\}^* [\bar{x}_x]^* . \tag{55}$$

Il prodotto a primo membro costituisce una matrice $_{3\cdot 3}$ che indichiamo con $[\Gamma_{\bar{x}\bar{x}}]$; con $[\Gamma_{xx}]$ indichiamo l'analogo prodotto che compare a secondo membro. Eseguendo esplicitamente le moltiplicazioni che conducono a queste matrici si vede che Γ_{xx} è il prodotto scalare che figura nella (51),

mentre Γ_{xy} è quello contenuto nella (52); dunque gli elementi della matrice $[\Gamma_{xx}]$ forniscono in modo diretto lo stato di deformazione dell'intorno di P. Introducendo queste definizioni nella (55) scriviamo

$$[\Gamma_{\dot{x}\dot{x}}] = [\dot{x}_x] [\Gamma_{xx}] [\dot{x}_x]^* . \tag{56}$$

Si vede perciò che la matrice di deformazione $[\Gamma_{xx}]$ nel cambiamento di coordinate si trasforma come faceva la $[\sigma_{xx}]$ nella (20). Si trasferiscono dunque immediatamente a questa matrice le proprietà rilevate a proposito dello stato di tensione. In particolare: esisteranno sempre tre direzioni mutuamente perpendicolari nel corpo indeformato che, a deformazione avvenuta, saranno ancora perpendicolari (direzioni principali), in quanto per esse risulta $\Gamma_{\dot{x}y} - \Gamma_{yz} = \Gamma_{z\dot{x}} = 0$. Per la determinazione di queste direzioni si avranno tre equazioni analoghe alle (23)-(25), solo essendo il simbolo σ sostituito da Γ. Annullando il determinante dei coefficienti, si giunge ad un'equazione di terzo grado in Γ_p, le cui radici indichiamo con Γ_1, Γ_2, Γ_3; esse sono anche qui sempre reali perchè il determinante anzidetto è simmetrico, come appare dalla (52): l'espressione a secondo membro che rappresenta Γ_{xy}, non cambia se si permuta x con y. Dalle tre radici si hanno le dilatazioni principali dalle equazioni

$$1 + E_i = \sqrt{\Gamma_i} \qquad (i = 1, 2, 3) . \tag{57}$$

Introduciamo nell'espressione delle componenti Γ gli spostamenti, che scriviamo nella forma

$$\vec{u} - u_x\vec{i}_x + u_y\vec{i}_y + u_z\vec{i}_z \tag{58}$$

u_x, u_y, u_z sono dunque le componenti di spostamento sui tre assi x, y, z. Osservando che $\partial\vec{r}/\partial x = \vec{i}_x$ si ha

$$\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\vec{i}_x + \frac{\partial u_y}{\partial x}\,\vec{i}_y + \frac{\partial u_z}{\partial x}\,\vec{i}_z . \tag{59}$$

Quindi, con le notazioni della Tab. I, risulta

$$\left\{\frac{\partial\vec{r}'}{\partial x}\right\} = [D_{xx}]\,\{\vec{i}_x\} \tag{60}$$

e conseguentemente, moltiplicando la (60) per la trasposta

$$[\Gamma_{xx}] = [D_{xx}]\,[D_{xx}]^* . \tag{61}$$

Dalla (60) appare che la matrice $[D_{xx}]$ è l'operatore che trasforma la terna ortogonale nella corrispondente deformata. Anche questa matrice si trasforma alla maniera di $[\sigma_{xx}]$. Infatti, scrivendo la (60) per una nuova

terna x, y, z e sostituendovi alla colonna $\{\vec{i}_x\}$ la sua espressione (7) si ha

$$\left\{\frac{\partial \vec{r}'}{\partial x}\right\} = [D_{\bar{x}x}]\,[\bar{x}_x]\,\{\vec{i}_x\}\,. \tag{62}$$

D'altra parte per le (54) e (60) si ha

$$\left\{\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \bar{x}}\right\} = [\bar{x}_x]\,[D_{xx}]\,\{\vec{i}_x\}\,.$$

Uguagliando le due espressioni di $\{\partial\vec{r}'/\partial\bar{x}\}$ si hanno nove equazioni scalari che impongono per $[D_{xx}]$ un'eguaglianza del tutto identica alla (19) per $[\sigma_{xx}]$.

Se x, y, z sono le direzioni principali ed indichiamo con $[X_x]$ la matrice che rappresenta la rotazione subita da tali direzioni nella deformazione, potremo scrivere

$$[D_{xx}] = [1 + E_1]\,[X_x] \tag{63}$$

essendo $[1 + E_1]$ una matrice $_{3\cdot 3}$ avente la diagonale principale formata dagli elementi $1 + E_1$, $1 + E_2$, $1 + E_3$ e tutti gli altri elementi nulli. La (63) viene a decomporre l'effetto della deformazione in un moto rigido ed una dilatazione con assi principali fissi. Se le direzioni principali sono state calcolate partendo da assi qualunque, si determina $[D_{x\bar{x}}]$ con la solita trasformazione e quindi dalla (63), essendo note le dilatazioni principali si può calcolare il moto rigido che la terna principale subisce.

A illustrare l'uso delle espressioni indicate, si considera una particolare applicazione ponendo

$$\vec{r}' = \vec{i}_x x\sqrt{1 - c^2} + \vec{i}_y(y + cx) + \vec{i}_z\int^z f(z)dz \tag{64}$$

dove c è un numero qualunque compreso fra 0 e 1, f una generica funzione di z. Quindi è

$$u_x = x\sqrt{1 - c^2} - x,\; u_y = cx,\; u_z = \int^z f dz - z$$

e si trova

$$[D_{xx}] = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - c^2} & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \qquad [\Gamma_{xx}] = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{bmatrix}$$

In base alle definizioni si ha

$$E_x = E_y = E_{xz} = E_{yz} = 0,\ \sin E_{xy} = c,\ 1 + E_z = f\,. \tag{65}$$

Si scrivono, sulla traccia delle (23)-(25) le equazioni per la determinazione delle direzioni e delle dilatazioni principali:

$$\bar{x}_x(1 - \Gamma_p) + \bar{x}_y c = \bar{x}_x c + (1 - \Gamma_p)\bar{x}_y = (f^2 - \Gamma_p)\bar{x}_z = 0 \,. \tag{66}$$

La condizione di compatibilità delle tre equazioni fornisce tre radici:

$$\Gamma_1 = 1 + c, \Gamma_2 = 1 - c, \Gamma_3 = f^2 \,.$$

Quindi è

$$[1 + E_1] = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + c} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - c} & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

mentre dalle stesse (66) si ottengono le direzioni principali $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$:

$$[x_x] = \begin{bmatrix} \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} & 0 \\ -\sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

e quindi $[D_{\bar{x}\bar{x}}]$.

Fig. 6.

In base alla (63) si trova che $[X_{\bar{x}}]$ si può scrivere nella forma

$$[X_{\bar{x}}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

essendo φ l'angolo definito da $\sin 2\varphi = c$.

La deformazione considerata è rappresentata nella fig. 6. Essa corrisponde ad una deformazione nel piano xy per la quale le fibre parallele a questi assi mantengono inalterate le loro lunghezze mentre l'angolo compreso subisce la diminuzione $E_{xy} = \text{arsin}\, c$. Dall'analisi risulta che le direzioni principali formano, come nel caso di deformazioni piccolissime, angoli di 45° con gli assi. Nella deformazione l'una subisce l'allungamento $\sqrt{1 + c} - 1$ mentre l'altra presenta l'accorciamento $1 - \sqrt{1 - c}$. Le due direzioni girano di un angolo $\varphi = E_{xy}/2$. Queste conclusioni si possono ritrovare direttamente con semplici considerazioni geometriche, dall'esame della fig. 6, dove P e Q sono punti delle direzioni principali che nella deformazione vanno in P' e Q'.

I. 6. - Deformazione con spostamenti piccolissimi. — Nel paragrafo precedente non si è posta alcuna restrizione circa la grandezza degli spostamenti. Indichiamo ora la definizione

$$[\Gamma_{xx}] = [1]_3 + 2[\varepsilon_{xx}] \tag{67}$$

e ci proponiamo di calcolare gli elementi della matrice $[\varepsilon_{xx}]$ sotto l'ipotesi che gli spostamenti e le loro derivate siano così piccoli che sia lecito trascurarne i quadrati a fronte dei termini lineari.

Con questa semplificazione si può scrivere la (61)

$$[\Gamma_{xx}] \approx [1]_3 + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]^*$$

e quindi

$$2[\varepsilon_{xx}] = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]^* . \tag{68}$$

Si trova così che ε_{xx} rappresenta la dilatazione $\partial u_x/\partial x$, ordinariamente indicata con ε_x; la quantità $2\varepsilon_{xy}$ vale $\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x$ ossia ε_{xy} equivale a $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, indicandosi con γ, nella notazione usuale, gli scorrimenti. Analogamente restano definiti gli altri elementi della *matrice* $[\varepsilon_{xx}]$ *delle piccole deformazioni*. Appare evidente dalla (68) che questa è una matrice simmetrica, che si trasforma ancora con legge analoga alla (20), nel cambiamento di coordinate. Si trovano, in perfetta analogia con quanto s'è visto nel § I. 3, i valori principali ε_1, ε_2, ε_3, le relative direzioni e gli invarianti I_ϵ, J_ϵ e K_ϵ. Il primo di questi

$$I_\epsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{69}$$

rappresenta il coefficiente di dilatazione di volume. Per il secondo, una definizione conforme alla (28) si può dare scrivendo

$$2J_\epsilon + I_\epsilon^2 = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon} \tag{70}$$

essendo $\vec{\varepsilon}$ un vettore che rappresenta la deformazione nello spazio delle nove coordinate ε_{xx}, ε_{xy}, ..., ε_{zz}. Il terzo invariante è

$$K_\epsilon = \mathrm{Det}\,[\varepsilon_{xx}] \tag{71}$$

Supponiamo che allo stato attuale, in cui il punto P ha la coordinata vettoriale $\vec{r}$, si pervenga da uno stato iniziale in cui il medesimo punto materiale P ha la coordinata $\vec{r}_0 = \vec{i}_x x_0 + \vec{i}_y y_0 + \vec{i}_z z_0$. Circa la grandezza dello spostamento $\vec{r} - \vec{r}_0$ non si fa alcuna ipotesi. Dallo stato *attuale* si passi allo stato *prossimo* mediante lo spostamento $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$ piccolissimo, per il quale quindi la deformazione si calcola mediante la (68). Se le componenti degli spostamenti $\vec{u}$ e $\vec{r} - \vec{r}_0$ sono espresse in funzione delle coordinate iniziali x_0, y_0, z_0, si può calcolare la deformazione sostituendo nella (68) l'espressione

$$\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] = \left[\frac{\partial x_0}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial u_x}{\partial x_0}\right] \tag{72}$$

che si ottiene in base alle note formule di derivazione. Per il calcolo delle derivate $\partial x_0/\partial x$ non è necessario conoscere le funzioni x_0, y_0, z_0 (x, y, z) ma si può risolvere il sistema delle nove equazioni scalari contenute nell'identità.

$$\left[\frac{\partial x_0}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial x}{\partial x_0}\right] = [1]_3$$

I. 7. - Le deformazioni finite. — Quando gli spostamenti da esaminare siano di entità tale da rendere lecita la consueta linearizzazione, lo stato di deformazione è espresso semplicemente mediante la (68). Peraltro sovente nello studio delle deformazioni plastiche sono da prendere in esame situazioni per le quali le variazioni di lunghezza delle fibre sono dell'ordine di grandezza delle lunghezze stesse: le quantità E_x, E_{xy} delle (51), (52) e simili sono dell'ordine di 1/10 invece che dell'ordine di 1/1000, come per le deformazioni elastiche nelle usuali strutture. La linearizzazione è quindi talora da abbandonare. È vero che le espressioni di $[\Gamma_{xx}]$ stabiliscono fra deformazioni e spostamenti una relazione che non è affetta da alcuna semplificazione e perciò vale in ogni caso. Però, a prescindere dalle difficoltà analitiche che l'uso di quella relazione comporta (non tanto nella deduzione delle deformazioni dagli spostamenti, come richiede l'esame di un esperimento, ma nella determinazione degli spostamenti o nella scrittura delle condizioni di congruenza, per la soluzione di un problema applicativo) le espressioni delle componenti Γ non sono in generale sufficienti. Solo in pochi particolari casi le proprietà del materiale possono essere formulate in funzione della deformazione globale. In generale la confi-

gurazione finale di sforzi e deformazioni dipende dall'intero processo di deformazione. Infatti le teorie di plasticità più plausibili mettono in relazione lo stato di tensione e la sua variazione con lo stato di deformazione e la sua variazione, quando non formulano relazioni più compplesse. Ne scaturisce la necessità di usare relazioni del tipo delle (68) e (72), che rappresentano gli effetti di uno spostamento elementare. Di fatti, solo per semplicità di notazione in quelle relazioni le quantità u, ε non sono indicate con una notazione appropriata, come sarebbe Δu, $\Delta\varepsilon$ nella misura di un incremento di deformazione sperimentalmente realizzato o con la scrittura du, $d\varepsilon$ in un processo analitico, in vista di una integrazione da condurre successivamente. Nell'ambito delle relazioni incrementali (68)-(72) vige il prezioso principio di sovrapposizione degli effetti, che permette, ad esempio, di esprimere la variazione di volume sommando semplicemente l'effetto elastico a quello plastico.

Per quanto riguarda l'integrazione sopra menzionata delle deformazioni elementari nei casi in cui non sia lecito supporre $[\partial x_o/\partial x] = [1]_3$, occorre precisare alcuni concetti. Le componenti di deformazione date dalla (68) con l'aiuto della (72) forniscono dilatazioni e scorrimenti delle fibre *attualmente* disposte secondo gli assi. Una integrazione di queste quantità ha significato fisico solo in casi particolari. In generale, poichè le deformazioni sono inerenti alle fibre deformate e non avrebbe senso aggiungere alla dilatazione di una fibra la dilatazione di quella che in un istante successivo ne prende il posto, hanno significato fisico solo le integrazioni in termini degli invarianti I_ϵ, J_ϵ, K_ϵ, oppure quelle relative al caso in cui gli assi principali abbiano per orientazione costantemente quella dei versori $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$. In questo caso è

$$(73) \qquad [\partial x/\partial x_o] = [1 + E_1]$$

con la notazione della (63). Quindi la matrice reciproca $[\partial x_o/\partial x]$ ha la sua diagonale formata dai rapporti $1/(1 + E_1)$, $1/(1 + E_2)$, $1/(1 + E_3)$ e gli altri elementi nulli. Anche la matrice $[\partial u_x/\partial x_o]$ ha solo la diagonale principale formata dagli elementi non nulli che possiamo indicare con ΔE_1, ΔE_2, ΔE_3 essendo Δ le variazioni prodotte dagli spostamenti $\vec{u}$. Quindi la (68) si riduce alle espressioni

$$(74) \qquad \varepsilon_1 = \Delta E_1/(1 + E_1), \varepsilon_2 = \Delta E_2/(1 + E_2), \varepsilon_3 = \Delta E_3/(1 + E_3) .$$

Indichiamo con $\bar{\varepsilon}_i (i = 1, 2, 3)$ la somma degli incrementi ε_i per i vari stadi di deformazione che dalla configurazione iniziale conducono alla attuale; con incrementi infinitesimi, integrando le (74) si ha

$$(75) \qquad \bar{\varepsilon}_i = \ln (1 + E_i)$$

Le quantità ε_i sono dette *deformazioni naturali* (natural strains). Esse danno una rappresentazione della reale situazione del corpo deformato che appare fisicamente più aderente di quella espressa dalle E_i. Basti notare il fatto che, mentre l'espressione $\Gamma_i = (1 + E_i)^2$ non rivela in alcun modo l'impossibilità per E_i di accostarsi al valore -1, la (75) denuncia l'assurdo con valori divergenti verso $-\infty$. Inoltre è stato sperimentalmente constatato che il diagramma $\sigma(\varepsilon)$ relativo alla prova di trazione e quello relativo a quella di compressione risultano, per i materiali presi in esame, simmetrici rispetto all'origine quando anche per le tensioni si usi un riferimento naturale (dividendo la forza per l'area attuale del provino deformato, con che si ottengono le *tensioni vere*, true stresses). Si osservi ancora che è

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \ln (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3) = \ln (V/V_0) \tag{76}$$

essendo V_o e V i volumi della stessa particella prima e dopo la deformazione.

Per generalizzare queste considerazioni al caso in cui gli assi principali di deformazione ruotano nel corpo, è adottato da vari Autori il *tensore logaritmico*, definito dando i valori principali mediante le (75) e assumendo per direzioni principali quelle di $[\Gamma_{xx}]$. L'uso di questo tensore nelle applicazioni presenterebbe delle difficoltà gravissime.

Le deformazioni definite dalla (68) in collegamento con la (72) sono, come s'è detto, riferite alla configurazione attuale del corpo deformato nel passaggio alla configurazione prossima. Così, se δl è la variazione di lunghezza che in questo passaggio subisce una fibra di lunghezza attuale l, la relativa dilatazione è $\varepsilon = \delta l/l$. La stessa deformazione elementare si potrebbe rappresentare mediante il tensore che indichiamo con $[\tilde{\varepsilon}_{xx}]$ la cui definizione si può ottenere dalla [68] sostituendovi $[\partial u_x/\partial x]$ con il prodotto $[\partial u_x/\partial x_o]\,[\partial x/\partial x_o]^*$. Le componenti di questo sono sempre integrabili e danno come risultato finale ([13]) le Γ_{xx}. In questo riferimento la dilatazione della fibra particolare è misurata da $\tilde{\varepsilon} = l\delta l/l_o^2 = \frac{1}{2}\delta(l^2/l_o^2)$.

I. 8. - Il corpo elastico isotropo. — Per il corpo isotropo dotato di elasticità lineare le relazioni fra deformazioni e tensioni, nella notazione

([13]) Infatti, scrivendo dx, dy, dz, $d\tilde{\varepsilon}$ per u_x, u_y, u_z, $\tilde{\varepsilon}$ e sviluppando l'espressione indicata si trova ad esempio

$$2d\tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial dx}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial dy}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial dz}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{\partial dx}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial dy}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial dz}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} =$$
$$= d\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0}\right) = d\Gamma_{xy}\,.$$

adottata, si scrivono

$$[\varepsilon_{xx}] = \frac{1}{2G}[s_{xx}] + \frac{3\sigma}{K}[1]_3 \tag{77}$$

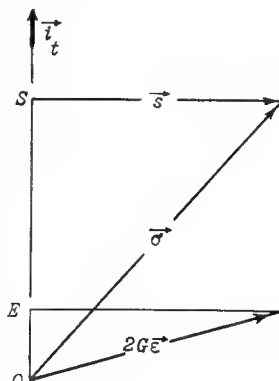
G è il modulo elastico tangenziale, legato al modulo normale E ed al coefficiente di contrazione trasversale ν dalla relazione $2\,G(1+\nu) = E$; K è il coefficiente di compressibilità $= E/3(1 - - 2\nu)$. Tenuto conto della simmetria delle matrici che vi figurano, la (77) è equivalente a sei equazioni scalari: per gli elementi delle diagonali principali si hanno le relazioni, moltiplicando per E,

$$E\varepsilon_{xx} = (1+\nu)s_{xx} + (1-2\nu)\bar{\sigma} = \sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z$$

e simili; per gli elementi fuori delle diagonali si ha

$$\varepsilon_{xy} = s_{xy}/2G, \ldots, \varepsilon_{zx} = s_{zx}/2G\,.$$

Fig. 7.

Della [77] si può dare una interpretazione geometrica. Nello spazio del vettore $\vec{\sigma}$ si riporti il vettore $2G\vec{\varepsilon}$. Si consideri il piano che contiene $\vec{\sigma}$ e il vettore $\vec{i}_t$ (§ I. 4, *c*) (fig. 7); la proiezione OS su $\vec{i}_t$ di $\vec{\sigma}$ vale $\sqrt{3}\,\bar{\sigma}$, il componente normale è $\vec{s}$. Il vettore $2G\vec{\varepsilon}$ giace nello stesso piano, ha lo stesso componente $\vec{s}$ normale a $\vec{i}_t$ mentre la sua proiezione OE su $\vec{i}_t$ è ridotta nel rapporto $(1-2\nu)/(1+\nu)$ rispetto a quella di $\vec{\sigma}$.

I. 9. - Le proprietà di isotropia. Fare rotare una configurazione di sforzi nel corpo rispetto agli assi x, y, z ancorati ad esso, ha lo stesso effetto sulle componenti di tensione che dare una rotazione opposta al sistema di riferimento lasciando invariati gli sforzi. Così possiamo dire che si ha isotropia nei riguardi di una determinata relazione tra tensioni e deformazioni quando le equazioni che legano le loro componenti sussistono invariate nella forma e nei valori dei coefficienti pur modificandosi la terna di riferimento. Ci riferiamo all'esempio concreto dell'equazione (77): se premoltiplichiamo ambo i membri per $[\bar{x}_x]$ e li posmoltiplichiamo per $[\bar{x}_x]^*$, per le proprietà analoghe alla (20) di cui godono le matrici $[\varepsilon_{xx}]$, $[s_{xx}]$ e $[1]_3$ per l'invarianza di σ si ottiene l'analoga equazione nei riferimenti $\bar{x}$, y, z. Se al posto del fattore scalare $1/2G$ figurasse una matrice la proprietà non sussiterebbe; per scrivere l'equazione nelle nuove coordinate si dovrebbe trasformare quella matrice secondo la stessa (20); cioè nelle nuove coordinate i coefficienti di elasticità assumerebbero valori diversi, come avviene nei cristalli. Se invece, a secondo membro della (77) figurasse l'addendo $k[s_{xx}]\,[s_{xx}]$, che scriviamo $k[s_{xx}]^2$, osservando che è

$$[s_{\bar{x}\bar{x}}]^2 = [\bar{x}_x]\,[s_{xx}]\,[\bar{x}_x]^*\,[\bar{x}_x]\,[s_{xx}]\,[\bar{x}_x]^* = [\bar{x}_x]\,[s_{xx}]^2\,[\bar{x}_x]^*$$

con la medesima operazione vi verrebbe a trasformare anche il nuovo addendo [14]. Le medesime conclusioni valgono per qualunque potenza di $[s_{xx}]$. Dunque l'isotropia sussiste anche per un'equazione contenente una somma di potenze delle stesse matrici, moltiplicate per fattori scalari; questi fattori possono essere anche funzioni degli invarianti di questi o di altri tensori. Si noti che, per quanto s'è osservato a proposito della (43), anche l'espressione $\vec{\sigma}.\ \vec{\varepsilon}$ costituisce un invariante; i coefficienti possono dunque dipendere anche da questa quantità senza che cessi la proprietà di isotropia.

L'interpretazione geometrica nello spazio a nove dimensioni del vettore $\vec{\sigma}$ dà maggiore evidenza alle proprietà anzidette. Lo spazio a tre dimensioni delle tensioni principali si può considerare come un sottospazio del primo, definito dalla terna di versori $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{yy}$, $\vec{i}_{zz}$. In esso sta il vettore $\vec{i}_t$ della trisettrice. Il vettore $\vec{\sigma}_p$, di componenti σ_1, σ_2, σ_3 corrispondente ad un generico stato di tensione $\vec{\sigma}$ si può pensare come ottenuto da $\vec{\sigma}$ con la particolare «rotazione» con cui, annullando le componenti σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}, si entra nel sottospazio. Se la matrice $[\varepsilon_{xx}]$ fornisce le medesime direzioni principali, la stessa «rotazione» viene a portare $\vec{\sigma}$ e $\vec{\varepsilon}$ nello spazio delle tensioni principali, se si stabilisce di riportare le componenti omologhe sugli stessi assi. Quindi le relazioni fra un vettore e l'altro possono essere studiate nelle stesse coordinate. Qualora entrasse in gioco un altro vettore, poniamo $d\vec{\varepsilon}$, con direzioni principali in generale diverse dai primi due, la rappresentazione tridimensionale non sarebbe più completa, non essendo possibile riportare con la stessa «rotazione» nello spazio delle tensioni principali i tre vettori. Pur esistendo dunque una isotropia del materiale per la «rotazione» simultanea dei tre vettori, si riscontrerà in generale anisotropia ove si effettui la «rotazione» su due soltanto.

Capitolo II.

LE TEORIE INCREMENTALI

II. o. - INTRODUZIONE. — Le ipotesi tendenti a schematizzare la legge di deformazione di un dato materiale in condizioni generiche di carico sono fondamentalmente suggerite dalle prove di sollecitazione semplice. Queste, a prima vista, portano ad affermare l'esistenza, sotto determinate condizioni di una corrispondenza fra sforzi e deformazioni, nei loro valori

[14] Il tensore $[s_{xx}]^2$ è detto *quadrato del deviatore di tensione*. Esso, come qualunque potenza del tensore stesso, ha le medesime direzioni principali; infatti se gli elementi di due matrici situati fuori della diagonale principale sono nulli, lo sono anche nel prodotto.

attuali; su questo concetto, generalizzato a stati di tensione e deformazione triassiali, si sono orientate le prime teorie di plasticità. Di tali teorie, che chiamiamo *olonome*, si darà un cenno più avanti; alla prova dei fatti risultò che le loro conclusioni sono accettabili solo in condizioni del tutto particolari. In effetti anche nelle sollecitazioni semplici, se il corpo viene sottoposto a sforzi sufficientemente elevati, che non siano applicati in continuo aumento ma con fasi successive di carico e scarico, non esiste più una corrispondenza che permetta di determinare sempre la tensione quando sia data la deformazione, o viceversa. Tanto più complessa è da ritenere la situazione per condizioni di carico triassiale. È presumibile invece che possa stabilirsi una corrispondenza fra le *variazioni elementari* di sforzi e deformazioni. Appare cioè possibile stabilire relazioni omogenee fra gli incrementi di tensione e deformazione, dipendenti dallo stato sul quale gli incrementi sono applicati ed eventualmente dal processo antecedente di deformazione. È su questo concetto che sono orientate le *teorie incrementali*; alcune di queste saranno trattate in questo capitolo.

Con la formulazione differenziale delle relazioni fondamentali, la deformazione viene seguita nel suo sviluppo, con notevole vantaggio di chiarezza nelle postulazioni, specialmente nel caso di deformazioni finite. Se la configurazione del corpo sulla quale si produce l'incremento di deformazione è abbastanza vicina ad una configurazione base, riferita alle coordinate x, y, z, l'incremento di deformazione $d\vec{\varepsilon}$ potrà esprimersi dandone le componenti in base alla (68) nella quale si sostituiscano le componenti di $\vec{u}$ con quelle di $d\vec{u}$; quando occorra conoscere la deformazione globale, si potrà effettuare l'integrazione $\vec{\varepsilon} = \int d\vec{\varepsilon}$. Se invece i punti del corpo sono riferiti alle coordinate x_0, y_0, z_0 per una configurazione base, lontana dalla attuale, si dovrà far uso delle (72). Le tensioni sono da calcolare in base alle dimensioni attuali, e così la deformazione $d\vec{\varepsilon}$ si può esprimere mediante la (68), ma dovendo seguire il moto della particella, si introducono le coordinate iniziali in base alle (72). Nella eventuale integrazione per il calcolo delle deformazioni globali si terranno presenti le limitazioni espresse nel § I. 7.

II. 1. - La deformazione plastica. — Una particella del corpo in esame, partendo da una data configurazione di sforzi e deformazioni, subisca un incremento $d\vec{\sigma}$ nel suo stato di tensione; di conseguenza la deformazione subirà una variazione $d\vec{\varepsilon}$. Si dice *deformazione elastica* $d\vec{\varepsilon}^e$ la variazione di forma che $d\vec{\sigma}$ produrrebbe se il corpo obbedisse alle leggi d'elasticità. Si dice *deformazione plastica* la differenza $d\vec{\varepsilon}^p = d\vec{\varepsilon} - d\vec{\varepsilon}^e$.

Per il corpo elastico isotropo, l'incremento $d\vec{\varepsilon}^e$ si calcola con le espressioni del § I. 8 che, nella notazione vettoriale si scrivono

$$d\vec{\varepsilon}^e = \frac{d\vec{s}}{2G} + \frac{3d\bar{\sigma}}{K}\,\vec{i}_t \tag{80}$$

$d\bar{s}$ è l'incremento del deviatore di tensione, le cui componenti secondo le (34) sono date da

$$ds_{xx} = \frac{2}{3}\,d\sigma_x - \frac{1}{3}\,d\sigma_y - \frac{1}{3}\,d\sigma_z$$

$$ds_{xy} = d\tau_{xy}, \ldots$$

mentre $d\bar{\sigma}$ è l'incremento della tensione media

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 .$$

Talvolta si dovrà calcolare la deformazione elastica in presenza di deformazioni plastiche non piccolissime. In mancanza di dati più precisi, si dovrà postulare che lo stato di deformazione attuale non cancelli l'isotropia del materiale nei riguardi della (80); nello stesso ordine di idee, si ammetterà che le costanti elastiche mantengano i loro valori inalterati quando tensioni e deformazioni siano misurate con riferimento alle dimensioni attuali del corpo.

Una più grave fonte di incertezza sta nell'evoluzione della deformazione nel tempo. Nella plasticità si ammette che il materiale si trovi in condizioni di temperatura e sollecitazione tali che nella legge sforzi-deformazioni non intervenga il tempo; si restringe così il campo di indagine, riserbando ad altra branca della Scienza dei Materiali (la Viscoplasticità) lo studio di quei fenomeni per i quali il tempo è un parametro dal quale non si può prescindere. Questa distinzione, criticata da vari Autori, è però certamente opportuna o, per lo meno, desiderabile, al fine di frazionare le difficoltà. Peraltro, specialmente nell'interpretazione dei risultati sperimentali, è necessario un esame accurato della reale situazione, per scartare quei casi nei quali non sia possibile isolare la deformazione plastica. Si rappresenti (fig. 8) la legge di variazione in funzione del tempo, di una componente di deformazione in seguito ad un incremento $\Delta\bar{\sigma}$ di tensione. Contando i tempi dall'istante in cui ha inizio l'applicazione di queste tensioni, si ha nel primo tratto

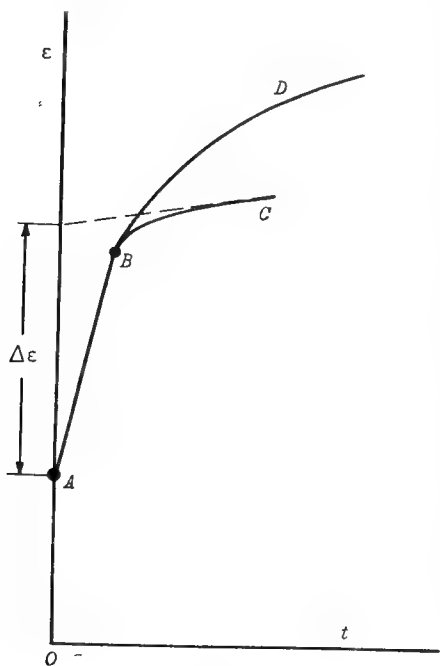



Fig. 8.

OB la fase di carico. Pur arrestandosi la tensione al valore $\vec{\sigma}_0 + \Delta\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}_0$ essendo la sollecitazione preesistente, la deformazione continua a crescere. Se la curva mostra di accostarsi rapidamente ad un asintoto orizzontale, ciò è segno che mediante il presumibile valore asintotico, la deformazione plastica può definirsi senza interferenza del tempo. Al contrario, se la curva (linea BD) continua a crescere con pendenza lentamente variabile, per il materiale in esame non può parlarsi di plasticità isolatamente dalla viscosità. Ancora però, se la pendenza della curva tende a stabilizzarsi, come avviene per la linea BC, si può assumere a rappresentare la deformazione plastica, $\Delta\varepsilon$, l'intercetto sull'asse verticale della tangente alla curva nel tratto di minor curvatura.

Da una prova condotta sotto carico continuamente variabile resta più difficile individuare una deformazione plastica. Si potrà affermare che essa è definibile con sufficiente precisione, quando le prove a velocità sempre più ridotta accennino a dare risultati concordanti per la relazione fra sforzi e deformazioni.

Per quanto s'è detto, restano esclusi dalle presenti considerazioni quei materiali, come i conglomerati cementizi o i metalli ad alta temperatura, per i quali non si presenta quella stabilizzazione sotto carico che è necessaria per definire la deformazione plastica.

II. 2. - L'ESPERIENZA BASILARE. — La prova di sollecitazione uniassiale, realizzata sottoponendo a trazione o compressione un'asta cilindrica e quella di sollecitazione tangenziale, realizzata sottoponendo a torsione un'asta tubulare, forniscono il primo fondamento per la teoria di plasticità; punto obligato in ogni formulazione di tale teoria è la concordanza con i risultati di quelle esperienze. I grafici $\sigma(\varepsilon)$ o $\tau(\gamma)$ dedotti da queste [15], per un materiale metallico, fra quelli più comunemente impiegati nelle costruzioni rivelano certe proprietà che, in via di schematizzazione possono enunciarsi come segue:

I) per l'origine O, che corrisponde allo stato iniziale del corpo scarico, passa un tratto rettilineo OA (fig. 9);

II) per deformazioni positive crescenti oltre il punto A, la tensione corrispondente aumenta di continuo, per un tratto più o meno ampio, di pendenza, almeno dapprincipio, decrescente; lo stesso si verifica, simmetricamente o quasi, dall'altra parte dell'origine;

---

[15] Per deformazioni non piccolissime, il diagramma delle tensioni vere in funzione delle deformazioni naturali (§ I. 7) rivela, a quanto pare, i reali aspetti del fenomeno meglio che quello tracciato in base ai valori convenzionali, riferiti alle dimensioni iniziali del provino.

III) se, raggiunto un punto C del tratto curvo, si inverte il senso di variazione della deformazione, si entra in un tratto rettilineo di pendenza uguale a quella del tratto BA;

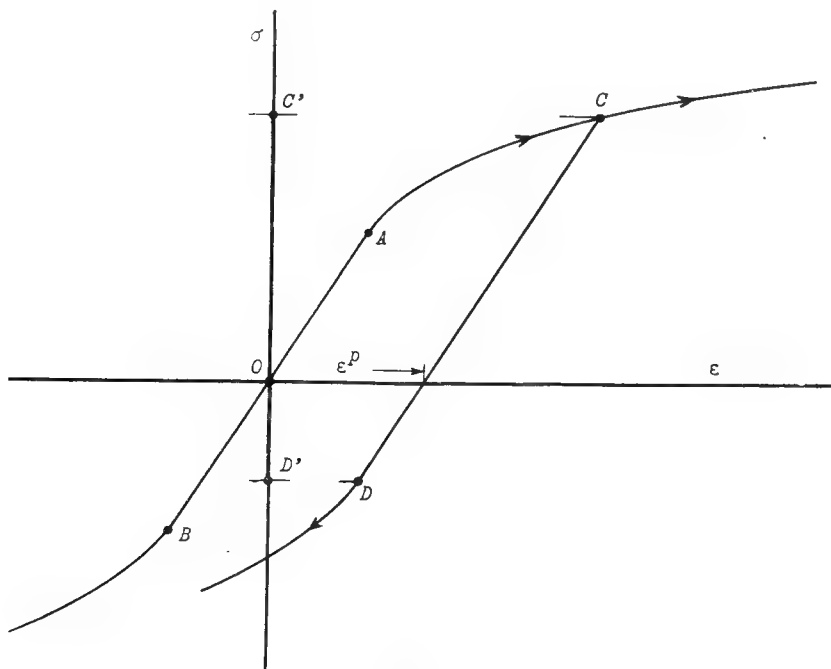



Fig. 9.

IV) proseguendo sul ramo che scende da C con deformazioni decrescenti, si riscontra che da un certo punto D ha inizio un tratto curvo, di andamento somigliante a quello dell'arco che in B si allaccia al primo segmento diritto;

V) lungo i segmenti AB, CD, come in qualunque tratto rettilineo che può iniziarsi da un ramo curvo per inversione del senso di deformazione, il fenomeno ha carattere di reversibilità; ossia, finchè la deformazione varia nell'intervallo fra le ascisse estreme del tratto, sussiste la medesima legge di dipendenza lineare fra tensione e deformazione, anche se le variazioni non sono monotone, cioè, presentano inversioni. Il comportamento del materiale è detto *elastico* in questi tratti: *limiti elastici* sono gli estremi dei tratti diritti.

Naturalmente le proprietà enunciate rappresentano una schematizzazione dei fatti reali. In effetti, le transizioni dei tratti rettilinei a quelli curvi e viceversa non sono nette; la stessa qualifica di rettilinei data a certi tratti della caratteristica non ha rigore matematico; la reversibilità delle leggi di deformazione entro i limiti elastici deve intendersi come appros-

simata. Appunto, il valore di idealizzazione delle proposizioni enunciate, rivelato dal confronto con l'esperienza semplice, dà una misura dell'ordine di precisione massimo che può pretendersi da una teoria costruita su queste basi.

È noto che la proprietà (II) per certi materiali ferrosi si presenta notevolmente modificata: la caratteristica ha ordinate pressochè costanti per un ampio tratto. Questo fatto ha suggerito la schematizzazione della caratteristica nella forma di spezzata, con tratti elastici di pendenza costante e tratti di deformazione plastica crescente sotto tensione costante. È detto corpo *idealmente plastico* quello che segua questa schematizzazione. L'uso dell'idealizzazione è stato tanto diffuso, specialmente nelle prime indagini, che si dovette introdurre un termine apposito per specificare il comportamento normale, del materiale che presenti tensioni crescenti al crescere della deformazione anche fuori degli intervalli elastici. Useremo il termine di *incrudimento*, sebbene impreciso, a indicare detto fenomeno ([16]). Diremo *incrudente* un materiale il quale, oltre i limiti elastici, presenta variazioni dello stesso segno per tensioni e deformazioni. Il tratto di incrudimento è troncato dalle situazioni di collasso, per instabilità o rottura.

Nella generalizzazione delle proprietà menzionate sono di grande aiuto all'intuizione le rappresentazioni geometriche. Si rappresenti un generico stato di tensione con il vettore $\vec{\sigma}$ nello spazio delle tensioni σ_{xx}. In una successione continua di stati di tensione, l'estremo del vettore traccia una curva che diciamo *linea di carico*. Se tutte le tensioni crescono mantenendo costanti i loro rapporti, il vettore mantiene la sua direzione invariata, ossia varia secondo la legge

$$\vec{\sigma} = c\vec{\sigma}^{0}$$

essendo $\vec{\sigma}^{0}$ un vettore costante e c un fattore che cresce partendo da zero. Diciamo *carico proporzionale* o *radiale* la legge di sollecitazione realizzata in questo caso.

Prendiamo in esame anzitutto la generalizzazione, nello spazio dei vettori $\vec{\sigma}$, delle proprietà (I), (III) e (V) che insieme conducono alla affermazione seguente: qualunque sia la posizione attuale dell'estremo del vettore $\vec{\sigma}$, esiste sempre una regione dove quel punto può comunque spostarsi senza modificare la deformazione plastica, producendo, cioè, solo variazioni elastiche nella deformazione. Il contorno di questa *regione elastica* costituisce il *luogo dei limiti elastici* o *soglia di plasticità*; per brevità diremo *luogo p* questo contorno. L'estremo del vettore detto *punto di carico*, nella fase in cui varia la deformazione plastica sposta il luogo *p* senza mai uscirne. Nel caso unidimensionale della fig. 9 il segmento del-

([16]) In inglese *hardening*, in russo *upročnenie*, in tedesco *Verfestigung*.

l'asse delle σ che corrisponde al tratto rettilineo CD rappresenta la regione elastica $C'D'$ che si crea quando il punto di carico giunge in C' per deformazioni crescenti; il *luogo p iniziale* corrisponde al tratto elastico AB della caratteristica. Se sono diverse da zero solo due tensioni, poniamo σ_{xx} e σ_{yy}, nel piano dei versori $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{yy}$ ci sarà una curva luogo dei limiti elastici. Se solo tre componenti di tensione si mantengono diverse da zero, il luogo p sarà rappresentabile come una superficie nel relativo spazio tridimensionale. In ogni caso, il luogo p ha una dimensione in meno rispetto allo spazio in cui è situato.

II. 3. - L'EQUAZIONE DEL LUOGO DEI LIMITI ELASTICI. — In linea generale si deve presumere che l'equazione nelle coordinate σ_{xx}, ..., σ_{zz} la quale rappresenta il luogo dei limiti elastici debba dipendere dall'intera storia della deformazione. Nell'ipotesi che il processo di deformazione sia completamente definito (nel senso che, per un assegnato incremento di tensione $d\check{\sigma}$ a partire da una data configurazione di sforzi e deformazioni, sia univocamente definita la deformazione $d\check{\varepsilon}$) allora il cammino di carico basta a caratterizzare l'intero processo; quindi l'equazione del luogo p sarà individuata dal cammino di carico, dall'origine alla posizione attuale $\check{\sigma}_P$. Si noti che questa affermazione non è scevra da supposizioni che richiedono conferma sperimentale: se si vuole dare il valore di legge caratteristica del materiale, qui supposto omogeneo, alla equazione ricercata, si d[illegible] provare che la posizione reciproca delle particelle, in particolare la loro posizione rispetto al contorno del corpo, non influisca sulla legge stessa. È naturale però che, in questa indagine come s'è detto in generale, si parta dalle posizioni più semplici che si abbandoneranno solo quando l'esperienza ne smentisca le conclusioni.

Una successione di ipotesi, via via più restrittive, circa l'equazione (scalare) del luogo p è qui presentata

$$f(\check{\sigma},\ \check{\sigma}_P,\ \check{\varepsilon}_P) = 0 \tag{81}$$

$$f(\check{\sigma}) = \text{costante} \tag{82}$$

$$f(I_\sigma,\ J_s,\ K_s) = \text{costante} \tag{83}$$

$$f(J_s,\ K_s) = \text{costante} \tag{84}$$

$$J_s f(\eta) = \text{costante} \tag{85}$$

La (81) fa dipendere l'equazione nelle coordinate del punto variabile, dallo stato di tensione $\check{\sigma}_P$ e di deformazione $\check{\varepsilon}_P$ che si ha nel punto di carico. Si negherebbe con ciò l'influenza delle fasi anteriori del processo di carico. Se il materiale è inizialmente isotropo e se quel processo non ne toglie l'isotropia, nella (81) possono intervenire solo quantità che non dipendono

dall'orientazione della terna di riferimento nel corpo, cioè gli invarianti come J_s, K_s, $\vec{\sigma}_P$. $\vec{\varepsilon}_P$.

La posizione (82) viene a togliere ogni carattere peculiare al punto di carico, che interviene però ad individuare la costante $= f(\vec{\sigma}_P)$. La (82) ha perciò il valore della seguente affermazione: se Q è un punto del luogo p corrispondente al punto di carico P, per qualunque cammino si giunga a Q il corrispondente contorno passerà per P. Se il materiale è inizialmente isotropo, l'equazione del luogo dei limiti elastici non deve dipendere dall'orientazione del riferimento; quindi dall'espressione (82) si passa alla (83). Dunque, secondo queste ipotesi che possono dirsi *dell'incrudimento isotropo*, si avrà nello spazio delle tensioni principali una semplice famiglia di superfici ([17]), ognuna corrispondente ad un certo grado di incrudimento. Le proprietà di simmetria della superficie (83) sono state rilevate nel § I. 4, *d*.

Nell'ipotesi comunemente ammessa, che la tensione idrostatica non influisca nei fenomeni in esame, si scrive la (84), che riduce la superficie ad un cilindro. Inoltre si ammette ordinariamente che le varie superfici siano fra loro omotetiche; si giunge così alla formulazione (85). Con queste semplificazioni il tracciato del luogo dei limiti elastici si riconduce alla determinazione di una semplice funzione $f(\eta)$. La semplificazione estrema si ha nell'ipotesi di v. Mises, che pone identicamente $f = 1$. In questo caso le superfici in questione sono cilindri circolari coassiali.

II. 4. - L'INCREMENTO DI DEFORMAZIONE. — Lungo qualsiasi cammino che si percorra entro il contorno elastoplastico, il materiale si comporta elasticamente; cioè le variazioni nella deformazione si riducono ai valori dati dalla (80), restando sempre $d\vec{\varepsilon}^p = 0$. Raggiunto il luogo p in un punto qualsiasi, ogni incremento $d\vec{\sigma}$ volto verso l'interno o tangente al contorno stesso ([18]) dà solo deformazioni elastiche. Esprimiamo questa proprietà nella forma

$$d\vec{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{per} \quad d\sigma_n \leq 0 \tag{86}$$

essendo

$$d\sigma_n = \frac{\vec{n}}{n} \cdot d\vec{\sigma} \tag{87}$$

([17]) Per ogni punto di quella superficie, nello spazio di $\vec{\sigma}$ si ha una triplice infinità di punti, relativi agli stati di tensione differenti solo nell'orientazione degli assi principali.

([18]) Escludiamo il caso del corpo idealmente plastico, per il quale nella prova di trazione la deformazione plastica si produce sotto tensione costante e quindi nella sollecitazione più generale la deformazione plastica procede mentre il punto di carico resta sullo stesso luogo.

e indicandosi con n il modulo del vettore normale al luogo p, volto verso l'esterno rispetto alla regione elastica, definito dalla relazione

$$\vec{n} = \vec{i}_{xx} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} + \ldots + \vec{i}_{zz} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} . \tag{88}$$

Se dal punto P generico del luogo stesso si dà un incremento $d\vec{\sigma}$ tale che $d\sigma_n$ risulti positivo, si produrrà un incremento di deformazione pla-

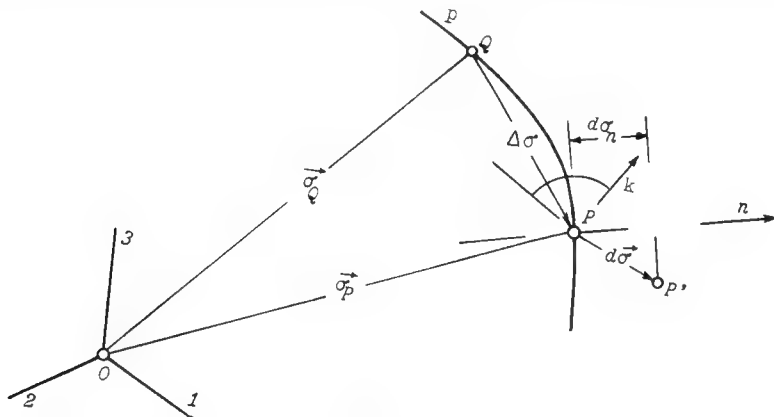



Fig. 10.

stica $d\vec{\varepsilon}^p$. La direzione di questo è parallela a $\vec{n}$. Ciò può dimostrarsi con un'argomentazione fondata su concetti fisici dovuta a Drucker (Rif. 50B, 51B), che esponiamo in forma abbrevviata.

Un ente A eserciti sulla particella le tensioni rappresentate dal punto Q generico del luogo p (fig. 10). Un ente B, distinto dal primo, applichi le tensioni rappresentate dal vettore $\Delta\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_P - \vec{\sigma}_Q$ che portano l'estremo di $\vec{\sigma}$ in P, ancora sullo stesso luogo p, attraverso un percorso qualsiasi entro la regione elastica; introduca poi l'incremento $d\vec{\sigma}$ e quindi tolga le tensioni applicate, riportando lo stato di tensione in Q. Il lavoro speso in questo ciclo dell'ente B, omettendo il termine elastico relativo al percorso QP restituito dal corpo nel percorso inverso e tralasciando il termine di secondo ordine negli incrementi, si riduce agli addendi $\Delta\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}$ e $- \Delta\sigma \cdot d\vec{\varepsilon}^e$ relativi ai tratti PP' e $P'P$. Drucker afferma che l'ente B non può ricavare energia dal suo ciclo; pertanto deve essere, in totale,

$$\Delta\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p \geqq 0 . \tag{89}$$

L'ineguaglianza deve valere qualunque sia la posizione di Q, che non influisce su $d\vec{\varepsilon}^p$. Supponiamo che questo vettore abbia direzione k differente da n; si potrebbe allora scegliere Q nel piano per k e n nel quadrante marcato in fig. 10 e risulterebbe violata la (89). Si conclude che le

direzioni k e n coincidono e, in più, che il luogo p deve essere convesso, ossia la proiezione su n di qualunque punto Q deve cadere dal lato negativo rispetto a P.

La conclusione raggiunta sulla direzione dell'incremento cercato si scrive

$$\frac{d\vec{\varepsilon}^p}{de_p} = \frac{\vec{n}}{n} \tag{90}$$

dove de_p è il modulo dell'incremento di deformazione plastica, incremento della variabile e_p che rappresenta il cammino percorso dall'estremo del vettore rappresentativo della deformazione plastica.

Si postuli ora la linearità nelle relazioni incrementali; ossia si ammetta la semplice sovrapposizione di effetti per gli incrementi di tensione che danno deformazione plastica. Scomponendo allora l'incremento $d\vec{\sigma}$ in un vettore parallelo a n, di modulo $d\sigma_n$, ed uno perpendicolare, poichè quest'ultimo non produce deformazione plastica per la (86), si conclude che l'incremento de_p, essendo dovuto solo al primo, deve essere proporzionale a $d\sigma_n$. Ossia il rapporto

$$d\sigma_n/de_p = (d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p)/(d\vec{\varepsilon}^p \cdot d\vec{\varepsilon}^p) \tag{91}$$

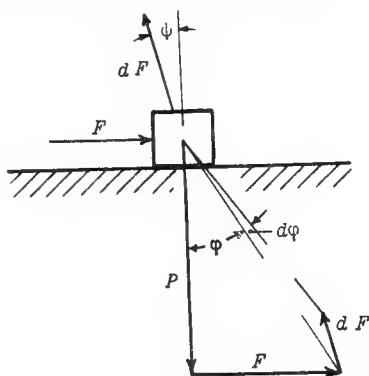
deve essere indipendente da $d\vec{\sigma}$.

Anche per il lavoro che l'ente B può compiere portando lo stato di tensione da P in P' e quindi di nuovo in P (trascurato nel caso precedente perchè di secondo ordine) sussiste l'ineguaglianza

$$d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p \geq 0. \tag{92}$$

Quindi il rapporto (91) non può essere negativo. Esso resta come elemento da precisare, perchè la deformazione plastica sia completamente definita.

Fig. 11.

Le proprietà espresse dalle ineguaglianze (89) e (92) vengono poste da Drucker a base della definizione della legge di incrudimento in condizioni di stabilità. Il fatto che l'ente B non possa ricavare lavoro dal suo ciclo non dipende da necessità termodinamiche connesse alla degradazione di energia. Infatti non è difficile pensare a schemi attuabili con accoppiamenti ad attrito per i quali la proprietà non sussista. Si consideri un corpo di peso P poggiato su un piano orizzontale (fig. 11) con attrito asciutto; il coefficiente d'attrito tangφ sia funzione crescente di x. L'ente A eserciti la spinta orizzontale F; l'equilibrio si stabilisce per la posizione per cui è

$F = P\text{tang}\varphi$. L'ente B applichi ora una forza dF diretta come mostra la figura, con $\psi < \varphi$. In conseguenza il corpo subirà uno spostamento elementare nella direzione x [19] e l'ente B ricaverà un certo lavoro, s'intende a spese dell'altro ente. Dunque la limitazione che si impone prescrivendo le condizioni (89) e (92) esclude la possibilità che, nel comportamento del corpo plastico si creino situazioni per le quali, applicando un'azione addizionale, si possa ricavare energia dalle tensioni interne o dagli agenti che le creano. Le proprietà enunciate da Drucker a definizione del corpo plastico incrudente precisano le condizioni di stabilità della deformazione plastica e la univocità della corrispondenza fra incrementi di sforzi e di deformazioni. Si osservi, in particolare, che la (92) non vale in un tratto della caratteristica trazioni-allungamenti che indichi una diminuzione di sforzo al crescere della deformazione e che corrisponde ad una situazione instabile.

Dalla (90) si trae una importante conclusione. Supponiamo che la tensione idrostatica non influisca nella f, anche se questa va posta nella forma più generale (81). Ciò significa che in questa espressione, in luogo delle componenti di tensione si possono adoperare quelle del deviatore $\vec{s}$. Quindi, in conseguenza delle definizioni (34) si ha

$$3(\partial f/\partial\sigma_{xx}) = 2(\partial f/\partial s_{xx}) - (\partial f/ds_{yy}) - (\partial f/\partial s_{zz}) \,. \tag{93}$$

Analoghe espressioni si hanno per le derivate rispetto a σ_{yy} e σ_{zz}. Da queste risulta

$$\vec{n} \cdot \vec{i}_t = 0 \tag{94}$$

e quindi per la (90)

$$d\varepsilon^p_{xx} + d\varepsilon^p_{yy} + d\varepsilon^p_{zz} = 0 \,. \tag{95}$$

Ammesso dunque che la tensione media non influisca sulla forma del luogo p, si giunge alla conclusione che la deformazione plastica non modifica il volume. In altre parole, la dilatazione di volume continua ad essere legata alla tensione media dalla medesima relazione di proporzionalità definita dal modulo K della (77), anche in presenza di deformazioni plastiche.

Si osserva infine che la conclusione espressa dalla (90) ha valore a condizione che il luogo p sia regolare, ossia sia unicamente definita la direzione normale. Se invece esso presenta in P una singolarità (punto angoloso nel piano, punto conico nello spazio tridimensionale) dalle medesime considerazioni si può dedurre che la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ deve essere contenuta in un certo settore. Su tale punto si ritorna nei capitoli seguenti.

---

[19] La nuova posizione d'equilibrio è quella che corrisponde all'angolo $\varphi + d\varphi$ determinato nella fig. 11.

II. 5. - LE TEORIE DELL'INCRUDIMENTO ISOTROPO. — Introduciamo l'ipotesi di isotropia scrivendo f nella forma (83). Quindi, se x, y, z sono le direzioni delle tensioni principali, ossia se $\sigma_{hk} = 0$ per $h \neq k$, risulta

$$\partial J_s / \partial \sigma_{hk} = 0, \; \partial K_s / \partial \sigma_{hk} = 0$$

e quindi

$$\partial f / \partial \sigma_{hk} = 0$$

sempre per $h \neq k$. Quindi le componenti di $\vec{n}$ fuori dello spazio delle tensioni principali sono nulle e perciò, per la (90), le direzioni principali della deformazione plastica elementare $d\vec{\varepsilon}^p$ *coincidono con le direzioni delle tensioni principali*, si noti bene, non con le direzioni principali dell'incremento $d\vec{\sigma}$, come avviene per la deformazione elastica elementare. Sempre nel riferimento a tali direzioni, le componenti non nulle di $\vec{n}$ sono espresse da

$$(\partial f / \partial J_s)\,(\partial J_s / \partial \sigma_{hh}) + (\partial f / \partial K_s)\,(\partial K_s / \partial \sigma_{hh}) \qquad (h = x, y, z) \tag{96}$$

essendo

$$\partial J_s / \partial \sigma_{hh} = s_h \tag{97}$$

$$\partial K_s / \partial \sigma_{hh} = s_h^2 - 2 J_s / 3 \tag{98}$$

per le definizioni (34) e conseguenti.

Indicando con $\vec{q}$ il vettore coassiale a $\vec{s}$ ([20]), le cui componenti sulle direzioni delle tensioni principali sono espresse dalle (98), scriviamo la (90)

$$d\vec{\varepsilon}^p = (P\vec{s} + Q\vec{q})\, d\sigma_n \tag{99}$$

avendo posto

$$P = k_1 \frac{\partial f}{\partial J_s}\,, \quad Q = k_1 \frac{\partial f}{\partial K_s}\,, \quad k_1 = \frac{de_p}{n\, d\sigma_n}\,. \tag{100}$$

Nell'ambito delle teorie incrementali isotrope la (99) rappresenta l'espressione più generale della deformazione plastica; a definire completamente le relazioni in gioco basta dare le funzioni scalari k_1 e f oppure le P e Q, in dipendenza di J_s e K_s. Si noti che per individuare il vettore $\vec{q}$ non è necessario far riferimento alle direzioni principali: le sue componenti sono contenute nella matrice

$$[q_{xx}] = [s_{xx}]^2 - \frac{2}{3} J_s [1]_3\,. \tag{101}$$

([20]) Si dicono coassiali i vettori rappresentativi di due tensori aventi le medesime direzioni principali, o, in termini geometrici, che sono portati nello spazio principale dalla stessa « rotazione ». Per quanto s'è visto nel § I. 9 sono coassiali i vettori che rappresentano $[s_{xx}]$ e $[s_{xx}]^2$; il secondo ha per valori principali i quadrati di quelli del primo; ciò prova la (101).

Il tensore che $\vec{q}$ rappresenta ha nullo il primo invariante $\vec{q} \cdot \vec{i}_t$ ed è detto *deviatore del quadrato di* $[s_{xx}]$.

Nel riferimento alle direzioni principali si può dare una espressione equivalente alla (99) in generalità ma più comoda per l'uso. Dando indici 1, 2, 3 ai tre valori principali, scriviamo l'equazione scalare

$$\Phi d\varepsilon_1^p = [s_1 + \beta(s_2 - s_3)]\, d\sigma_n \tag{102}$$

essendo Φ e β due nuove funzioni, in sostituzione di P e Q.

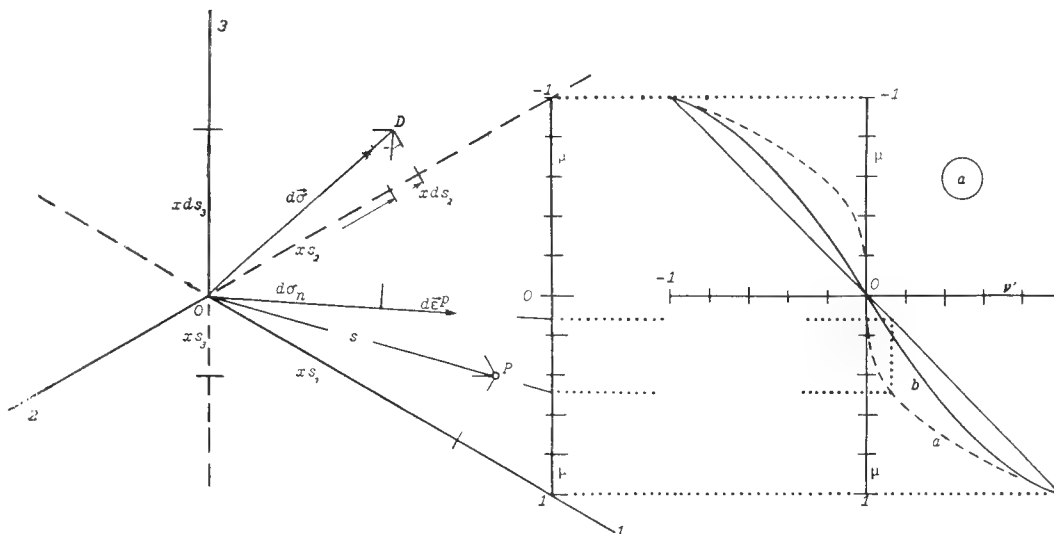



Fig. 12.

Conviene esaminare le relazioni in questione sul piano dei deviatori, (fig. 12) sul quale si effettua l'assonometria dello spazio delle tensioni principali. Qui è contenuto il vettore $\vec{s}$, rappresentato dal segmento OP avente sulle fondamentali 1, 2, 3 proiezioni proporzionali a s_1, s_2, s_3 col fattore $\sqrt{1,5}$ (§ I. 4, *d*) indicato con x in figura. Nello stesso piano giace $d\vec{\varepsilon}^p$, ma non $d\vec{\sigma}$ in generale; la proiezione di quest'ultimo vettore sia rappresentata da OD. A definire la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ si può adottare il parametro ν' definito in analogia a μ: dette s', s'', s''' le componenti principali di $\vec{s}$, definite come per la (48) [21], e dette $d\varepsilon'$, $d\varepsilon''$, $d\varepsilon'''$ le corrispondenti componenti di $d\vec{\varepsilon}^p$ si scrive

$$\nu' = 3d\varepsilon''/(d\varepsilon' - d\varepsilon''') \tag{103}$$

---

[21] Per il settore considerato in figura è $s' = s_2$, $s'' = s_3$, $s''' = s_1$.

Quindi la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ può essere determinata leggendo il valore di ν' sulla stessa scala sulla quale si riporta μ. Sostituendo le espressioni (102) nella (103) si trova

$$\beta = \frac{\mu - \nu'}{3 + \mu\nu'} . \tag{104}$$

Dunque, a definire la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ si possono adottare varie vie: o si fa riferimento alla sezione del luogo p, tracciandone la normale o si fa uso del parametro ν', oppure di β.

In linea generale ν', e così β, si debbono considerare funzioni di J_s e di K_s, o anche, di s e μ. Ordinariamente si suppone che i luoghi p siano omotetici e quindi che la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ non dipenda da s. In questo caso la relazione $\nu'(\mu)$ basta a definire la direzione dell'incremento di deformazione plastica. Nella fig. 12*a* sono rappresentate due di queste funzioni. La linea a tratto *a* vale nel caso in cui la sezione del contorno elastoplastico abbia la forma indicata nella fig. 4; la linea *b* rappresenta un andamento medio probabile in base a dati sperimentali. Per l'isotropia ammessa è $\nu' = \mu$ per $\mu = \pm 1$; non essendovi differenza fra il comportamento del materiale a trazione o compressione, anche per $\mu = 0$ è $\nu' = \mu$ e la curva è simmetrica rispetto a tale punto.

Nella figura la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ è costituita in base alla curva *a*. La proiezione di $d\vec{\sigma}$ su tale direzione fornisce il valore di $d\sigma_n$. Se non si vuole operare per via grafica si può calcolare $d\sigma_n$ mediante l'espressione

$$d\sigma_n = (ds_r - \sqrt{3}\,\beta ds_t)\,(1 + 3\beta^2)^{-1/2} \tag{105}$$

dove ds_r e ds_t sono le componenti di $d\vec{\sigma}$ sulla direzione di $\vec{s}$ e sulla direzione normale, nel piano dei deviatori. La (105) è ricavata dalla relazione

$$d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p = de_p d\sigma_n .$$

Per individuare la funzione Φ conviene valersi della variabile [22]

$$e_p = \int |d\vec{\varepsilon}^p| . \tag{106}$$

Dalle (102) si ha

$$\Phi de_p = \sqrt{1 + 3\beta^2}\, s d\sigma_n . \tag{107}$$

---

[22] Alcuni preferiscono introdurre la variabile $e_w = \int dW^p/s$ essendo $dW^p = \vec{s} \cdot d\vec{\varepsilon}^p$ il *lavoro plastico* elementare. Secondo le (102) risulta

$$de_p = de_w \sqrt{1 + 3\beta^2} .$$

Siccome β ha valori sempre assai piccoli, non esiste sostanziale differenza fra e_p e e_w

Secondo le ammissioni della teoria, il rapporto $de_p/d\sigma_n$ dipende dunque da J_s e K_s o parimenti da s e μ; esso può essere dunque determinato mediante prove di carico proporzionale. In tali condizioni per la (105) si ha $ds_r = ds$, $ds_t = 0$; quindi da queste prove si ottiene direttamente

$$\Phi = \frac{sds}{de_p}. \tag{108}$$

Dunque Φ è la pendenza del grafico di $s^2/2$ in funzione di e_p ricavato in un esperimento realizzato con μ costante. Nelle condizioni più generali, una serie di tali grafici insieme con la documentazione della dipendenza di ν' da μ (ed eventualmente da s) è sufficiente a definire completamente il comportamento del materiale secondo la teoria isotropa.

Una semplificazione del tutto lecita nell'ordine di approssimazione delle attuali conoscenze della deformazione plastica consiste nel supporre [23] $\beta = 0$. Allora si ha dalla (105) $d\sigma_n = ds$ e dalle (102)

$$\Phi d\vec{\varepsilon}^p = \vec{s}ds. \tag{109}$$

L'unico dato qui necessario è il valore di Φ che si ricava secondo la (108) dalle prove di carico proporzionale, per i valori attuali di μ e s. Una ulteriore semplificazione si ha quando si ammetta che Φ non dipenda da μ. Basta allora la prova di trazione a fornire tutti i dati occorrenti. Se lo sforzo di trazione è diretto secondo z si ha

$$\begin{gathered} d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_y^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_z^p, \quad de_p = \sqrt{\frac{3}{2}}\, d\varepsilon_z^p \\ s_{xx} = s_{yy} = -\sigma_z/3, \quad s_{zz} = 2\sigma_z/3, \quad s = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_z \\ \frac{de^p}{ds} = \frac{1{,}5}{E_t} - \frac{1{,}5}{E}. \end{gathered} \tag{110}$$

Quindi la (109) si scrive

$$\left(\frac{ds}{de_p}\right)\frac{d\vec{\varepsilon}^p}{ds} = \frac{\vec{s}}{s}. \tag{111}$$

---

[23] Secondo questa ipotesi (parallelismo dei vettori $\vec{s}$ e $d\vec{\varepsilon}^p$) la variabile e_w definita nella nota precedente coincide con la e_p della (106). È opportuno sottolineare la distinzione fra l'ipotesi $\beta = 0$ e la $\partial\Phi/\partial\mu = 0$. Adottando le due ipotesi (teoria isotropa semplice) si ha il singolare risultato: il lavoro plastico W^p non dipende dal cammino di carico ma solo dalla posizione dei punti estremi (sempre che non si abbiano fasi di scarico); ciò sebbene il processo non sia reversibile.

il coefficiente in parentesi a primo membro essendo ricavato in base alla prova di trazione, con l'ultima delle (110), dove E_t è il *modulo tangente* $d\sigma/d\varepsilon$. Diciamo teoria *isotropa semplice* quella che ammette queste posizioni.

II. 6. - Le teorie incrementali anisotrope. — La teoria formulata sulla base dell'equazione (83) e che si esprime in termini generali nella forma (99), rivela un'anisotropia relativa alle direzioni delle tensioni principali, nel senso che l'incremento di deformazione plastica, riportato nello spazio vettoriale di $\vec{\sigma}$, mentre in grandezza risulta proporzionale all'incremento di tensione (conformemente all'ipotesi di linearità) in direzione risulta vincolato al vettore $\vec{s}$; di fatti le direzioni principali dell'incremento di deformazione plastica coincidono con le direzioni delle tensioni principali; nella formulazione (109) coincide addirittura la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ con quella di $\vec{s}$. D'altra parte c'è completa isotropia nei riguardi di $\vec{s}$, nel senso che la posizione degli assi del corpo rispetto alle direzioni delle tensioni principali non influisce nell'espressione della deformazione plastica elementare. Questa affermazione, anche se non sia categoricamente smentita dall'esperienza, risulta sotto certi aspetti poco soddisfacente. Si supponga di imprimere ad un cubetto di materiale uno scorrimento plastico γ_{xy} avendo applicata una tensione τ_{xy} che superi il relativo limite elastico iniziale; l'incrudimento del materiale eleva il limite elastico, cosicchè ricaricando il materiale nello stesso senso, dovrà constatarsi che il campo elastico si è ampliato da questa parte. Quale sarà il comportamento del materiale sotto una τ_{xy} di senso opposto? Se è vero che il luogo p è rappresentabile mediante la (83), poichè nessuno dei tre invarianti I_σ, J_s, K_s viene a modificarsi per l'inversione di segno delle due tensioni principali non nulle, si deve concludere che il limite elastico a carico invertito deve avere lo stesso valore come per il carico che ha prodotto l'incrudimento. In realtà invece l'esperimento indica un certo spostamento dei due limiti elastici nello stesso senso (effetto Bauschinger); per tenerne conto si deve abbandonare la teoria isotropa.

Una anisotropia legata alla deformazione plastica si introduce quando nella espressione di f si faccia intervenire [24] $\vec{\varepsilon}^p$ non solo coi propri invarianti ma anche con quelli concatenati a $\vec{\sigma}$, come $\vec{\sigma}\cdot\vec{\varepsilon}^p$. Si adotta perciò nelle teorie a cui ora accenniamo un'espressione che, supposto il materiale inizialmente isotropo, si può indicare in termini generali con

$$f(s, \vec{s}\cdot\vec{\varepsilon}^p, \ldots) = 0 \,.$$

[24] Dovendo fare intervenire la deformazione plastica globale, se ne deve qui supporre la piccolezza per semplificare le integrazioni.

Nello spazio delle tensioni, il luogo p corrispondente ad una certa deformazione plastica non gode più delle simmetrie rilevate a proposito delle teorie isotrope; riportandolo nello spazio delle tensioni principali, si ha in generale una superficie differente per ogni terna di valori dei parametri (ad esempio, gli angoli di Eulero) che definiscono le direzioni di quelle tensioni rispetto alle direzioni principali della deformazione plastica. Sussiste la (90) con la quale si definisce la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ nello spazio delle tensioni, in base all'equazione $f = 0$ del luogo p; dalla stessa equazione si ricava la grandezza di quell'incremento. Infatti è

$$df = \vec{n} \cdot d\vec{\sigma} + \vec{n}_1 \cdot d\vec{\varepsilon}^p = 0 \tag{112}$$

essendo $\vec{n}_1$ il vettore che si ha dalla (88) sostituendo σ con ε^p. Quindi dalle (87) e (90) si ricava il rapporto $d\sigma_n/de_p$ che è quanto occorre a completare la determinazione di $d\vec{\varepsilon}^p$.

Nella forma più semplice si può impostare una teoria di incrudimento anisotropo scrivendo la $f = 0$ nella forma

$$(\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) \cdot (\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) - c^2 = 0 \tag{113}$$

essendo m e c costanti secondo questa che diciamo *teoria anisotropa semplice*. Il luogo dei limiti elastici in questo caso, per effetto della deformazione plastica, subisce una semplice traslazione. Dalla (113) si ha

$$\vec{n} = 2(\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) = -\vec{n}_1/m$$

e quindi, con la (90), si ottiene

$$d\vec{\varepsilon}^p = \frac{(\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) \cdot d\vec{s}}{mc^2} (\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) . \tag{114}$$

II. 7. - Carico isodirezionale e carico proporzionale. — Se si sottopone una porzione di materiale originariamente isotropo ad un sistema uniforme di tensioni crescenti da zero con leggi tali che si mantengano invariate rispetto ad un riferimento solidale al corpo le direzioni delle tensioni principali, anche se si variano i rapporti fra quelle tensioni, le direzioni principali della deformazione debbono mantenersi coincidenti con quelle delle tensioni principali. Infatti, nel riferimento cartesiano individuato dalle direzioni principali fisse, dovranno essere permanentemente nulli gli scorrimenti γ per motivi di simmetria; l'eventuale anisotropia conseguente alla deformazione dovrà essere di tipo ortotropo per rispettare la simmetria rispetto al sistema di riferimento. Diciamo *isodirezionale* o *coassiale* questo tipo di sollecitazione. Il cammino di carico è rappresentabile nello spazio delle tensioni principali, nel quale anche si potrà riportare il vettore rappresentativo della deformazione elementare. In questo

caso ha senso integrare, nel riferimento fisso, la deformazione totale (elastoplastica) $d\vec{\varepsilon}$, ottenendosi il tensore logaritmico $\vec{\varepsilon}_l$, le cui componenti sono le deformazioni naturali. Sia

$$\vec{e}_l = \vec{\varepsilon}_l - \frac{1}{3} I_\epsilon \vec{i}_t \tag{115}$$

dove I_ϵ è la somma delle tre dilatazioni naturali principali; $\vec{e}_l$ rappresenta il deviatore logaritmico di deformazione. In generale $\vec{e}_l$ dipende dal cammino di deformazione e solo definendo questo si può intendere che fra deformazione e tensione si stabilisca una corrispondenza. In particolare la corrispondenza biunivoca sussiste per quel tipo di sollecitazione isodirezionale che è stata detta carico proporzionale, per la quale il cammino di carico è semplicemente una retta per l'origine. In tal caso μ resta costante. Ammesso che le costanti elastiche mantengano i loro valori anche dopo deformazioni finite, la deformazione plastica è data da $\vec{e}^p = \vec{e}_l - \vec{s}/2G$. Se in una prova di questo genere il vettore $\vec{e}_l$ mantiene invariata la sua direzione (ossia i rapporti fra le componenti), ciò significa che il coefficiente β delle (102) dipende solo da μ. I vettori $\vec{e}_l$ e $\vec{s}/2G$ si costruiscono nel piano dei deviatori come è indicato per $\vec{s}$ nella fig. 3; la tangente dell'angolo compreso fra $\vec{s}/2G$ ed $\vec{e}^p$ dà il valore di $\sqrt{3}\,\beta$. Se β è trascurabile, si hanno ulteriori notevoli semplificazioni. Detta *scorrimento ottaedrico* la quantità

$$\gamma_{ot} = \frac{2}{3} \sqrt{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2 + (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)^2 + (\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1)^2} \tag{116}$$

dove le $\bar{\varepsilon}$ sono date dalla (75), si osserva che $\sqrt{3}\,\gamma_{ot}/2$ rappresenta il modulo di $\vec{e}_l$. Dando per lo *scorrimento ottaedrico plastico* γ_{ot}^p la definizione corrispondente alla (116), in base alle componenti di deformazione plastica, sempre nel caso in cui questa mantenga direzione costante, si può scrivere

$$e_p = \sqrt{3}\,\gamma_{ot}^p/2\,. \tag{117}$$

D'altra parte per la (50) è $\tau_{ot} = s/\sqrt{3}$. Quindi, se β è trascurabile, si può scrivere

$$\gamma_{ot}^p = \gamma_{ot} - \tau_{ot}/G\,.$$

Ne segue che in questo caso dal diagramma $\tau_{ot}(\gamma_{ot})$ si può ricavare la derivata

$$\frac{de_p}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma_{ot}}{d\tau_{ot}} - \frac{1}{2G} \tag{118}$$

dalla quale si ricava Φ secondo la (108).

Indipendentemente da ogni ipotesi relativa al comportamento plastico del materiale, nelle condizioni di carico proporzionale, la più generale espressione della deformazione si scrive

$$\vec{\varepsilon}_l = P_1\vec{s} + Q_1\vec{q} + R_1\vec{i}_t \tag{119}$$

dove P_1, Q_1, R_1 sono funzioni dei tre invarianti di tensione. La (119) esprime semplicemente la coassialità dei tensori degli sforzi e delle deformazioni, che per il corpo inizialmente isotropo deve sussitere sempre. L'ultimo addendo a secondo membro rappresenta l'effetto della compressibilità del materiale, essendo $3R_1 = I_\varepsilon$.

Capitolo III.

LE TEORIE INCREMENTALI NON LINEARI

III. 0. - Introduzione. — Le teorie considerate nel capitolo precedente mettono in relazione la deformazione plastica con *un* luogo p. Altre teorie ammettono l'esistenza di più *luoghi p parziali*: ciascuno individua una parte della deformazione e dalla composizione di queste nasce

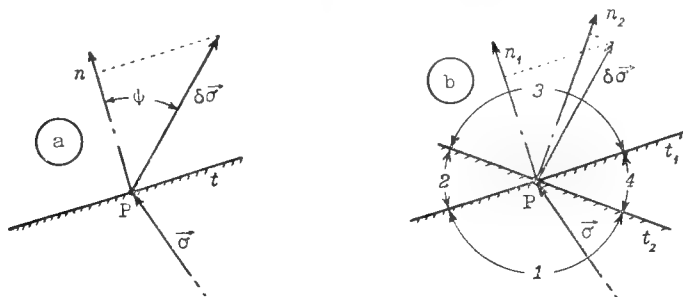



Fig. 13.

la deformazione plastica complessiva. È questo il concetto comune nell'indirizzo delle teorie di cui si tratta in questo capitolo. Le novità essenziali che esso introduce sono chiarite dall'esempio schematico della fig. 13. Nella fig. 13*a* è rappresentata la situazione nell'intorno del punto di carico P, come si presenta nelle teorie viste precedentemente; t è la tangente all'intersezione del luogo p col piano della figura che contiene la normale n. Sia ψ l'angolo che la normale, sempre volta verso l'esterno della regione elastica, fa con la direzione dell'incremento di tensione $\delta\vec{\sigma}$ [25]. Per le teorie

[25] Gli incrementi di tensione e deformazione sono indicati in questo capitolo con δ per distinguerli dagli incrementi delle variabili di integrazione.

già considerate l'incremento di deformazione plastica è proporzionale a $\delta\sigma_n = |\delta\vec{\sigma}|\cos\psi$ se $\cos\psi \geq 0$, mentre è nullo se $\cos\psi \leq 0$. La condizione di linearità postulata da queste teorie si può esprimere nei termini seguenti: se gli incrementi di tensione $\delta\vec{\sigma}_1$, $\delta\vec{\sigma}_2$ che fanno con n angoli non ottusi, producono rispettivamente gli incrementi $\delta\vec{\varepsilon}_1^p$, $\delta\vec{\varepsilon}_2^p$ nella deformazione plastica, ogni combinazione lineare $a\delta\vec{\sigma}_1 + b\delta\vec{\sigma}_2$ produce l'incremento di deformazione plastica $a\delta\vec{\varepsilon}^p + b\delta\vec{\varepsilon}_2^p$ [26]. Si consideri ora il caso della fig. 13*b*: si abbiano due luoghi p parziali, n_1 e n_2 siano le normali, contenute nel piano di rappresentazione, t_1 e t_2 siano le tangenti alle intersezioni col piano stesso. Ammesso che la variazione di deformazione plastica possa ottenersi sommando gli incrementi valutati separatamente, si presentano differenti situazioni a seconda che la direzione di $\delta\vec{\sigma}$, proiettata sul piano della figura, sia contenuta nell'uno o l'altro dei quattro angoli delimitati dalle rette t_1 e t_2: l'angolo 1 corrisponde alla regione elastica, in quanto $\delta\vec{\sigma}$ non vi produce variazione di $\vec{\varepsilon}^p$; se la direzione di $\delta\vec{\sigma}$ sta nell'angolo 3, la proiezione di $\delta\vec{\sigma}$ è positiva su ambedue le normali e si hanno due incrementi $\delta\vec{\varepsilon}^p$ secondo n_1 e n_2 da comporre; se la direzione di $\delta\vec{\sigma}$ è contenuta nell'angolo 2 o nel 4, la proiezione di $\delta\vec{\sigma}$ è positiva solo per una delle normali e l'incremento $\delta\vec{\varepsilon}^p$ sarà diretto rispettivamente secondo n_1 o n_2. Ovviamente non è valida in questo caso la condizione di linearità come sopra è formulata, ma deve essere modificata nel modo seguente: sono sovrapponibili gli effetti di vari incrementi di tensione solo se le loro direzioni cadono tutte nel medesimo settore 1, 2, 3 ovvero 4 [27]. Nelle teorie esaminate in questo capitolo si hanno vari luoghi p parziali, in numero finito o infinito; quindi la direzione e il valore dell'incremento di deformazione plastica viene a dipendere, in modo alquanto complesso, dalla direzione di $\delta\vec{\sigma}$; perciò si sono chiamate *non lineari* queste teorie. La regione elastica viene qui determinata per inviluppo; il suo contorno viene a presentare dei punti singolari, di cui uno certamente cade nel punto di carico.

III. 1. - Lo slittamento unitario. — Siano x, y, z (fig. 14) gli assi ortogonali ai quali viene riferito l'intorno del punto P del corpo in esame. Sia l una direzione definita dall'angolo α che il piano lz fa con l'asse y e dall'angolo φ che l fa col piano xy. Sia t una direzione perpendicolare a l definita dall'angolo β che t fa col piano lz. Sia $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ una terna ortogonale congruente a x, y, z i cui assi $\bar{x}$ e $\bar{z}$ stanno sulle direzioni l e t. Come

---

[26] Il principio di sovrapposizione degli effetti vale pure se gli angoli sono entrambi ottusi; non vale se uno di essi è acuto e l'altro ottuso.

[27] Sussiste quindi in ogni caso la proprietà per cui all'incremento $a\delta\vec{\sigma}$ corrisponde una variazione di deformazione plastica pari ad a volte quella dovuta a $\delta\vec{\sigma}$: le relazioni in gioco restano omogenee di grado 1 in quegli incrementi.

mostra la figura, con la rotazione complementare di α si passa dagli assi x, y, z agli assi x', y', z; con la rotazione φ intorno a y' si ottengono da x', y', z gli assi $\bar{x} = l$, y', z''; da questi infine, con la rotazione β intorno a $\bar{x}$ si passa alla terna $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ([28]). La matrice dei coseni direttori dell'ultima terna, secondo quanto è detto nel § I. 2, è data dal prodotto

$$(120) \qquad [\bar{x}_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sviluppando i prodotti si ha

$$(121)\ (122) \qquad \bar{x}_x = \sin\alpha\ \cos\varphi \qquad \bar{z}_x = -\sin\alpha\ \cos\beta\ \sin\varphi + \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$(123)\ (124) \qquad \bar{x}_y = \cos\alpha\ \cos\varphi \qquad \bar{z}_y = -\cos\alpha\ \cos\beta\ \sin\varphi - \sin\alpha\ \sin\beta$$

$$(125)\ (126) \qquad \bar{x}_z = \sin\varphi \qquad \bar{z}_z = \cos\beta\ \cos\varphi$$

Lo stato di tensione dell'intorno di P sia rappresentato, come è detto nel § I. 4, *c*, mediante il vettore $\vec{\sigma}$ nello spazio a nove dimensioni dei versori ortogonali $\vec{i}_{xx}$, $\vec{i}_{xy}$, ..., $\vec{i}_{zz}$. La tensione agente sul piano normale alla direzione $\bar{x}$ ha sulla direzione $\bar{z}$ del piano stesso una componente che viene indicata con $\sigma_{\bar{x}\bar{z}} = \tau$ e che secondo la (22) si ottiene moltiplicando gli elementi della terza linea della matrice $[\bar{x}_x x_x]$ per le componenti di $\vec{\sigma}$, ordinatamente:

Fig. 14.

$$(127) \qquad \tau = \bar{x}_x \bar{z}_x \sigma_{xx} + \bar{x}_x \bar{z}_y \sigma_{xy} + \ldots + \\ + \bar{x}_z \bar{z}_z \sigma_{zz} \, .$$

Indichiamo con $\vec{i}_{lt}$ il vettore costruito coi coseni direttori $\bar{x}_x$, $\bar{x}_y$, $\bar{x}_z$ della direzione l e $\bar{z}_x$, $\bar{z}_y$, $\bar{z}_z$ della direzione t:

$$(128) \qquad \vec{i}_{lt} = \bar{x}_x \bar{z}_x \vec{i}_{xx} + \frac{1}{2} (\bar{x}_x \bar{z}_y + \bar{x}_y \bar{z}_x) (\vec{i}_{xy} + \vec{i}_{yx}) + \ldots$$

i termini omessi ricavandosi da quelli indicati per rotazione degli indici xyz.

([28]) Si è adottata qui la notazione della nota Rif. 49*G*, che non coincide con quella usuale degli angoli di Eulero.

Tenendo presenti le simmetrie $\sigma_{hk} = \sigma_{kh}$ si trova che la (127) può scriversi

$$\tau = \vec{i}_{lt} \cdot \vec{\sigma} \, . \tag{129}$$

Si conclude: gli stati di tensione per i quali sul piano normale alla direzione l, nella direzione t, si raggiunge una data τ sono rappresentati da vettori $\vec{\sigma}$ che hanno la medesima proiezione τ su $\vec{i}_{lt}$. Il luogo dei punti dove si trova l'estremo del vettore $\vec{\sigma}$ quando nella posizione indicata si raggiunge la tensione τ è l'iperpiano (127): la distanza di questo dall'origine misura la τ. Su qualunque piano l'intersezione del luogo (127) è una retta; in ogni spazio tridimensionale l'intersezione è un piano [29]. Se partendo da questo luogo, il vettore $\vec{\sigma}$ subisce un incremento $\delta\vec{\sigma}$ la tensione considerata varia di

$$\delta\tau = \vec{i}_{lt} \cdot \delta\vec{\sigma} \, . \tag{130}$$

Supponiamo che questa variazione dia luogo ad uno scorrimento plastico (slittamento) fra le direzioni l e t che indichiamo con $\delta\gamma = 2\delta\varepsilon^{p}_{\bar{x}\bar{z}} = 2\delta\varepsilon^{p}_{\bar{z}\bar{x}}$. Il corrispondente incremento di deformazione plastica, nello stesso spazio vettoriale è dato da [30]

$$\delta\vec{\varepsilon}^{p} = \vec{i}_{lt}\delta\gamma \, . \tag{131}$$

In connessione con i concetti del § II. 4, si può considerare l'iperpiano (127) come soglia di plasticità, posto che la deformazione plastica non vari finchè l'estremo del vettore $\vec{\sigma}$ stia dal lato dell'origine rispetto al luogo stesso e che lo scorrimento $\delta\gamma$ si verifichi quando $\vec{\sigma}$ e $\delta\vec{\sigma}$ abbiano proiezioni dello stesso verso su $\vec{i}_{lt}$. La deformazione plastica elementare obbedisce alla (92), ossia l'incremento di deformazione è normale al luogo p. Si deve ancora precisare che un incremento $\delta\tau$ dello stesso segno di τ produce variazione di deformazione a condizione che valori di τ più alti non siano stati raggiunti precedentemente.

Se la deformazione plastica è costituita solo dallo slittamento espresso dalla (131) si arriva ad una rappresentazione assai semplice del fenomeno. Supposto che il rapporto $\delta\gamma/\delta\tau$ dipenda solo da τ risulta per le deformazioni

---

(29) È ovvio che in generale la normale $\vec{i}_{lt}$ non è contenuta in questi sottospazi, ossia non è la perpendicolare a quella retta o a quel piano.

(30) Infatti poichè per le ε sussiste la stessa trasformazione che la (22) dà per le σ, e poichè è $[\bar{x}_x \bar{x}_x]^* [\bar{x}_x x_x] = [1]_9$ si ha

$$\{\varepsilon_{xx}\} = [x_x \bar{x}_x]^* \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}\} \, .$$

Se la colonna $\{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}\}$ contiene solo $\delta\gamma/2$ nella terza e nella terzultima linea, la $\{\varepsilon_{xx}\}$ ha per elementi le componenti di deformazione della (131).

plastiche una legge olonoma; ossia queste dipendono unicamente dalla posizione attuale dell'estreno P del vettore $\vec{\sigma}$, a condizione solo che il cammino di carico non abbia precedentemente oltrepassato l'iperpiano per P. Ammesso che le deformazioni plastiche siano piccole, si può integrare la (131):

$$\vec{\varepsilon}^p = \vec{i}_{lt}\gamma(\tau) \ . \tag{132}$$

III. 2. - La teoria di Batdorf e Budiansky. — Dalle considerazioni precedenti si giunge alla teoria dello slittamento di Batdorf e Budiansky (Rif. 49 G) ammettendo che la deformazione, come sopra la si è espressa, si produca per ciascuna delle infinite direzioni delle τ, sulle infinite giaciture, e che la deformazione plastica complessiva si ottenga per sovrapposizione di questi slittamenti, ciascuno operante indipendentemente dagli altri. Si scrive cioè [31]

$$\delta\vec{\varepsilon}^p = \int d\beta \int \vec{i}_{lt}\delta\gamma d\Omega \tag{133}$$

essendo

$$d\Omega = \cos\varphi \, d\alpha \ d\varphi \tag{134}$$

l'angolo solido elementare per le direzioni l, l'integrazione dovendosi estendere fra i limiti [32]

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Una difficoltà sostanziale nell'uso della (133) sta nel fatto che per ciascuna direzione si deve distinguere se si produca o no l'incremento di scorrimento. La legge di deformazione ammessa si scrive semplicemente

$$\gamma = F(\tau) \tag{135}$$

e quindi, indicando con apice la derivata, si ha

$$\delta\gamma = F'(\tau)\delta\tau \tag{136}$$

Poichè si è denotata con γ la sola deformazione plastica, la F assume valori nulli per $\tau \leq \tau_L$, essendo τ_L il limite elastico della tensione tangen-

---

[31] Qui è $\delta\gamma \ d\beta \ d\Omega$ lo scorrimento, inteso come proporzionale alla « entità » delle direzioni di slittamento interessate.

[32] Supposto infatti, come è naturale in via statistica, che le direzioni l per le quali si può avere slittamento sulla giacitura perpendicolare siano uniformemente diffuse nell'emisfero $z > 0$, definito dal campo di variazione indicato di α e φ, fra due meridiani α, $\alpha + d\alpha$ e due paralleli adiacenti φ, $\varphi + d\varphi$ sta racchiuso l'angolo solido dato dalla (134) essendo $\cos\varphi$ il raggio del parallelo. Su ogni giacitura si deve variare β in un intervallo di 180° per comprendere tutte le direzioni di scorrimento.

ziale. A parte questa restrizione, che non introduce particolari complicazioni, si deve tener presente la limitazione di validità della (135) espressa dalla condizione, diciamo (*a*), che la τ attuale superi tutti i valori precedentemente raggiunti lungo la stessa direzione; altrimenti nella (135) al posto di τ si dovrà sostituire il più elevato di quei valori. La (136) è inoltre soggetta alla condizione, diciamo (*b*), che sia $\tau \delta \tau > 0$. Quando la condizione (*a*) o la (*b*) non sussista si deve porre $\delta \gamma = 0$.

Si esamini la situazione per quanto riguarda il fascio delle direzioni di slittamento normali ad un'assegnata direzione *l*. Come appare dalle

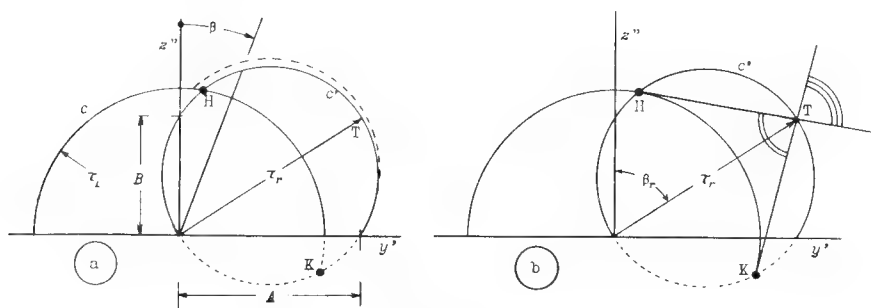



Fig. 15.

espressioni (122)-(126) di z_x, z_y, z_z, l'influenza del solo parametro β sulla componente τ calcolata secondo la (127) è rappresentata dalla relazione

$$\tau = A \sin \beta + B \cos \beta \tag{137}$$

dove A e B sono coefficienti che non dipendono da β. Sul piano normale alla direzione *l* il diagramma polare delle τ è costituito quindi da un circolo c' (fig. 15) il cui diametro rappresenta la tensione tangenziale risultante τ_r nel piano considerato. L'arco HK, lungo il quale è $|\tau| > \tau_L$, è quello in cui si verificano scorrimenti plastici [33]. Se in un istante successivo il cerchio delle τ assume la posizione segnata con linea a tratto, l'incremento di scorrimento si verificherà nell'arco tracciato, esterno sia al precedente circolo delle τ sia alla circonferenza c di raggio τ_L. L'estensione dell'arco lungo il quale lo scorrimento plastico varia dipende dalla direzione in cui si sposta il punto T, estremo del vettore rappresentativo della tensione tangenziale. È facile vedere (fig. 15*b*) che se il punto T si sposta in una direzione contenuta nell'angolo marcato con doppio archetto, limitato dalle due tangenti per T alla circonferenza c, entro l'arco HK tutte le τ subiscono una diminuzione e quindi è $\delta\gamma = 0$ per tutte le direzioni contenute nel

[33] L'arco punteggiato, al di sotto dell'asse y vale per le direzioni z con β in prossimità di $-\pi/2$ ed indica valori di τ di segno opposto a A.

piano in esame. Per una siffatta variazione nel regime di tensioni, se altrettanto accade in tutti i piani, il materiale presenta solo deformazioni elastiche. Invece se il punto T si sposta in una direzione contenuta nell'angolo marcato con triplo archetto nella fig. 15*b*, si ha un aumento nella componente di tensione su tutte le direzioni contenute [34] nell'angolo HK; quindi per tutte queste $\delta\gamma$ è dato dalla (136). Si noti che in questo caso il nuovo circolo delle tensioni copre completamente quello precedente, almeno nella parte che sporge fuori della circonferenza c. Se altrettanto avviene su tutte le giaciture, lo stato di deformazione plastica dipende solo dalle tensioni attuali e non dalle fasi precedenti del processo di carico. Per ogni direzione di spostamento di T fuori dei due angoli indicati si ha un aumento di τ su una parte dell'arco HK. È facile intuire che in queste situazioni le integrazioni che appaiono nella (133) presentano le maggiori difficoltà. In generale l'uso della teoria di Batdorf e Budiansky si presenta assai complesso all'applicazione. Si indicheranno alcune conclusioni particolari che sono state tratte da essa.

a) Consideriamo anzitutto il caso di carico isodirezionale. Assumiamo come assi x, y, z le direzioni delle tensioni principali. Delle componenti di $\vec{\sigma}$ saranno differenti da zero solo le tre tensioni normali che indichiamo con $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$. La (127) si scrive in questo caso

$$(138) \qquad 2\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha \sin\beta \cos\varphi - (\sigma_y - \sigma_z) \cos^2\alpha \cos\beta \sin 2\varphi + + (\sigma_z - \sigma_x) \sin^2\alpha \cos\beta \sin 2\varphi \,.$$

Si nota che alle tre tensioni si può sommare un addendo qualunque senza modificare i risultati [35]. La tensione tangenziale risultante sulla giacitura individuata dagli angoli α e φ della normale risulta data da

$$(139) \qquad \tau_\gamma^2 = \cos^2\varphi\,[(\sigma_z - \sigma_x)^2 \sin^2\alpha + (\sigma_z - \sigma_y)^2 \cos^2\alpha - - (\sigma_z - \sigma_x \sin^2\alpha - \sigma_y \cos^2\alpha)^2 \cos^2\varphi]\,.$$

Osserviamo il processo di carico sulla proiezione assonometrica delle figure 3-5. L'equazione (138) nelle coordinate σ_x, σ_y, σ_z rappresenta un piano parallelo alla trisettrice dell'ottante positivo, cioè alla direzione di proiezione della fig. 16. Quindi, segnato sulla proiezione il punto P rappresentativo di uno stato di tensione, gli iperpiani (138) corrispondenti alle varie direzioni di slittamento saranno rappresentati da rette per quel

---

[34] Sull'arco punteggiato si inverte il segno di τ e di $\delta\tau$. Quindi resta positivo il prodotto $\tau\delta\tau$.

[35] Questa è una proprietà generale della teoria in esame: la deformazione plastica dipende dal deviatore di tensione ed è anch'essa data da un deviatore, ossia lascia inalterato il volume.

punto. Si osservi però che le direzioni normali a quegli iperpiani non sono contenute, in generale, nel sottospazio che si considera e che deve essere considerato come una sezione tridimensionale dello spazio dei vettori $\vec{\sigma}$. Tuttavia il vettore rappresentativo della deformazione plastica è contenuto in questo sottospazio, per motivi di simmetria che si rispecchiano nelle integrazioni (133); in altre parole, le direzioni principali della deformazione plastica coincidono con le direzioni delle tensioni principapli, per l'isotropia iniziale che la teoria presuppone. L'esame della (138) permette di concludere che quei piani non possono intersecare gli assi nel tratto compreso fra i punti di coordinata $\pm 2\tau_L$ e che, partendo dallo stato elastico, la prima deformazione plastica si ha all'intersezione con uno dei piani

$$
(140) \qquad \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \pm 2\tau_L, \\ \sigma_y - \sigma_z &= \pm 2\tau_L, \\ \sigma_z - \sigma_x &= \pm 2\tau_L. \end{aligned}
$$

Fig. 16.

Perciò la superficie limite iniziale è un prisma avente per sezione un esagono regolare (esagono di Tresca). Nella deformazione plastica iniziale risulta sempre che il parametro ν' della (103) è nullo; successivamente esso assume valori differenti da zero.

Nella fig. 16 l'esagono *ABCDEF* rappresenta il luogo dei limiti elastici iniziali, in condizioni di carico isodirezionale. L'esagono *APCDEF* costituisce il luogo p per ogni caso in cui il punto P sia raggiunto seguendo una linea di carico c che non attraversi mai il contorno. Se la direzione di spostamento di P è contenuta nell'angolo marcato con tre archetti, tutte le direzioni precedentemente soggette a scorrimento plastico subiscono un ulteriore incremento di deformazione. Per tali cammini si trova una relazione olonoma fra sforzi e deformazioni. In questo calcolo è particolarmente utile l'espressione (139) della tensione risultante τ_r, la cui direzione si determina con l'espressione

$$
(141) \qquad \operatorname{tang} \beta_r = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha}{2(\sigma_z - \sigma_x \sin^2 \alpha - \sigma_y \cos^2 \alpha) \sin \varphi} .
$$

Un diagramma come quello della fig. 17 guida ad individuare il campo dei valori delle due variabili α e φ al quale va estesa l'integrazione; la varia-

bile β non figura più, potendosi in base alle (139) e (141) calcolarsi lo scorrimento risultante per ogni giacitura. La figura si riferisce al caso della sollecitazione di taglio $\sigma_x = \tau_a = -\sigma_y$, $\sigma_z = 0$, τ_a essendo la tensione applicata. In questo caso sussiste antisimmetria rispetto ai piani per l'asse z a 45° con gli assi x e y, e perciò dalla fig. 17 si ottengono valori complementari di α. Conseguentemente è $\delta\varepsilon_z^p = 0$ e perciò $\nu' = 0$ permanentemente.

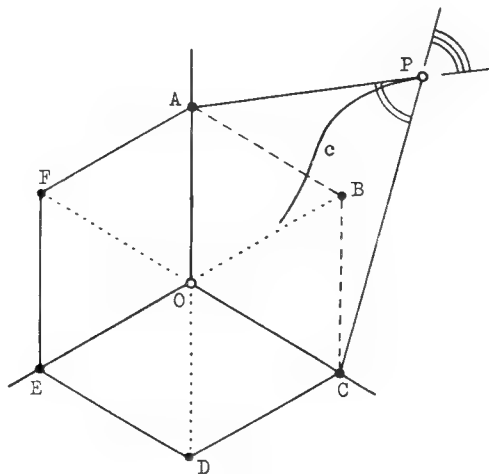
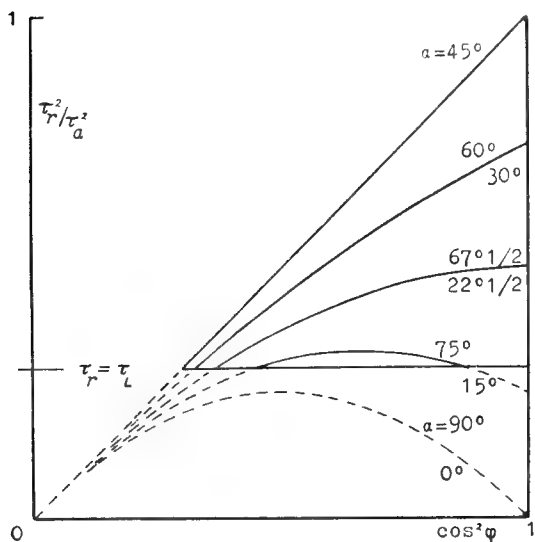



Fig. 17.

b) Per le questioni di stabilità dell'equilibrio di elementi strutturali soggetti a compressione, ha particolare interesse conoscere come si comporta il materiale per piccoli incrementi di tensione a partire da uno stato di sollecitazione uniassiale, raggiunto attraverso un carico proporzionale.

Sia $\sigma_z = \sigma$ la tensione che si raggiunge in queste condizioni di carico, superando il valore $\sigma_p = 2\tau_L$ corrispondente all'inizio della deformazione plastica. Se si verifica un incremento di tensione, di componenti $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{xy}$, $\delta\tau_{yz}$, $\delta\tau_{zx}$ tali che su ognuna delle direzioni sulle quali è $\tau > \tau_L$ sia anche verificata la condizione $\tau\delta\tau > 0$, gli incrementi di deformazione plastica risultano espressi come segue (Rif. 50E):

$$E_d\delta\varepsilon_x^p = \frac{1+a}{4}\,\delta\sigma_x + \frac{1-a}{4}\,\delta\sigma_y - \frac{1}{2}\,\delta\sigma_z$$

(142)
$$E_d\delta\varepsilon_y^p = \frac{1-a}{4}\,\delta\sigma_x + \frac{1+a}{4}\,\delta\sigma_y - \frac{1}{2}\,\delta\sigma_z$$

$$E_d\delta\varepsilon_z^p = \delta\sigma_z - (\delta\sigma_x + \delta\sigma_y)/2$$

(143)
$$E_d\delta\gamma_{xy}^p = a\delta\tau_{xy}, \quad G_d\delta\gamma_{yz}^p = \delta\tau_{yz}, \quad G_d\delta\gamma_{zx}^p = \delta\tau_{zx}\,.$$

I coefficienti di queste relazioni sono dati da

$$E_d = d\sigma/d\varepsilon^p \quad G_d = \sigma/3\varepsilon^p$$

(144)
$$a = \frac{1}{2} + \frac{E_d\varepsilon^p}{\sigma} + \frac{1{,}5E_d}{\sigma}\int_{\sigma_p}^{\sigma}\frac{\varepsilon^p d\sigma}{\sigma}$$

dove ε^p è la deformazione plastica corrispondente alla tensione σ ricavata dalla prova di tensione uniassiale. In base alla medesima prova si può calcolare la funzione F' che compare nella (136) facendo uso dell'equazione integrale

$$(145) \qquad 2\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma\frac{d\varepsilon^p}{d\sigma}\right) = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}F' - \int\left(3f_0 + \frac{f_0 - f_1}{1 - p^2}\right)p^2F'dp$$

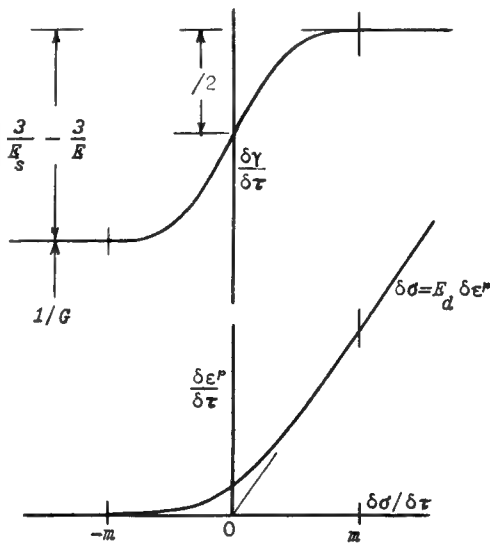
essendo

$$f_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1+p}}K, \quad f_0 - f_1 = \pi\sqrt{1+p}\,(K - E)\,.$$

Qui K e E sono gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie dell'argomento $k^2 = (1-p)/(1+p)$. Nella (145) p si può considerare come una variabile di integrazione che varia da σ_p/σ fino ad 1. L'argomento della funzione F' fuori del segno di integrale è $\tau = \sigma/2$; quello della funzione sotto integrale è $p\sigma/2$ e quindi va da $\tau_L = \sigma_p/2$ fino a $\sigma/2$. Poichè l'integrale si può calcolare con sufficiente precisione anche se la funzione integranda nell'estremo dell'intervallo d'integrazione non si conosce ancora, in base alla (145) si può determinare F' col grado di precisione che si desideri quando si conoscano i valori corrispondenti all'intervallo antecedente dell'argomento e dalla prova di tensione uniassica si abbiano le quantità a primo membro [36].

Fig. 18.

Per ogni combinazione di valori degli incrementi $\delta\sigma_x$, ..., $\delta\tau_{zx}$ per la quale sia $\tau\delta\tau < 0$ su tutte le direzioni dove è $\tau > \tau_L$, l'incremento di deformazione plastica è nullo. Nelle situazioni intermedie il calcolo delle deformazioni plastiche è laboriosissimo. È stato considerato (Rif. 50E) il caso

---

(36) I coefficienti delle (144) sono espressi mediante F' dalle equazioni

$$1/E_d = \int p^2 f_0 F'dp \qquad 1/G_d = 2\int(f_1 - p^2 f_0)F'dp$$
$$(a - 0{,}5)/E_d = 2\int(f_0 - f_1)F'dp\,.$$

Circa il significato dei simboli e i limiti di integrazione vale quanto è detto a proposito della (145). Le espressioni qui riportate correggono qualche errore sfuggito nella stampa della nota originale.

in cui si abbiano solo gli incrementi $\delta\sigma_z$ e $\delta\tau_{xz}$. I risultati sono riassunti nella figura 18. Posto

$$m = 2\sqrt{(\sigma/\sigma_p)^2 - 1}$$

risulta che

a) per
$$\delta\sigma_z/\delta\tau_{xz} \leq -m$$

non si ha incremento di deformazione plastica

b) per
$$\delta\sigma_z/\delta\tau_{xz} \geq m$$

si ha un incremento della deformazione plastica come è dato dalla corrispondente equazione (143) e quindi la deformazione totale che risulta dalla figura; contemporaneamente si ha una deformazione plastica assiale $\delta\varepsilon_z^p$ proporzionale a $\delta\sigma_z$. Nel campo intermedio di valori si ha una transizione continua dall'una situazione all'altra.

III. 3. - La teoria di Lin modificata. — Dalle esperienze su cristalli semplici appare che in ciascun caso esistono vari *sistemi di slittamento*: ossia si riscontrano nel cristallo, su determinate giaciture, certe direzioni secondo le quali si produce lo slittamento plastico. In particolare, per un cristallo del sistema cubico, le giaciture anzidette sono normali alle 4 congiungenti i vertici opposti del cubo e su ciascuna di queste si trovano 3 direzioni di scorrimento a 120°; in tutto sono 12 sistemi di slittamento in un tale cristallo.

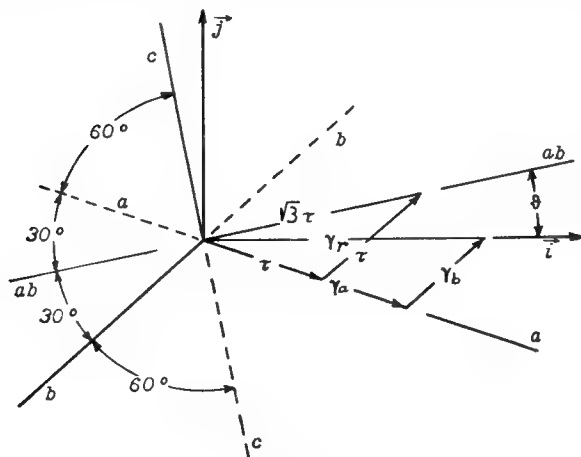



Fig. 19.

Secondo Taylor (Rif. 31*A*) si può ammettere che lungo le *direzioni attive* (cioè, con slittamenti crescenti) si ha la medesima τ nella stessa fase di deformazione e che il valore di questa τ dipende dalla somma degli scorrimenti prodottisi sulle varie direzioni attive. Queste proprietà, di cui Taylor ed altri studiosi si valsero per dedurre dal comportamento del monocristallo quello di un aggregato cristallino sotto carico proporzionale, servirono a Tung Hua Lin (Rif. 54*D*) per stabilire la relazione fra i vettori rappresentanti la tensione tangenziale e lo scorrimento plastico risultante su una giacitura di slittamento. Siano *a*, *b*, *c* (fig. 19) le direzioni

di slittamento di un particolare cristallo, γ_a, γ_b, γ_c i corrispondenti scorrimenti plastici, γ_r lo scorrimento risultante, parallelo al versore $\vec{i}$; sia $\vec{j}$ il versore ortogonale a questo e sia ϑ l'angolo, compreso fra -30° e $+30^\circ$, che la bisettrice più prossima ab fa con $\vec{i}$. Con semplici considerazioni geometriche si trova

$$\gamma_a + \gamma_b = \gamma_r(1 + \delta) \tag{147}$$

essendo

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \vartheta - 1 .$$

Si suppone che i costituenti cristallini dell'aggregato abbiano orientazione del tutto accidentale; i cristalli la cui direzione ab forma con $\vec{i}$ angoli compresi fra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ reagiscono allo scorrimento impresso con tensioni uguali secondo a e b, e quindi aventi una risultante secondo ab il cui valore si indica con $f d\vartheta$. Per le proprietà enunciate f dipende unicamente da $\gamma_a + \gamma_b$ e quindi da γ_r e ϑ secondo la (147). Il vettore della tensione risultante è dato da

$$\vec{\tau}_r = \int_{-\pi'}^{\pi'} (\vec{i} \cos \vartheta + \vec{j} \sin \vartheta)\, f d\vartheta \tag{148}$$

essendo

$$\pi' = \pi/6 .$$

Poichè f è funzione pari di ϑ il termine in $\vec{j}$ della (148) risulta nullo.

Si supponga ora di modificare la direzione (non la grandezza) dello scorrimento plastico, sicchè esso assuma un'inclinazione λ su $\vec{i}$, essendo λ° compreso fra 0° e 60°. Secondo le leggi formulate, per tutte le particelle la cui inclinazione ϑ sia compresa fra $-\pi' + \lambda$ e π' le direzioni attive sono ancora quelle di prima. Per quelle per cui è $-\pi' < \vartheta < -\pi' + \lambda$ le nuove direzioni attive sono rotate di 60° rispetto alle precedenti; di altrettanto gira la tensione risultante. Perciò è

$$\vec{\tau}_r(\lambda) = \int_{-\pi'}^{-\pi'+\lambda} f[\vec{i} \cos (\vartheta + 2\pi') + \vec{j} \sin (\vartheta + 2\pi')] d\vartheta + \\ + \int_{-\pi'+\lambda}^{\pi'} f(\vec{i} \cos \vartheta + \vec{j} \sin \vartheta) d\vartheta . \tag{149}$$

Analoghe considerazioni si possono svolgere per valori di λ fuori dei limiti indicati: se si incrementa λ di $2n\pi'$ (n intero) si trova che il vettore $\vec{\tau}_r$ ruota dello stesso angolo, senza che ne vari il modulo. Così si ha

$$\vec{\tau}_r(n\pi') = (\vec{i} \cos n\pi' + \vec{j} \sin n\pi') \begin{cases} \tau_r(0) & \text{per } n \text{ pari} \\ \tau_r(\pi') & \text{per } n \text{ dispari} . \end{cases}$$

Il modulo τ_r risulta essere una funzione periodica di λ, con periodo $2\pi'$. In conclusione il diagramma vettoriale di $\vec{\tau}_r$ è una figura che presenta le stesse simmetrie di quella rappresentata nella fig. 4.

Per valutare lo scarto della linea anzidetta dal cerchio scriviamo in via di approssimazione

$$f = f_r + f'\gamma_r\delta \tag{150}$$

essendo f_r il valore di f per l'argomento γ_r ed essendo f' costante. Si trova così, con facile calcolo,

$$\tau_r(\pi') = \tau_r(0) + f'\gamma_r\left[(\sqrt{3} - 2)\int_0^{\pi'} \delta \cos\vartheta\, d\vartheta + \int_0^{\pi'} \delta \sin\vartheta\, d\vartheta\right]. \tag{151}$$

Nello stesso ordine di approssimazione della (150) si ha

$$\frac{d\tau_r}{d\gamma_r} = f'\int_{-\pi'}^{\pi'} (1 + \delta)\cos\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{152}$$

Se si ammette che la dipendenza di τ_r da γ_r sia rappresentabile con una legge del tipo

$$\tau_r = \tau_L + k\gamma_r^m$$

essendo m un esponente frazionario, dalle (151) e (152) si trova [37]

$$\tau_r(\pi') = \tau_r - 0{,}003m(\tau_r - \tau_L)\,.$$

Dunque la variazione del raggio è dell'ordine di qualche millesimo di una frazione del raggio stesso: la linea luogo degli estremi del vettore $\vec{\tau}_r$ è praticamente un cerchio. Questa linea costituisce in sostanza il luogo dei limiti elastici per il piano di slittamento considerato nel senso che, finchè l'estremo del vettore $\vec{\tau}_r$ non la oltrepassa non si ha incremento di slittamento plastico. È naturale ammettere che l'incremento di deformazione plastica avvenga nella direzione della $\vec{\tau}_r$ risultante; supposto poi, come fa Lin, che la deformazione plastica totale si ottenga sommando gli effetti analoghi determinati per tutte le giaciture di slittamento si perviene ad una formulazione analoga alla (133):

$$\delta\vec{\varepsilon}^p = \int \vec{\imath}_{lt}\delta\gamma_r d\Omega\,. \tag{153}$$

Qui la direzione l dipende come prima dai due parametri α e φ; invece la direzione t è quella della τ risultante, definita dalla (141).

---

[37] Il valore di τ_r a secondo membro è quello corrispondente a $\lambda = 0$.

Nello spazio delle tensioni principali il luogo degli estremi del vettore $\vec{\sigma}$ per i quali la tensione tangenziale risultante su una data giacitura assume un determinato valore, secondo la (139), è un cilindro a sezione ellittica avente per asse la trisettrice dell'ottante positivo. Sul consueto piano di proiezione assonometrica, per uno stato di tensione rappresentato da un punto P a ciascuna giacitura corrisponde una ellisse per P. Il luogo dei limiti elastici sarà l'inviluppo interno di quelle ellissi che, per ogni coppia di valori α, φ corrispondono al più alto dei valori di τ_r fra τ_L e la massima τ raggiunta, attualmente o precedentemente.

Fig. 20.

È stato considerato, ad esempio, il caso della sollecitazione uniassiale $\sigma_z = \sigma$ (fig. 20). Il luogo dei limiti elastici contiene due segmenti PB e PB' delle rette

$$\sigma_z - \sigma_x = \sigma, \quad \sigma_z - \sigma_y = \sigma$$

che costituiscono un caso degenere della (139) corrispondente a $\alpha = 0$ e $\alpha^0 = 90^0$. Si hanno poi archi dell'ellisse

$$(154) \qquad 4\tau_L^2 = (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 - 2(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_z - \sigma_y)\cos 2\varphi_1$$

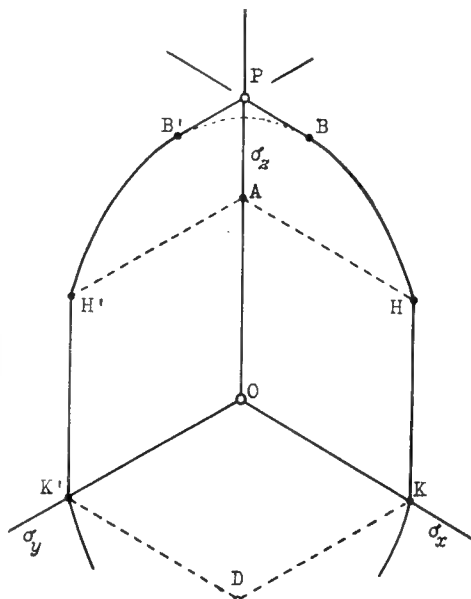
essendo φ_1 il valore determinato dalla relazione

$$\sigma \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = \tau_L$$

Fanno ancora parte del contorno i due lati HK, $H'K'$ dell'esagono di Tresca che anche qui costituisce il luogo limite per il primo manifestarsi delle deformazioni plastiche. Quei due lati, corrispondenti secondo la (139) a $\tau_r = \tau_L$, $\varphi = 0$, pur non passando per P, intervengono nell'inviluppo perchè si riferiscono a giaciture che nella condizione di carico considerata non hanno raggiunto il valore $\tau_r = \tau_L$.

Si noti che, per le ipotesi ammesse, una inversione nella direzione di $\vec{\tau}_r$ su un piano qualsiasi non deve modificare la deformazione plastica. Quindi la linea della fig. 20 prosegue simmetricamente rispetto all'origine nella parte inferiore della figura.

III. 4. - La teoria di Besseling. — La teoria di Batdorf e Budiansky si può interpretare come riferentesi ad un aggregato cristallino, se-

condo una trattazione approssimativa nella quale si supponga che tutte le particelle siano soggette al medesimo stato di tensione; si prescinderebbe con ciò dalle condizioni di congruenza per la deformazione dei vari cristalli. Anche la teoria del paragrafo precedente può interpretarsi in tal senso (38). Nella teoria di Besseling, invece, il materiale viene considerato come costituito da un aggregato di particelle tutte soggette alla medesima deformazione; si trascurano gli effetti delle discontinuità di tensione fra una particella e l'altra che derivano dall'eterogeneità di questi costituenti. Per la differente impostazione risulta qui conveniente ricavare l'incremento di tensione da quello della deformazione, rappresentata anche nello spazio dei versori $\vec{i}_{xx}, \ldots, \vec{i}_{zz}$. Sia $\vec{e}$ il vettore rappresentativo del deviatore di deformazione (39), ossia il componente del vettore $\vec{\varepsilon}$ contenuto nell'iperpiano $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$. Numerate per gruppi le particelle, sia per la *k.ma* $\vec{s}_k$ il deviatore di tensione e $\vec{\varepsilon}_k^p$ la deformazione plastica, supposta al solito priva di dilatazione di volume. La legge d'elasticità si scrive quindi

$$\vec{s}_k = 2G(\vec{e} - \vec{\varepsilon}_k^p) \; . \tag{155}$$

Per la deformazione plastica Besseling ammette la legge di incrudimento isotropo rappresentata dalla (111) che qui scriviamo

$$\delta\vec{\varepsilon}_k^p = \vec{s}_k f \; \vec{s}_k \cdot \delta\vec{s}_k \tag{156}$$

essendo f una funzione che dipende dal modulo di $\vec{s}_k$. Dalla relazione incrementale ricavata dalla (155)

$$\delta\vec{s}_k/2G + \delta\vec{\varepsilon}_k^p = \delta\vec{e}$$

moltiplicando ambo i membri per i corrispondenti della (155) e tenendo presente la (156) si trova

$$(1 + 2Gs_k^2 f)\vec{s}_k \cdot \delta\vec{s}_k = 4G^2(\vec{e} - \vec{\varepsilon}_k^p) \cdot \delta\vec{e} \; . \tag{157}$$

Sia ψ_k il rapporto in cui le particelle k entrano nella costituzione del materiale; sommando a tutti i valori di k, deve essere $\Sigma\psi_k = 1$. Per le tensioni risultanti si ha

$$\delta\vec{s} = \sum_k \psi_k \delta\vec{s}_k = 2G(\delta\vec{e} - \sum \psi_k \delta\vec{\varepsilon}_k^p)$$

---

(38) Però la trattazione di Lin, nell'esaminare la situazione per una singola giacitura di slittamento impone la medesima deformazione ai cristalli variamente orientati, lasciando da parte le condizioni di equilibrio. Questa incoerenza scompare nella formulazione (153) che può ritenersi fondata solo sull'uniforme ripartizione delle tensioni.

(39) In questa, come in tutte le teorie del gruppo non lineare, si considerano deformazioni « piccole ».

e quindi, tenendo conto delle (156) e (157)

$$\delta\vec{s}/2G = \delta\vec{e} - \sum_k \frac{8G3f\psi_k(\vec{e} - \vec{\varepsilon}_k^p)}{1 + 2Gs_k^2 f} (\vec{e} - \vec{\varepsilon}_k^p) \cdot \delta\vec{e} \,. \tag{158}$$

La sommatoria si estende a tutte le particelle che hanno superato i rispettivi limiti elastici.

L'interpretazione della (158) risulta particolarmente evidente, nel caso di carico isodirezionale, facendo uso della consueta assonometria dello spazio delle tensioni principali, che è anche quello delle deformazioni principali. Nello stato iniziale (isotropo) i limiti elastici dei singoli costituenti (supposti in numero di 4 nel caso della fig. 21) sono rappresentati da cerchi con il centro nell'origine. Quando il cammino di deformazione d (luogo degli estremi del vettore $\vec{e}$) incontra uno di questi cerchi ha inizio la deformazione plastica per la corrispondente porzione di materiale. La relativa linea limite si modifica restando sempre circolare, poichè la sua equazione, per la postulata legge di incrudimento isotropo, si scrive

$$|\vec{e} - \vec{\varepsilon}_k^p| = \text{costante}\,.$$

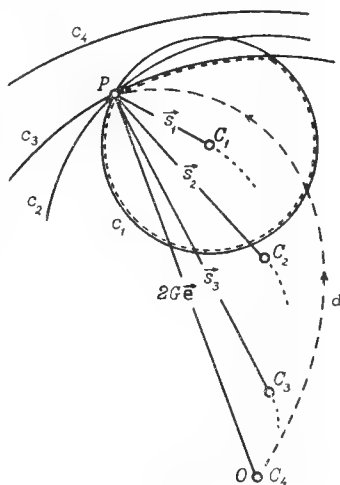



Fig. 21.

Il centro del cerchio è rappresentato dall'estremo del vettore $\vec{\varepsilon}_k^p$. Il raggio varia, nel caso normale di materiale incrudente, in funzione del cammino percorso dal centro, il quale in ogni istante si sposta secondo il raggio che va all'estremo del vettore $\vec{e}$. Nel caso della figura, uno dei quattro cerchi non è stato ancora raggiunto dal cammino piano di deformazione d mentre i centri degli altri tre si sono portati in C_1, C_2, C_3.

L'area interna ai vari cerchi è la regione elastica, nel senso che, se l'estremo del vettore $\vec{e}$ vi cade, la deformazione plastica non subisce variazione; in tal senso, la linea segnata in figura con tratti rappresenta il luogo dei limiti elastici (40).

Ovviamente, se il cammino d si svolge su una retta per l'origine, i vari centri si sposteranno sulla medesima; ossia sussisterà proporzionalità fra le componenti di $\vec{e}$ e quelle delle $\vec{\varepsilon}_k^p$; quindi anche il vettore $\vec{s}$ sarà disposto secondo la stessa direzione (carico proporzionale). Se dopo un tale cammino di carico, si produce un incremento di tensione, secondo la (156)

---

(40) Nella figura i vettori deformazione sono moltiplicati per $2G$.

l'incremento di deformazione plastica avverrà secondo la retta stessa. In tal caso le previsioni di questa teoria non differiscono da quelle espresse dalla (111). Solo per deviazioni considerevoli dal cammino di carico proporzionale si riscontrano sensibili divergenze fra le due teorie.

Per semplificare l'uso della (158) Besseling suppone che sia $/s_k^2$ costante. In tal caso si può scrivere

$$\delta\vec{\varepsilon}_k^p = \alpha_k \delta\vec{e}_k$$

essendo α_k una costante numerica ed essendo

$$\delta\vec{e}_k = (\vec{s}_k/s_k)\,(\vec{s}_k \cdot \delta\vec{e})/s_k\,.$$

Nel caso della fig. 21 il vettore $\delta\vec{e}_k$ è il componente di $\delta\vec{e}$ secondo la direzione PC_k.

Capitolo IV.

RASSEGNA SINTETICA DELLE TEORIE

IV. 1. - INTRODUZIONE. — Varie opere della letteratura di plasticità, presentando in sintesi più o meno ampie le diverse teorie hanno arrecato un notevole contributo al progresso in questo campo di studi. Si citano gli importanti lavori di Prager (Rif. 48*D*, Rif. 49*B*) e di Drucker (Rif. 49*C*, Rif. 49*F*, Bibl. 9, Rif. 51*B*), il trattato di Hill (Rif. 50*G*), un'interessante nota di Benthem, assai comprensiva (Rif. 51*F*) e un recente lavoro di Kljušnikov (Rif. 58*F*) che dà notizia, fra l'altro, di vari studi russi. In questo capitolo si presenta ancora una rassegna delle teorie di plasticità, estesa ad alcune ricerche più recenti, non completamente sviluppate nella letteratura. Alcune delle teorie di cui si tratta sono state più o meno ampiamente esposte nei due capitoli precedenti; altre saranno solo qui accennate. Qui, come nella parte precedente, si fa largo uso della rappresentazione vettoriale dei tensori, la quale per la sua sinteticità accoppiata alla evidenza geometrica appare atta a rivelare le connessioni fra i concetti fondamentali delle varie teorie.

In quella rappresentazione lo stato di tensione e la deformazione sono individuati da vettori $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ essendo assegnato a ciascuna componente σ_{hk}, ε_{hk} uno dei versori ortogonali $\vec{i}_{hk}$. Anche se effettivamente, per le simmetrie del tipo $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ i vettori occupano un luogo a 6 dimensioni, conviene valersi dello spazio a 9 dimensioni, perchè così le operazioni da effettuare acquistano quella uniformità che posseggono le operazioni vettoriali. Una rotazione dello stato di tensione e deformazione nel corpo si traduce in un moto rigido nello spazio vettoriale, nel quale i vettori rappresentativi mantengono invariate lunghezze ed angoli, moto che perciò si è detto

« rotazione ». Altra proprietà importante: la tensione τ secondo una direzione t sul piano normale ad una direzione l è la proiezione del vettore $\vec{\sigma}$ sul versore $\vec{i}_{lt}$ costruito coi coseni direttori delle due direzioni come indica la (128); la tensione normale si ottiene proiettando sul versore $\vec{i}_{ll}$. Corrispondentemente, il vettore $\vec{\varepsilon}$ della deformazione creata da uno scorrimento γ fra le due direzioni è dato da $\gamma\vec{i}_{lt}$. Ancora: il lavoro (per unità di volume) delle tensioni rappresentate da $\vec{\sigma}$ per una deformazione $d\vec{\varepsilon}$ è dato dal prodotto scalare come se $\vec{\sigma}$ fosse una forza, $d\vec{\varepsilon}$ lo spostamento del suo punto di applicazione. La scomposizione di uno stato di tensione nella componente idrostatica e nel deviatore si riduce alla scomposizione del vettore $\vec{\sigma}$ in un componente secondo $\vec{i}_t$ ed uno perpendicolare $\vec{s}$. L'esplicita valutazione dei risultati di queste operazioni è ricondotto alle usuali espressioni del calcolo vettoriale; talvolta le operazioni sono riducibili ad un piano ed allora possono essere condotte graficamente. Particolarmente utile a questo riguardo è l'assonometria nel piano dei deviatori, usata nelle figure 3, 4, 5, 11, 12, 16, 20 ed altre del seguito.

Nello stesso spazio dei vettori $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ acquistano evidenza le proprietà relative alla regione elastica la quale accompagna l'estremo del vettore $\vec{\sigma}$ (punto di carico); il luogo che delimita questa regione, aderisce al punto di carico e, seguendone i movimenti, resta variamente modificato.

Di queste rappresentazioni si fa largo uso nell'esposizione che segue.

IV. 2. - TEORIE OLONOME. — Diciamo *olonome* [41] le teorie di plasticità che postulano relazioni in termini finiti fra i valori attuali delle componenti di deformazione e delle componenti di tensione; esse quindi stabiliscono una corrispondenza, sotto certe condizioni biunivoca, fra l'estremo del vettore $\vec{\sigma}$ e quello del vettore $\vec{\varepsilon}$ che rappresenta le « piccole » deformazioni. Nella forma più generale questa corrispondenza può assumersi come rappresentata mediante la (119) che rigorosamente vale quando lo stato finale sia raggiunto attraverso un cammino di carico proporzionale. Sostanzialmente questa espressione è dovuta a Prager (Rif. 45*A*). Ridotta alla forma

$$\vec{\varepsilon} = P_1\vec{s} + \frac{3\sigma}{K}\vec{i}_t \tag{160}$$

essendo P_1 funzione solo di J_s essa esprime la teoria di Hencky-Nadai.

Le teorie olonome, che pure hanno avuto larga applicazione nella forma (160) ed hanno condotto a risultati più prossimi al vero che ogni altra

[41] La denominazione « deformation theoriés » usata generalmente dagli Autori di lingua inglese e la corrispondente adoperata dai russi sono assai imprecise; il termine deriva dalle opere di Iliušin.

teoria nei problemi di stabilità, in base alle acute critiche di Drucker e Prager (Rif. 48*C*, 49*D*) sono risultate, in linea di massima, inaccettabili. Una fondamentale obiezione che ad esse può muoversi riguarda certe discontinuità che esse indicano nel comportamento del materiale. Sia P il punto di carico a cui corrisponde il luogo p avente, nel piano della fig. 22, per sezione la linea l. Se da P l'estremo di $\vec{\sigma}$ si porta in P', in campo plastico, la variazione di $\vec{\varepsilon}$ sarà retta dalla (160); se da P si va in P'', in campo elastico, la variazione di $\vec{\varepsilon}$ sarà retta dalle relazioni di elasticità. Si avrebbero quindi due cammini, che possono scegliersi vicini finchè si vuole, i quali provocherebbero deformazioni nettamente diverse; ciò non è plausibile.

Fig. 22.

IV. 3. - Le teorie incrementali lineari. – Le teorie che formulano relazioni fra l'incremento di deformazione $d\vec{\varepsilon}$ e l'incremento di tensione $d\vec{\sigma}$ le quali non possono, per integrazione, essere trasformate in relazioni generali fra $\vec{\sigma}$ e $\vec{\varepsilon}$, sono dette *incrementali* (42); per contrapposto a quelle del paragrafo precedente si potrebbe denominarle *anolonome*. Di queste alcune ammettono l'ipotesi di linearità, che può formularsi come è indicato nel § III.0 a proposito della fig. 13*a* e che postula la sovrapponibilità degli effetti di incrementi di tensione che danno luogo a deformazioni plastiche. Si aggiunge l'ipotesi che nel punto di carico il luogo p abbia una normale unica n (come è in ogni punto di un cono, fuori che nel vertice). Da questa e dalla condizione di stabilità della deformazione plastica, senza invocare la menzionata linearità, si prova (Drucker Rif. 50*B*, 51*B*) che la direzione dell'incremento di deformazione plastica $d\vec{\varepsilon}^p$ ha la direzione di n; resta da precisarne il modulo, che per la linearità è proporzionale alla proiezione su n dell'incremento di tensione, secondo un fattore che non dipende dall'incremento stesso.

Fra le teorie incrementali lineari la categoria più semplice è costituita dalle teorie dette *isotrope*. La proprietà che queste postulano si può esprimere come segue: ammessa l'isotropia inizale del corpo, in un riferimento solidale alle direzioni delle tensioni principali, le relazioni fra incrementi di tensione e deformazione non dipendono dall'orientazione di questi assi di riferimento. Di conseguenza, nell'equazione del luogo p in qualunque stato di deformazione le tensioni entrano attraverso gli invarianti I_σ, J_s, K_s; quel luogo è dunque di « rotazione », nel senso che se P è un suo punto,

(42) La denominazione più spesso usata dagli Autori di lingua inglese è quella di « incremental theories ». Molti però usano il termine di « flow theories »; questa denominazione è derivata dai lavori di Iliušin ed è seguita generalmente dagli Autori russi.

lo sono anche i punti rappresentativi di stati di tensione variamente orientati ma aventi tutti le stesse tensioni principali. Secondo le ipotesi ordinariamente ammesse nelle teorie isotrope, il luogo p durante la deformazione subisce solo espansioni omotetiche rispetto all'origine; si ammette cioè un simultaneo incrudimento proporzionale su tutte le direzioni, elevandosi nello stesso rapporto i relativi limiti elastici.

In base alle ipotesi dell'incrudimento isotropo risulta che le direzioni principali dell'incremento di deformazione plastica coincidono con quelle delle tensioni principali. Le espressioni più generali di questo incremento nell'ambito delle teorie isotrope sono state date da Prager in forma pressochè equivalente alla (99). Handelman, Lin e Prager (Rif. 47*A*) diedero anche le espressioni con le quali si possono ricavare dalle prove di carico proporzionale i dati necessari all'uso della (99). Qui le medesime relazioni vengono presentate in forma differente, egualmente generale. Al confronto, le espressioni di Prager hanno un notevole vantaggio: esse si riferiscono ad assi cartesiani generici e non richiedono quindi la determinazione delle direzioni principali. D'altra parte le espressioni (102) qui scritte stabiliscono una più immediata relazione coi dati delle esperienze di controllo. Dei due coefficienti che vi compaiono, uno (β) individua la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ (essendo $\sqrt{3}\,\beta$ la tangente dell'angolo che questo vettore fa con $\vec{s}$); l'altro (Φ) ne determina il modulo o meglio, il rapporto $de_p/d\sigma_n$. Anche il coefficiente β delle relazioni di Handelman, Lin e Prager vale a definire la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$; però la sua espressione risulta indeterminata nel caso di sforzo uniassale o sforzo tagliante puro [43]; conseguentemente nel calcolo di questo coefficiente in base ai dati sperimentali risultano esaltate le imprecisioni relative, per quanto esse abbiano scarsa influenza sui risultati.

L'applicazione risulta notevolmente semplificata quando si supponga che l'invariante K_s non intervenga nell'equazione del luogo p o, in altri termini, che queste superfici, nello spazio delle tensioni principali, assumano la forma di cilindri circolari, coassiali per la teoria isotropa. In questo caso $d\vec{\varepsilon}^p$ risulta parallelo a $\vec{s}$. Le espressioni dell'incremento di deformazione plastica contengono allora un solo coefficiente da determinare con prove dirette sul materiale: il rapporto de_p/ds (essendo qui $d\sigma_n = ds$). In linea generale questo rapporto può dipendere dagli invarianti J_s, K_s, o meglio, dalle variabili s, μ, più direttamente in relazione con la posizione del punto rappresentativo nel piano dei deviatori (figure 3, 5). In una prova

[43] Ciò è dovuto al fatto che per $\mu = \pm 1$, come per $\mu = 0$, i vettori $\vec{s}$ e $\vec{q}$ secondo i quali, nella formulazione di Prager, viene scomposto l'incremento di deformazione plastica, diventano paralleli; la scomposizione non è impossibile, perchè anche $d\vec{\varepsilon}^p$ tende verso la direzione comune degli altri due vettori, ma è indeterminata. Perciò i grafici delle figure 2*a*, 2*b* della nota Rif. 47*A* mostrano forti scarti fra i dati sperimentali.

a carico proporzionale ($\mu =$ costante) si può ricavare la relazione fra e_p e s e quindi si può avere (§ II. 7) la dipendenza di de_p/ds da s per un dato μ.

Vari studiosi hanno cercato di stabilire con giustificato fondamento una correlazione fra una variabile legata allo stato di tensione (effective stress) ed una rappresentativa dello stato di deformazione (effective strain). Per le tensioni frequentemente è usata la tensione ottaedrica

$$\tau_{ot} = \sqrt{2J_s/3} = s/\sqrt{3} \ . \qquad (161)$$

Talvolta invece è usata la stessa funzione (loading function) $f(J_s, K_s)$ che dà la forma del luogo p, o una quantità biunivocamente collegata a f (44). Da questa *tensione ideale* o *efficace* σ_{eff} viene definita generalmente la *deformazione efficace* con la posizione

$$d\varepsilon_{eff} = dW^p/\sigma_{eff} \qquad (162)$$

essendo dW^p il lavoro plastico elementare $\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p$. Un'altra definizione plausibile di deformazione efficace è quella di Cunningham, Thomsen e Dorn (Rif. 47*C*), che, a meno di fattori secondari, coincide con la variabile e_p.

La correlazione cercata

$$\sigma_{eff} = F(\varepsilon_{eff}) \qquad (163)$$

deve rappresentare la così detta legge d'incrudimento (strain hardening) propria del materiale. Si osserva che le scelte vanno comunque basate su congetture e spetta all'esperimento decidere sulla loro accettabilità. Una importante analisi del problema è svolta da White e Drucker (Rif. 50*A*), con ampi riferimenti bibliografici; più recentemente la questione è stata discussa da Bland (Rif. 57*A*).

La teoria isotropa semplice detta da taluno teoria di Prandtl-Reuss-Laning, che oltre ad ammettere il parallelismo di $d\vec{\varepsilon}^p$ e $\vec{s}$ (con che la tensione efficace è la τ ottaedrica e inoltre la deformazione efficace definita dalla (162) coincide con e_p), accoglie la (163) in quanto ammette che de_p/ds non dipenda da K_s e quindi pone $e_p = F(s)$. Questa è la teoria generalmente adottata nelle applicazioni, come anche per il confronto coi dati sperimentali (Cunningham Rif. 47*C*, Davis e Parker 48*D*, Phillips 52*B*, Marin e Hu 52*A*).

Un modello meccanico elementare permette di dare una rappresentazione illustrativa del comportamento del corpo plastico nella schematizzazione indicata dalle teorie incrementali semplici, isotropa e anisotropa.

(44) Se la deformazione plastica non interviene in f, il prodotto $\vec{n} \cdot d\vec{\sigma}$ rappresenta il differenziale totale df, come si vede dalle definizioni (40) e (87); è questo differenziale che nell'usuale formulazione viene posto in relazione col modulo di $d\vec{\varepsilon}^p$ (Prager, Rif. 48*D*).

Si consideri un corpo pesante che può slittare con attrito asciutto su un piano orizzontale. Il piano sia quello della fig. 23; il corpo si considera concentrato in Q. Supponiamo che il coefficiente d'attrito sia funzione crescente dalla lunghezza del cammino percorso dal punto Q. Indichiamo con $\vec{s}$ la forza orizzontale applicata in Q (fig. 23*a*); il suo modulo s sia uguale alla forza d'attrito c nella posizione attuale e perciò il corpo sia fermo. Se si modifica $\vec{s}$, per qualunque posizione dell'estremo del vettore che non sia esterna al cerchio di centro Q e raggio c, il corpo resta immobile. Se si applica invece un incremento $d\vec{s}$ volto verso l'esterno del cerchio, detto $\vec{u}$

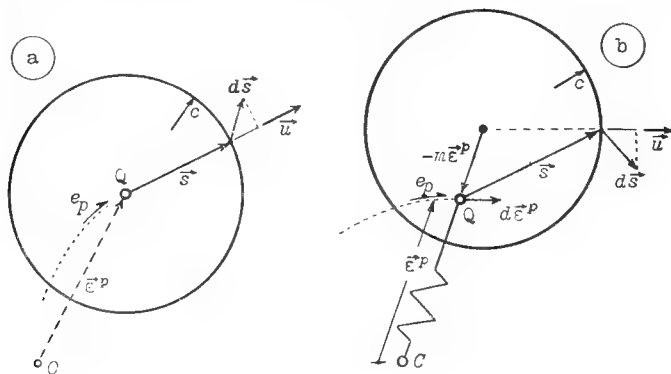



Fig. 23.

il versore nella direzione della forza d'attrito, dall'equazione di equilibrio $\vec{s} = c\vec{u}$ in assenza di forze d'inerzia, differenziando e prendendo il componente secondo $\vec{u}$, si ha

$$\frac{\vec{s}}{s}\, ds = \vec{u}dc\,. \tag{164}$$

Se si indica con $\vec{\varepsilon}^p$ la coordinata vettoriale di Q e con e_p lo sviluppo dell'arco percorso, tenendo presente che è $\vec{u} = d\vec{\varepsilon}^p/de_p$ si ottiene una relazione coincidente con la (111), il fattore scalare a primo membro essendo sostituito da dc/de_p. Il corpo si sposta dunque *nella direzione di* $\vec{s}$, *non in quella di* $d\vec{s}$ e subisce uno spostamento proporzionale alla proiezione di $d\vec{s}$ sul raggio. Sussiste quindi perfetta analogia fra i due fenomeni.

Supponiamo ora che la forza d'attrito c sia costante e che il corpo (fig. 23*b*) sia vincolato al punto fisso C mediante una molla di costante elastica m. Si ha quindi l'equazione di equilibrio

$$\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p = c\vec{u} \tag{165}$$

essendo anche qui il versore $\vec{u}$ parallelo a $d\vec{\varepsilon}^p$. Quadrando si trova la (113) e differenziando si ha

$$(\vec{s} - m\vec{\varepsilon}^p) \cdot d\vec{s} = mcde^p\,. \tag{166}$$

Moltiplicando membro a membro le (165) e (166) si trova la (114). Gli spostamenti di Q seguono dunque la stessa legge che la teoria anisotropa semplice espressa dalle (113) e (114) dà per le deformazioni plastiche. Il luogo dove l'estremo del vettore rappresentativo della forza $\vec{s}$ applicata in Q può muoversi senza spostare il corpo è costituito da un cerchio di raggio c e centro spostato di $m\vec{\varepsilon}^{p}$ rispetto ad Q. Per una variazione $d\vec{s}$ della forza applicata, volta verso l'estremo del cerchio, si produce lo spostamento $d\vec{\varepsilon}^{p}$ diretto secondo il raggio e proporzionale alla proiezione di $d\vec{s}$ sul raggio stesso.

Le teorie incrementali anisotrope, delle quali quella rappresentata dal modello della fig. 23*b* costituisce l'esempio più semplice, fanno intervenire nell'equazione del luogo p il vettore della deformazione plastica. Siccome questa è legata alla particella deformata, cessano le proprietà di isotropia presentate dalle teorie del gruppo precedente. Queste teorie possono formularsi con differenti posizioni e, in contropartita della loro maggiore complessità, sono in grado di rappresentare il comportamento del materiale più fedelmente che le isotrope. Il loro significato fisico è in certa misura rispecchiato dal modello della fig. 23*b*: nell'aggregato di particelle eterogenee di cui in genere il materiale è costituito, la deformazione plastica lascia un'impronta che deve essere più o meno marcatamente direzionale. Certi costituenti, per la loro differente natura o disposizione, entrano in deformazione plastica prima che altri; la tensione $\vec{\sigma}$ si compone quindi di due o più addendi differenti; il termine $m\vec{\varepsilon}^{p}$ rappresenta, nella schematizzazione indicata, il contributo delle parti non plasticizzate ma costrette a seguire le deformazione $\vec{\varepsilon}^{p}$. Togliendo i carichi applicati permane uno stato di « microcoazione » direzionale, indicato nello schema della fig. 23*b* dalla reazione del collegamento elastico fra C e Q, la quale permane anche in assenza della forza s.

Fu sviluppato da Prager (Rif. 35*A*, 49*B*, 56*C*) il concetto dell'anisotropia rappresentata mediante una traslazione del luogo p nella direzione della deformazione plastica; analiticamente ciò è dato dalla sostituzione di $\vec{\sigma} - m\vec{\varepsilon}^{p}$ nelle equazioni al posto di $\vec{\sigma}$. La più nota fra le teorie basate su questo concetto è quella che s'è detta anisotropa semplice. Con m variabile essa è considerata da Kadaševič e Novožilov (Rif. 58*E*) i quali mostrano come la teoria anisotropa spieghi certi risultati sperimentali che sono in disaccordo con teorie isotrope; gli AA. menzionano uno studio di Išlinskii (Bibl. 12) dove è trattato il caso $m =$ costante. Questa ultima posizione è anche adottata da Berio (Rif. 56*F*). Shield e Ziegler (Rif. 58*A*) osservano che, traslandosi la superficie limite nello spazio delle $\vec{\sigma}$, l'intersezione in certi sottospazi si modifica durante la deformazione plastica. Quindi, per facilitare lo studio di quei problemi che si riferiscono a tali sottospazi, Ziegler (Rif. 59*B*) propone che la traslazione si effettui nella direzione di

un vettore $\vec{\alpha}$, definito separatamente dalla $\vec{\varepsilon}^p$ da una relazione differenziale $d\vec{\alpha} = (\vec{\sigma} - \vec{\alpha})d\mu$ essendo $d\mu$ un fattore deducibile dall'equazione della superficie limite. Questa formulazione che nelle applicazioni più importanti non differisce dalla usuale, difetta di significato fisico.

Varie formulazioni, con o senza isotropia, di teorie incrementali lineari sono discusse in una nota di Edelman e Drucker (Rif. 51*E*). Una discussione generale sulle teorie incrementali lineari è svolta da Drucker nel Rif. 49*F*.

Trifan (Rif. 49*E*) propose una teoria incrementale isotropa la quale nel termine relativo alla deformazione plastica contiene le ε al posto dove le teorie precedenti portano le σ. La teoria fu criticata da Drucker (Rif. 49*F*) e da Benthem (Rif. 51*F*) perchè l'ipotesi d'isotropia nel campo delle deformazioni totali porta a conclusioni assurde: il campo elastico assumerebbe un'estensione fisicamente impossibile. L'assurdo scompare se si sposta il luogo p (nello spazio dei vettori $\vec{\varepsilon}$) come nelle teorie anisotrope si fa nello spazio di $\vec{\sigma}$.

IV. 3. - Le teorie incrementali non lineari. — Il tipo di nonlinearità che si presenta nelle teorie di questo gruppo è stato indicato in via schematica nelle considerazioni relative alla fig. 13*b*; lo si esaminerà qui in condizioni più generali. Sia P (fig. 24) il punto di carico e sia indicato con 1 l'angolo corrispondente alla regione elastica; quindi t_1 e t_2 siano le tangenti in P all'intersezione del piano della figura con l'inviluppo di superfici che contorna la regione elastica. Negli angoli 2 e 4 cadono le tangenti alle intersezioni dei luoghi p parziali che sono stati attivi nell'ultima fase del processo di carico (cioè che sono stati spostati dall'avanzare di P e quindi hanno contribuito a incrementare la deformazione plastica). Se l'incremento di tensione $d\vec{\sigma}$ cade nel settore 3, esso dà proiezione positiva sulle normali a tutti i luoghi p attivi, anche se non contenute nel piano. Perciò in questo settore (come ovviamente nel settore 1) sussiste la linearità, nel senso che è lecito sovrapporre gli effetti di incrementi di tensione la cui direzione vi sia contenuta. I settori 2 e 4, secondo le teorie dei §§ III. 2 e III. 3, sono coperti da una distribuzione continua di intersezioni. Essi costituiscono una zona di transizione fra la regione elastica 1 e la regione 3 che possiamo dire totalmente plastica. Se si fa variare la direzione di $d\vec{\sigma}$ sì che il suo estremo passi dall'una all'altra di queste regioni, varierà, generalmente con continuità, direzione e grandezza di $d\vec{\varepsilon}^p$, secondo una legge che non ammette la sovrapposizione degli effetti. In altri termini,

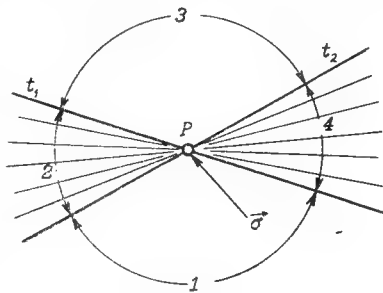



Fig. 24.

se si pone una relazione del tipo $d\varepsilon_{hk}^{p} = \vec{C}_{hk} \cdot d\vec{\sigma}$ fra incrementi di tensione e di deformazione plastica si dovrà tener conto che i coefficienti $\vec{C}$ dipendono dai rapporti fra gli incrementi stessi, ossia dalla direzione di $d\vec{\sigma}$. In un caso particolare la dipendenza di certi coefficienti dalla direzione di $d\vec{\sigma}$ è stata calcolata (Rif. 50*E*) ed è riportata nella fig. 18.

Nella teoria di Batdorf e Budiansky (Rif. 49*G*, 54*A*) i luoghi p sono iperpiani: ciascuno di questi rappresenta il luogo dei punti estremi del vettore $\vec{\sigma}$ per i quali la tensione tangenziale su una determinata giacitura e su una determinata direzione raggiunge un certo valore τ, misurato dalla distanza del piano dall'origine. La perpendicolare a quell'iperpiano dà la direzione del vettore rappresentativo della deformazione creata da uno scorrimento in quella giacitura e in quella direzione a cui la τ si riferisce. Se il punto di carico si sposta e spinge avanti quell'iperpiano allontanandolo dall'origine dei vettori $\vec{\sigma}$, si ha un aumento di scorrimento plastico (slittamento) per quella direzione. Secondo questa teoria, per ciascun sistema di slittamento lo scorrimento è funzione solo del relativo valore di τ. La media di questi slittamenti rappresenta la deformazione plastica totale.

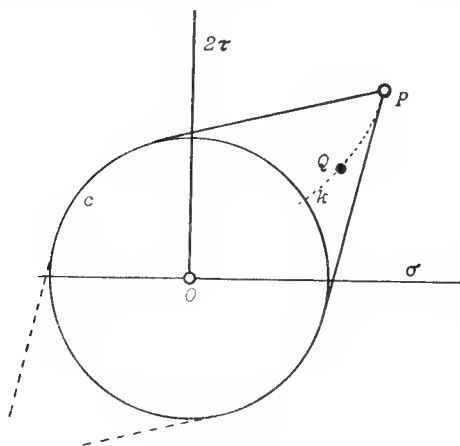



Fig. 25.

Per questa teoria il luogo iniziale dei limiti elastici nello spazio delle tensioni principali è il prisma esagonale di Tresca. Nel piano dei deviatori la regione elastica nel caso di carico isodirezionale è rappresentata dal poligono convesso di area minima che contiene il cammino di carico e l'esagono di Tresca (fig. 16). Nel caso in cui siano diverse da zero solo le tensioni σ_z e τ_{xz} la linea p è formata come mostra la fig. 25. Tutti i cammini di carico che, come quelli delle figure 16 e 25 toccano il luogo p solo nel punto di carico, danno luogo ad una deformazione finale che non dipende dalla forma del cammino ma solo dalla posizione del punto terminale (45).

(45) Infatti per nessuna delle direzioni di slittamento attive nell'istante attuale può essersi superato il presente valore di τ nelle precedenti fasi di carico. Supponiamo infatti che ciò fosse avvenuto per un punto Q del cammino di carico; condotto un piano per P, Q e l'origine O e tracciatavi l'intersezione con l'iperpiano relativo alla τ in questione, Q dovrebbe risultare rispetto a questa retta dalla parte opposta dell'origine, il che è impossibile.

Nella fig. 25 c è il cerchio di equazione $\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4\tau_L^2$, k è un cammino di carico piano. Il luogo p è individuato come s'è detto a proposito della fig. 16.

Quindi torna a presentarsi qui una corrispondenza in termini finiti fra $\vec{\varepsilon}$ e $\vec{\sigma}$ come nelle teorie olonome: la stessa corrispondenza che vale per il cammino di carico proporzionale che porta ad un punto P vale per tutti i percorsi che restano interni al luogo p creatosi nel primo caso. Per gli incrementi di tensione che, invertiti, porterebbero alla regione elastica, i coefficienti delle relazioni incrementali fra tensione e deformazione hanno gli stessi valori che si ottengono per differenziazione dei valori «locali» costruibili, ad esempio, con un carico proporzionale. Nella nota Rif. 50*E* sono state ricavate le relazioni di tal tipo per le variazioni di tensione partenti da uno stato uniassico; esse sono rappresentate dalle (142)-(144); i loro coefficienti sono tutti deducibili dalla prova di trazione semplice, dalla quale si può anche ricavare mediante l'equazione integrale (145) la funzione F che rappresenta la legge di slittamento in dipendenza di τ.

A chiarire sotto l'aspetto qui esposto i rapporti fra le teorie incrementali lineari e quelle dello slittamento plastico contribuirono principalmente due importanti lavori: una nota di Koiter (Rif. 53*A*) nella quale la deformazione plastica è presentata analiticamente come somma di incrementi, ciascuno calcolabile secondo le leggi della teoria lineare, e una lucida nota di Sanders (Rif. 54*B*) nella quale è esaminata la deformazione plastica in presenza di luoghi p rappresentati da espressioni lineari nelle tensioni. In una trattazione puramente matematica (Rif. 56*E*) Warner e Handelman esprimono $d\vec{\varepsilon}^p$ mediante una somma di termini, come è fatto da Koiter; il numero di questi (sei) è stabilito in modo da rendere le espressioni della deformazione plastica invertibili, ossia tali che sia possibile calcolare l'incremento di tensione quando sia assegnato $d\vec{\varepsilon}^p$. Invece Kljušnikov (Rif. 59*C*), nell'esame del problema bidimensionale di un cammino di carico piano (in particolare, dove siano solo σ_z e $\tau_{xz} \neq 0$) attribuisce importanza determinante nella relazione incrementale sforzi-deformazioni alla porzione dell'inviluppo prossima al punto di carico; egli ammette che, se l'incremento $d\vec{\sigma}$ è diretto secondo la bisettrice dell'angolo formato dai due segmenti per il punto di carico i quali qui formano il contorno della regione elastica, allora l'incremento $d\vec{\varepsilon}^p$ è dato da

$$d\vec{\varepsilon}^p = F(\gamma) d\vec{\sigma}$$

dove γ è l'angolo racchiuso da quei due segmenti, F una funzione caratteristica del materiale, per la quale viene adottata l'espressione

$$F = (\gamma + \sin\gamma) \cdot \text{costante}$$

Da queste posizioni viene dedotta l'espressione di $d\vec{\varepsilon}^p$ in funzione di $d\vec{\sigma}$, nella quale figurano gli angoli che fanno con $\vec{\sigma}$ le direzioni di $d\vec{\sigma}$ e dei due segmenti per il punto angoloso P delimitanti la regione elastica. Kljušnikov

opina che questa relazione, la quale nel caso considerato (tutte le componenti di tensione ad eccezione di una σ e una τ uguali a zero) dà risultati in buon accordo con quelli della teoria di Batdorf e Budiansky, possa avere validità più generale. In una successiva nota (Rif. 59*D*) Kljušnikov trova concordanza fra le due teorie anche nel caso ideale del corpo a due dimensioni.

Affine a quella di Batdorf e Budiansky è anche la teoria qui esposta nel § III. 3; in questa la deformazione plastica è ottenuta sommando gli scorrimenti che si possono produrre sulle varie giaciture quando la τ *risultante* vi supera il valore τ_L. Qui dunque, su ciascuna giacitura, non si hanno slittamenti indipendenti sulle infinite direzioni ma si ha uno slittamento unico nella direzione della τ risultante, legato a questo valore di τ [46]. La teoria costituisce una variante semplificata di quella di Lin (Rif. 54*D*) che per ciascuna giacitura metteva in relazione tensioni e scorrimenti plastici in base ad una schematizzazione di aggregato cristallino. Ad un esame numerico risulta che lo scarto fra i risultati è assai esiguo; quindi conviene seguire la semplificazione proposta. Il luogo dei limiti elastici per le τ su ogni giacitura risulta essere un cerchio che aumenta di raggio a misura che la deformazione procede; nel piano si ha dunque completa isotropia, l'anisotropia negli effetti globali dipendendo dall'indipendenza d'azione dei piani di slittamento. Invece nella teoria di Batdorf e Budiansky su ogni piano di slittamento si ha l'anisotropia denunciata dal fatto che la linea dei limiti elastici (fig. 15*b*) si appuntisce nell'angolo HTK; inoltre l'effetto Bauschinger, che sfugge alla teoria di Lin, vi può essere tenuto in conto supponendo che per ciascuna direzione l'incrudimento avvenga indipendentemente per le τ nei due sensi. In una successiva nota (Rif. 58*G*) Lin introdusse, in via di schematica approssimazione, un incrudimento dei sistemi di slittamento inattivi in connessione con quello delle direzioni attive; ciò tende a diminuire l'anisotropia dello schema di aggregato che la teoria presenta.

Mentre nelle teorie sopra menzionate si ha un unico stato di tensione a cui si fanno corrispondere varie deformazioni elementari da sommare successivamente nella deformazione totale, nella teoria di Besseling (Rif. 53*D*, 58*B*) il corpo è trattato come un aggregato di particelle soggette alla medesima deformazione, che reagiscono con sforzi differenti e dalla media di questi si ricava lo stato generale di tensione. Ciascuna particella obbedisce alle leggi di deformazione della teoria isotropa semplice; le particelle sono distinte in un certo numero di gruppi, ciascuno caratterizzato da un differente limite elastico; l'aggregato, quando si superi il limite elastico di un gruppo almeno di particelle, rivela l'anisotropia derivante

---

(46) Kljušnikov menziona un lavoro russo su questo indirizzo (Bibl. 11).

dallo stato di microcoazione [47]. È interessante stabilire un raffronto fra questa teoria e la anisotropa semplice. Si supponga che per unità di volume una porzione ψ abbia comportamento di plasticità ideale mentre la parte restante $1 - \psi$ si comporta elasticamente. La deformazione plastica è calcolata mediante la sommatoria che compare nella (158) e che qui si riduce ad un solo addendo nel quale si deve porre $1/f = 0$. Si trova così un'espressione coincidente con la (114) quando si scriva

$$m = 2G(1 - \psi)/\psi \,. \tag{167}$$

La non-linearità delle relazioni fra incrementi di tensione e deformazione secondo la teoria di Besseling si manifesta solo dopo un cammino di carico fortemente curvo, ossia in condizioni molto lontane dal carico proporzionale. Invece se si resta in un settore limitato dello spazio dei vettori $\vec{\sigma}$ si ottiene da questa teoria una relazione incrementale che praticamente non differisce da quella fornita dalla teoria isotropa semplice. In particolare, dopo un carico proporzionale, le due teorie concordano perfettamente.

IV. 4. - Le teorie dell'aggregato cristallino. — Le teorie incrementali non lineari, fatta eccezione per qualcuna di quelle a base astrattamente matematica, si possono interpretare come schematiche formulazione del comportamento di un materiale eterogeneo. Ad esempio, la teoria di Batdorf e Budiansky si può pensare che si riferisca ad un aggregato di cristalli piccolissimi, orientati a caso, aventi ciascuno una sola direzione di slittamento, amalgamati da un cemento ideale capace di trasmettere ad ogni cristallo lo stesso stato di tensione risentendo solo della deformazione media. Le analisi più aderenti alla realtà si allacciano ad un fondamentale studio di G. I. Taylor (Rif. 38*A*). In base a dati sperimentali, il singolo cristallo vi è supposto dotato delle seguenti proprietà: nel reticolo cubico le giaciture normali alle quattro rette che uniscono a due a due i vertici diagonalmente opposti contengono ciascuna tre direzioni di slittamento a 120° fra loro; sulle direzioni in fase di deformazione plastica, dette perciò *attive*, si ha la medesima τ, legata alla somma degli scorrimenti plastici secondo le direzioni di slittamento da una legge propria del materiale. Vengono trascurate le deformazioni elastiche; quindi i vari cristalli sono soggetti alla medesima deformazione plastica e si determina la media dei tensori di sforzi relativi ai vari elementi cristallini orientati nelle varie posizioni. Per ciascun cristallo si hanno dunque 12 possibili

[47] L'idea di considerare il materiale con incrudimento come un aggregato di particelle dotate di differenti limiti elastici è già presentata da Colonnetti nella nota Rif. 49*I*.

sistemi di slittamento, mentre a rappresentare la più generale deformazione a volume costante ne bastano 5. Si tratta quindi anzitutto di individuare, per ciascuna delle ∞^3 posizioni degli assi del cristallo rispetto a quelle principali della deformazione, quali sono i sistemi attivi di slittamento. A tale scopo Taylor pose il principio che i sistemi attivi sono quelli per cui, a pari deformazione risultante la somma degli scorrimenti relativi è minima. La ricerca venne approfondita e perfezionata da Bishop e Hill (Rif. 51*A*). I casi esaminati si riferiscono a condizioni di carico proporzionale; dai confronti con l'esperienza risulta un buon accordo con il comportamento dell'aggregato previsto in base alle proprietà del cristallo singolo.

Difficoltà assai gravi si incontrano secondo questo indirizzo quando si voglia tener conto anche delle deformazioni elastiche. Una impostazione del problema, in forma estremamente concisa, è stata data da Hershey (Rif. 54*C*) che svolse due applicazioni a casi semplici di carico proporzionale; anche T.H. Lin affrontò la questione (Rif. 57*C*). Le difficoltà si aggravano ancora per cammini di carico generici: risultati concreti in questo indirizzo non sono stati tuttora ottenuti.

Capitolo V.

I CONTROLLI SPERIMENTALI

V. 1. - Introduzione. — È compito dell'esperienza decidere se le conclusioni fornite dalla teoria più semplice possano ritenersi sufficientemente aderenti alla realtà o se invece si debba affrontare la trattazione più complessa per tener conto di fattori che la prima teoria trascura. La questione della scelta fra le varie classi di teorie plastiche viene qui frazionata in un certo numero di quesiti e per ciascuno di essi si presentano i dati sperimentali reperibili nella letteratura. Ovviamente non è da attendersi una decisione netta pro o contro la schematizzazione in questione caso per caso; l'esperimento dovrà piuttosto definire i limiti entro i quali l'adozione di una teoria sia lecita. Purtroppo però i dati sperimentali non sono ancora sufficienti perchè si possano formulare conclusioni precise.

V. 2. - La deformazione plastica avviene a volume costante? — È ipotesi ammessa dalla quasi totalità delle trattazioni teoriche sulla plasticità che la deformazione plastica lasci inalterato il volume; quindi la dilatazione cubica viene legata alla tensione media σ dalla stessa relazione di proporzionalità che vale in campo elastico. Questa ipotesi è sostenuta dalla concezione della deformazione plastica come risultante di slittamenti fra piani paralleli del reticolo cristallino. Però le ricerche sperimentali non sono concordi nel convalidare questa posizione.

Marin e Hu (Rif. 53*B*) trovano variazioni relative di volume di circa 1/100 per una provetta in lega d'alluminio sottoposta ad allungamenti prossimi a 2/100. Questo risultato, che suggerirebbe l'abbandono dell'usuale semplificazione, è stato messo in dubbio da Batdorf (Ved. discussione, di seguito alla nota citata) il quale rilevò che la tecnica usata non era la più adatta per una precisa misurazione. Di fatti nella prova menzionata la variazione di volume venne misurata sul provino scaricato nello sforzo assiale, determinando direttamente le dilatazioni su tre direzioni ortogonali, delatazioni che presentano variazioni accidentali assai marcate da un punto all'altro del provino. Bridgman afferma al riguardo che è estremamente difficile giungere a risultati conclusivi per altra via che non sia quella della misura globale della variazione di volume o di densità. Questo Autore, ben noto per le importanti ricerche in questo campo, realizzò un'apparecchiatura che permette la determinazione del volume di un provino cilindrico mentre esso è sottoposto ad un carico di compressione assiale (Rif. 49*H*). Da queste misure risulta che si hanno variazioni di volume relativamente rilevanti in prossimità del carico di rottura. Sono stati trovati *aumenti* di volume relativi di 0,001 in provini di acciaio soggetti a compressione. Però le deformazioni residue sono esigue, dell'ordine di 0,0001 sia per gli acciai sia per le leghe d'alluminio considerate, e possono essere positive o negative. Questi aumenti di volume sotto il carico di compressione sono attribuibili a microscopiche fessurazioni, che possono richiudersi in assenza del carico. Una spiegazione analoga potrebbe darsi per le variazioni di volume riscontrate da Coffin (Rif. 50*F*) nelle prove su materiali fragili (ghisa).

Taylor e Quinney (Rif. 31*A*) trovano forti variazioni, di varie unità %, nel volume interno di tubi in alluminio o acciaio sottoposti a trazione e torsione. Però, come osservano gli Autori, non può affermarsi che queste variazioni si verifichino anche nel materiale, come dovrebbe ammettersi se esso fosse perfettamente isotropo; qui si può presentare una « anisotropia di parete » [48].

Altra questione connessa alla compressibilità è l'influenza della tensione media sul comportamento plastico del materiale [49]. Tale influenza viene di solito negata; si ammette cioè che sulle deformazioni plastiche influisca la differenza fra le tensioni attuali e la distribuzione « idrostatica »,

---

[48] In una parete sottile è prevedibile che le proprietà del materiale nella direzione dello spessore si differenzino da quelle sulle direzioni perpendicolari, in conseguenza della differente possibilità di orientamento che le particelle del materiale, dell'ordine di grandezza dello spessore, posseggono nelle varie direzioni, per la vicinanza delle superfici libere.

[49] Lavori sperimentali sulla questione sono citati nella nota a p. 16 del trattato di Hill Rif. 50*G*.

rappresentata da tensioni σ normali a ogni giacitura. Le considerazioni del § II. 4 mostrano la connessione dell'ipotesi di incompressibilità e di quella di indifferenza alla $\bar{\sigma}$ nel campo plastico. Di esse non è tuttora ben definito il campo di applicabilità. Deve però notarsi che, sebbene sia notevolissima la semplificazione arrecata dall'ammissione simultanea delle due proprietà, esse non costituiscono un sostegno indispensabile per l'una o per l'altra delle teorie esistenti, le quali tutte possono adattarsi ad abbandonare le due ipotesi.

V. 3. - SUSSISTE LA LINEARITÀ NELLE RELAZIONI FRA INCREMENTI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE? — Formuliamo il quesito in un caso particolare ma molto rappresentativo.

Portato il materiale in campo plastico mediante una sollecitazione uniassiale σ, si applichi sulla giacitura normale a questa σ una tensione tangenziale τ e sia γ lo scorrimento prodotto; sia G_i il *modulo tangenziale iniziale*, ossia il rapporto $d\tau/d\gamma$ per $\tau = 0$. Se con la tensione $d\tau$ si applica simultaneamente un incremento $d\sigma$ della tensione normale, si ha variazione nel valore di G_i? Mentre le teorie incrementali lineari rispondono negativamente, la teoria di Batdorf e Budiansky conduce ai risultati presentati nella fig. 18, tratta dal Rif. 50*E*. Risulta dalla teoria anzidetta che, se la variazione $d\sigma$ produce una diminuzione nel valore assoluto della tensione applicata (sia essa di trazione o compressione), quando per questa variazione il valore assoluto del rapporto $d\sigma/d\tau$ supera un certo limite, è, come vogliono le teorie lineari, $G_i = G$, modulo tangenziale elastico. Invece, se l'incremento $d\sigma$ si produce nel senso di accrescere la sollecitazione, quando si superi con $|d\sigma/d\tau|$ lo stesso valore limite, il modulo tangenziale iniziale risulta dato da

$$1/G_i = 1/G + 3/E_s - 3/E \tag{168}$$

essendo E_s il rapporto fra σ e la deformazione totale corrispondente. Nell'intervallo fra i due limiti si ha la curva di raccordo indicata nella figura.

La proprietà si estende a tutti i coefficienti delle relazioni fra gli incrementi di deformazione e di tensione. Introducendo piccole variazioni nello stato di tensione a partire dalla sollecitazione uniassiale σ_z, quando $d\sigma_z$ in rapporto agli altri incrementi di tensione supera un certo limite, gli incrementi di deformazione plastica risultano espressi dalle (142)-(143) con i coefficienti che sono dati dalle (144) indipendentemente dai rapporti fra gli incrementi di tensione. D'altra parte quando $d\sigma_z$ costituisce una diminuzione di sollecitazione sufficientemente grande, la deformazione plastica scompare. Nel campo intermedio, i coefficienti degli incrementi $d\sigma$ nelle espressioni delle $d\varepsilon^p$ dipendono dai rapporti fra gli incrementi

stessi, cosicchè non è lecito calcolarne separatamente gli effetti per poi sommarli. Invece, per la teoria incrementale semplice, nel caso considerato, le relazioni (142)-(143) si scrivono con $a = 1/G_d = 0$ e valgono senza variazione nei coefficienti in tutto il campo di deformazione plastica. Analoghe conclusioni si traggono dalla teoria di Besseling, ancora nel caso di sollecitazione iniziale uniassica.

Il problema in questione ha importanza fondamentale per le ricerche sulla stabilità dell'equilibrio elastoplastico. Già da tempo si è constatato che i carichi critici delle piastre calcolati secondo le teorie incrementali sono notevolmente più alti dei valori sperimentali. Invece le teorie olonome, criticabili sotto altri aspetti, forniscono risultati in accordo con l'esperienza. Perciò le conclusioni tratte dalla teoria di Batdorf e Budiansky, che indica una transizione continua dalle previsioni della teoria lineare ($G_i = G$ nel caso sopra menzionato) a quelle della teoria olonoma (G_i espresso dalla medesima (168)), diedero adito alla speranza che potesse chiarirsi l'intricata questione [50]. Però le esperienze di controllo effettuate dallo stesso Budiansky con altri studiosi smentirono la teoria nelle sue conclusioni fondamentali: per il modulo iniziale risultò $G_i = G$, indipendentemente dal rapporto $d\sigma/d\tau$ fra gli incrementi simultanei delle tensioni normale e tangenziale (Rif. 51*D*). Anche le esperienze di Feigen (Rif. 54*E*) contraddissero a quella teoria: esse, per $d\sigma/d\tau = 0$, indicarono una certa diminuzione di G_i con l'aumentare della sollecitazione σ sulla quale l'incremento $d\tau$ viene applicato; ma questa diminuzione risultò inferiore al previsto, raggingendo appena il 10% in situazioni per le quali la teoria dello slittamento indica una riduzione del 60%. Le esperienze di Naghdi e Rowley (Rif. 54*F*) su tubi in dural .24S-T4 rivelarono invece una forte diminzione di G_i pur con valori negativi di $d\sigma/d\tau$. Peraltro, altre prove di Naghdi in collaborazione con altri studiosi (Rif. 58*D*) diedero valori quasi costanti di G_i. Invece esperimenti di Žukov e Rabotnov (Bibl. 2) e di Svešnikova (Bibl. 3) citati da Kljušnikov (Rif. 58*F*) danno valori di G_i notevolmente

[50] Un problema molto rappresentativo è quello della striscia sottile di larghezza e spessore costante, soggetta a compressione nel senso longitudinale e con appoggio continuo lungo uno dei bordi. Questo caso, nel quale l'instabilità si manifesta con una torsione della striscia intorno all'orlo appoggiato, fu esaminato dallo scrivente per cercare nelle imperfezioni iniziali la causa della divergenza fra le previsioni della teoria lineare semplice e i dati sperimentali (Rif. 50*C*). Bijlaard ribattè (Rif. 50*D*) che le imperfezioni che dovevano ammettersi per spiegare quella divergenza erano troppo forti per sfuggire allo sperimentatore. Riesaminato il problema alla luce di questa osservazione e della nuova teoria di slittamento lo scrivente prospettò la possibilità che questo tipo di instabilità si svolgesse in analogia alla inflessione laterale dell'asta compressa in campo elastoplastico secondo Shanley: ossia con deformazioni continuamente crescenti mentre il carico assiale va aumentando e la rigidezza resta conseguentemente ridotta (Rif. 51*C*).

inferiori a G ([51]). Allo stato delle cose è difficile trarre una conclusione sicura sulla questione; nè possono formularsi conclusioni più favorevoli per la teoria di Lin modificata (§ III. 3).

V. 4. - Che forme assume il luogo dei limiti elastici? — Circa le trasformazioni che il luogo p subisce nell'accompagnare lo spostamento del punto di carico, i vari gruppi di teorie danno risposte nettamente diverse. Le isotrope ammettono che il luogo p subisca una espansione omotetica quando il cammino di carico si dirige verso l'esterno del luogo stesso: esso resta invariato quando lo stato di tensione ruota nel corpo. Secondo le teorie anisotrope il luogo p risente dell'effetto direzionale della deformazione plastica: nella formulazione più semplice, esso subisce una traslazione nella direzione della deformazione plastica; una rotazione delle tensioni nel corpo modifica il luogo stesso. Le teorie non lineari, con i loro luoghi p parziali più o meno indipendenti, fanno intervenire non solo la deformazione plastica attuale, ma anche, in generale, la storia del processo di deformazione; inoltre nel punto di carico il luogo p, inviluppo di luoghi parziali, presenta una angolosità più o meno marcata (figure 16, 20, 21, 25). Date queste divergenze, varie ricerche sperimentali si sono indirizzate alla soluzione del quesito in questione. Fra le più indicative citiamo quelle di Naghdi, Essenburg e Koff (Rif. 58*D*) e quelle di Hu e Bratt (Rif. 58*C*). Le prime si riferiscono a tubi in dural 24S-T4, sollecitati a trazione e torsione combinate, dopo un primo carico a semplice torsione spinto oltre il limite elastico. Le esperienze furono effettuate per tre valori della sollecitazione iniziale, indicati con freccia nella fig. 26; con σ_p vi è

Fig. 26.

([51]) Kljušnikov ritiene che, a differenza dagli sperimentatori russi menzionati, altri abbiano trovato $G_i = G$ perchè sperimentavano in prossimità dei limiti elastici. Però è in questa zona che deve chiarirsi il problema se si vogliono affrontare le questioni di instabilità in campo elastoplastico.

indicato il limite elastico a trazione. In ciascun caso, tolto il carico torcente si determinava il luogo dei limiti elastici applicando le sollecitazione combinate e rilevando dai grafici $\sigma(\varepsilon)$ e $\tau(\gamma)$ il punto in cui si notava la deviazione dall'andamento lineare. La linea limite più interna risulta pressochè coincidente con l'ellisse di equazione $J_s =$ costante (condizione di v. Mises). Aumentando il carico iniziale la curva va appuntendosi in corrispondenza del punto di carico; contemporaneamente dalla parte opposta essa si schiaccia, denunciando un sensibile effetto Bauschinger. A parte questo particolare, la forma delle curve si approssima notevolmente a quella indicata dalla teoria di Batdorf e Budiansky e, in parte, da quella della teoria di Lin modificata (fig. 25).

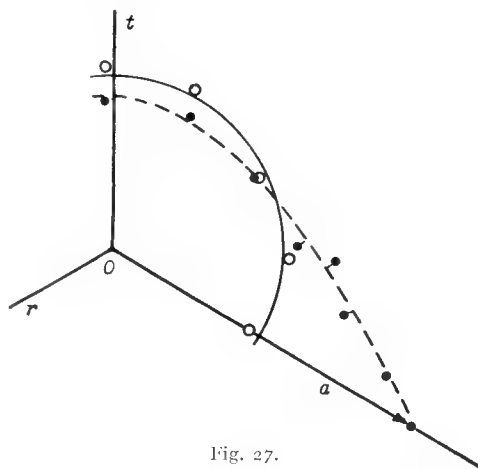



Fig. 27.

Le esperienze di Hu e Bratt si riferiscono a tubi in lega d'alluminio 2S-F sollecitati a trazione assiale e pressione interna. I risultati sono riportati nella fig. 27, nella proiezione assonometrica dello spazio delle tensioni principali. I circoletti indicano le sollecitazioni combinate per le quali si raggiunse il limite elastico nel materiale non previamente caricato; essi appaiono disposti in prossimità di un cerchio, conformemente alla condizione $J_s =$ costante. I limiti elastici ottenuti sul provino portato previamente in campo plastico mediante sollecitazione assiale sono indicati con punto pieno; la linea limite in questo caso mostra un punto angoloso in corrispondenza del punto di carico.

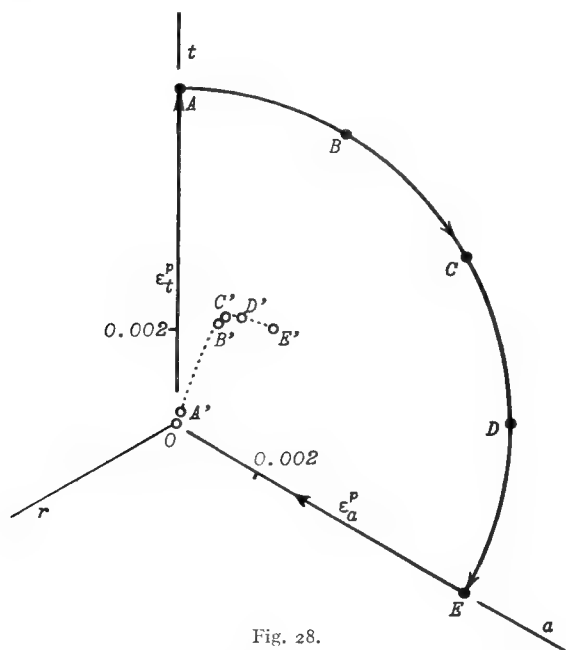



Fig. 28.

Altre importanti prove volte alla determinazione della forma del luogo p in posizioni non lontane dalla iniziale (corpo scarico) furono effettuate da Marin e Hu. In una serie di esperienze (Rif. 53*B*) tubi di dural 14S-T6 vennero sottoposti a trazione assiale e pressione interna combinate e variate in modo da realizzare diversi cammini di carico. Uno di essi è rappresentato dalla linea *OABCDEO* nella fig. 28, nella consueta proiezione assonometrica ([52]). Se valesse la teoria isotropa semplice, mentre si percorre l'arco *A-E* non si dovrebbe avere variazione di deformazione plastica; invece questa si produce nella misura indicata dalla punteggiata *A'-E'*, la corrispondenza col cammino di carico essendo indicata nei punti segnati con la stessa lettera. Anche seguendo altri percorsi, interni al luogo p secondo la teoria semplice, Marin e Hu trovarono variazioni nelle deformazioni plastiche. Nella fig. 29 è rappresentato il cammino di carico *OABCDO* che segue un tratto del luogo dei limiti elastici secondo Guest (esagono della τ massima); lungo il tratto *A-D* si riscontrano le deformazioni plastiche rappresentate dalla punteggiata *A''-D''*. In una successiva

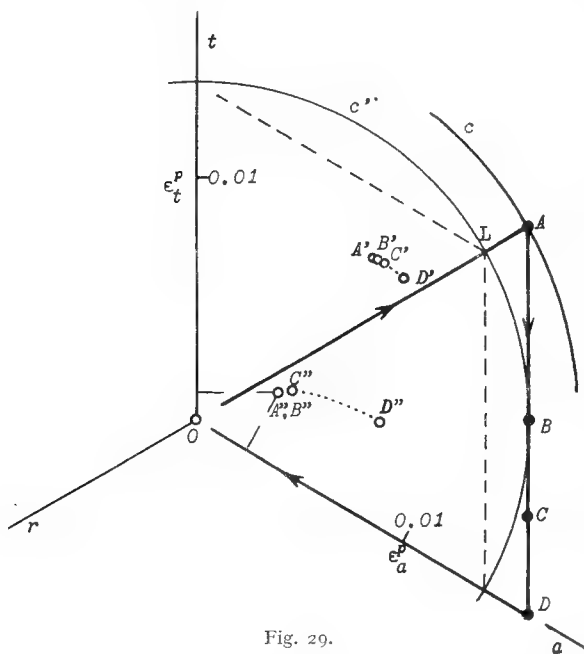



Fig. 29.

([52]) Nelle figure 27, 28, 29, 30, 31, 32, proiezioni assonometriche sul piano dei deviatori, il punto rappresentativo dello stato di tensione, proiettato sugli assi a, t, r rispettivamente, dà nella medesima scala i valori di

$$s_a = (2\sigma_a - \sigma_t - \sigma_r)/3, \quad s_t = (2\sigma_t - \sigma_a - \sigma_r)/3, \quad s_r = (2\sigma_r - \sigma_a - \sigma_t)/3$$

essendo σ_a la tensione assiale, σ_t la circonferenziale, σ_r la radiale. Il punto rappresentativo dello stato di deformazione sugli stessi assi dà rispettivamente le dilatazioni plastiche ε_a^p, ε_t^p, ε_r^p assiale, circonferenziale e radiale, supposta nulla la somma dei tre valori. Questa rappresentazione in coordinate triangolari è anche usata nella fig. 3 e successive assonometrie. Essa si basa sulla considerazione seguente: se x, y, z sono tre assi ortogonali, sulla proiezione normale alla trisettrice nel piano $x + y + z = 0$ la normale alla proiezione di x distante $a\sqrt{1{,}5}$ dall'origine è traccia del piano normale $2x - y - z = 3a$ e quindi anche del piano $x = a$.

prova (Rif. 55*A*), seguendo un cammino simile al precedente ma spinto più avanti nel campo plastico, si riscontrano le deformazioni rappresentate nei punti *A'*-*D'*. Sia secondo la teoria della massima τ, sia secondo quella di v. Mises, per la quale il luogo p è rappresentato dal cerchio c queste variazioni nelle deformazioni non dovrebbero prodursi (53).

Fig. 30.

Prove analoghe furono effettuate dagli stessi studiosi su tubi di acciaio SAE 1020 (Rif. 56*A*). In una di queste fu seguito il cammino *OABCDEO* della fig. 30; la deformazione plastica durante il percorso *A*-*E* variò secondo la punteggiata *A'*-*E'*.

In un'altra esperienza il materiale fu portato in campo plastico prima sottoponendolo a trazione assiale (cammino *OA* della fig. 31, nella quale le fasi di carico sono segnate a tratto, quelle di scarico a tratto e punto), poi a trazione trasversale (cammino *OB*) e quindi a sollecitazione combinata ($\sigma_a = \sigma_t$) fino al punto *C*, fuori del cerchio che definisce secondo v. Mises il luogo p per le deformazioni raggiunte in *A* e *B*. Tornando infine nei punti *A* e *B* si constatò che il limite elastico non era praticamente mutato, contrariamente a quanto vuole l'ipotesi dell'incrudimento isotropo. In un'altra esperienza, portato il punto di carico

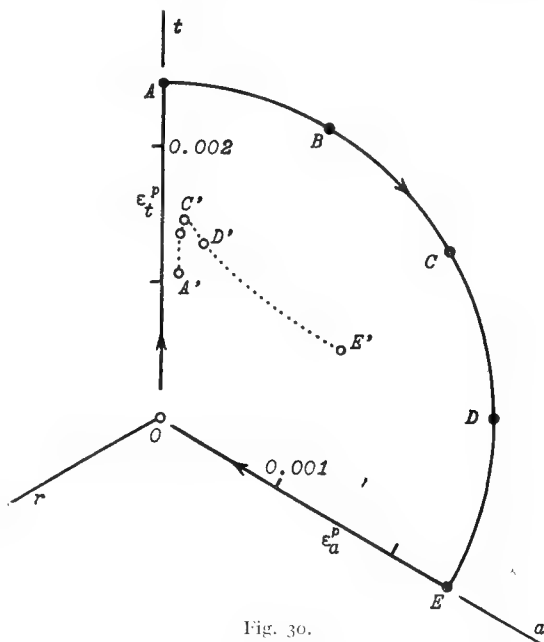
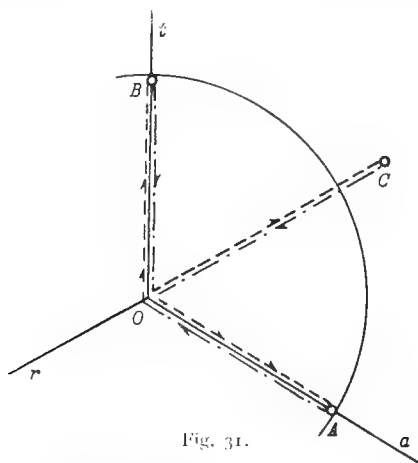



Fig. 31.

(53) Nel tratto *AB* la deformazione plastica si mantenne invariata. Marin e Hu giudicano che questo costituisca conferma della teoria di slittamento. In realtà secondo quella teoria il luogo p iniziale non è rappresentato dal cerchio c' per il limite elastico L, ma dall'esagono di cui sono segnati a tratto due lati. Perciò secondo la teoria di Batdorf e Budiansky la deformazione plastica dovrebbe variare anche lungo il percorso *AB*.

in C per il cammino OAC (fig. 32) si determinarono le variazioni di sforzo assiale e di pressione interna capaci di mantenere invariata la deformazione plastica: fu ottenuta così la linea segnata a tratto nella figura, che appartiene al luogo p per le condizioni in esame.

Citiamo ancora le esperienze di Gill (Rif. 56*D*) su tubi di ottone portati in campo plastico per effetto di un momento torcente e poi assoggettati a sollecitazione combinata di torsione e pressione interna; in due prove queste sollecitazioni vennero variate in modo da tenere J_s costante, in una terza fu tenuta costante la massima τ. Nei tre casi, e specialmente nell'ultimo, si riscontrò variazione nella deformazione plastica.

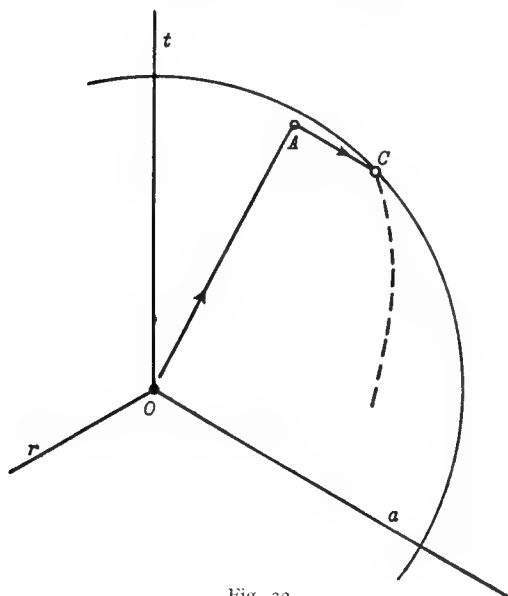



Fig. 32.

Una prova particolarmente interessante, suggerita da Drucker, fu effettuata da Phillips e Kaechele (Rif. 56*B*): tubi in lega d'alluminio 2S-0 furono assoggettati a sforzo assiale, torsione e pressione interna combinati in modo da mantenere costanti i valori delle tensioni principali, variandone solo le direzioni. In questo caso *qualunque* teoria isotropa, qualunque sia l'equazione $f(J_s, K_s) =$ costante del luogo p, dà $d\bar{\varepsilon}^p = 0$. I risultati delle prove menzionate non sono molto regolari; però in una delle prove rivelano chiaramente una variazione della deformazione plastica.

In conclusione si può affermare che l'espansione isotropa del luogo p è nettamente smentita dalle esperienze menzionate; esistono però anche prove favorevoli alla teoria isotropa. Un'autorevole documentazione è quella fornita da Taylor e Quinney (Rif. 31*A*). Sottoponendo tubi di vario materiale prima a trazione fino in campo plastico e poi ad una frazione del primitivo sforzo in combinazione con un momento torcente, gli Autori trovarono che i limiti elastici nel piano σ,τ cadono presso la curva

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \text{costante} \tag{169}$$

(che corrisponde alla condizione $J_s =$ costante) e persino in qualche caso nettamente fuori della curva stessa. Menzioniamo inoltre le esperienze di Gill e Parker (Rif. 59*A*): tubi di ottone vennero sottoposti a torsione,

a pressione interna e a « trazione obliqua », intendendosi con questo termine una combinazione delle due prime sollecitazioni in proporzioni tali da dare una sollecitazione uniassica. Ciascuna prova, in genere, si svolgeva in tre tempi:

I) sollecitazione di torsione, trazione obliqua o pressione interna fino ad un certo valore fisso di J_s e scarico;

II) trazione obliqua fino allo stesso valore di J_s;

III) sollecitazione addizionale di torsione, trazione obliqua o pressione interna.

Nella II e III fase si constata che la regione elastica si estende a valori di J_s più alti di quelli raggiunti nella I fase; ciò avviene specialmente quando il cammino nella I fase differisca dal successivo e, in particolar modo, quando la sollecitazione è prodotta da pressione interna nella I fase e torsione nella III (54).

La divergenza rilevata fra queste serie di prove e le precedenti deve attribuirsi alla differente definizione del limite elastico. Nella fig. 33 è rappresentato il procedimento col quale Taylor e Quinney determinano il momento torcente al limite elastico in base ai valori sperimentali indicati con circoletti: tracciata la linea a tratto in prosecuzione del ramo pianeggiante della curva individuata dai punti sperimentali, è determinata la sollecitazione corrispondente a $\varepsilon = 0$. La costruzione è giustificata dalla considerazione seguente: dopo la prima sollecitazione di trazione, nella prova combinata di trazione (costante) e torsione (crescente) il materiale non dà una caratteristica sforzi deformazioni con una brusca piegatura nel punto in cui si raggiunge di nuovo il limite elastico, ma presenta un tratto di raccordo per poi proseguire con deformazioni rapidamente crescenti; così pure avviene nella prova di trazione (fig. 9) quando uscendo da un tratto elastico come DC si entra, con carico crescente nella prosecuzione del ramo AC. Si dovrebbe distinguere perciò un limite elastico inferiore L_i, non ben definito e perciò segnato con tratteggio nella fig. 33, ed un limite superiore L_s individuato col procedimento di estrapolazione di Taylor. Ciò può spiegare la divergenza fra i risultati

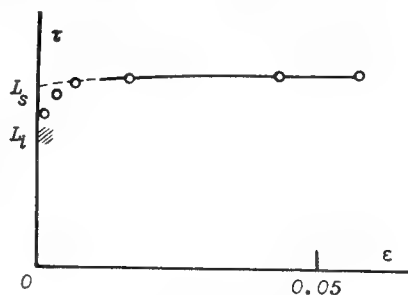



Fig. 33.

---

(54) Si noti che la sollecitazione in un tubo creata da pressione interna non differisce da quella di torsione nei rapporti dei valori principali del deviatore di tensione; quindi si dovrebbe avere lo stesso comportamento plastico nei due casi.

trovati da Taylor, in accordo con la formula di v. Mises e quelli delle prove che indicano un forte ribassamento del limite elastico. In tali termini si possono interpretare i risultati delle prove di Gill e Parker (Rif. 59*A*) che rivelano un ingrandimento del campo elastico.

V. 5. - Come varia l'incremento di deformazione plastica lungo il cammino di carico? — Questo costituisce il quesito fondamentale della ricerca; i quesiti dei paragrafi V. 2, V. 3, V. 4 rappresentano aspetti particolari del problema, con carattere preparatorio. È opportuno frazionare l'indagine conclusiva nelle due questioni:

a) determinazione della direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$

b) determinazione del modulo de_p.

Se l'esperienza, in risposta al quesito V. 2, conferma l'usuale assunzione di incompressibilità per la deformazione plastica, il problema (*a*) riceve una prima semplificazione: la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ dipende da quattro parametri, non da cinque. Una ulteriore, assai più importante semplificazione si avrebbe se le indagini relative al quesito V. 4 mostrassero che il luogo p è « liscio » in corrispondenza del punto di carico, ossia vi possiede una normale n ben definita, dovendo allora essere n la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$, indipendentemente dalla questione V. 3 (§ II. 4). Però non è facile che esperienze per quanto accurate possano distinguere se esista o meno una singolarità in un luogo i cui contorni appaiono alquanto « sfumati ». È probabile che la determinazione diretta della direzione ricercata riserbi minori difficoltà.

Ancora riguardo al punto (*a*) è conveniente formulare due quesiti:

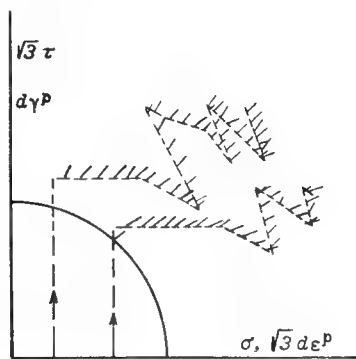
I) le direzioni principali dell'incremento di deformazione plastica coincidono con quelle del tensore degli sforzi?

II) nel piano dei deviatori, le proiezioni dei vettori $\vec{\sigma}$ e $d\vec{\varepsilon}^p$ che angolo formano?

Si osserva anzitutto che il primo quesito non interessa nel caso di materiale isotropo inizialmente, sollecitato in condizioni di carico isodirezionale; in tal caso la coincidenza *deve* sussistere per motivi di simmetria. Perciò le prove effettuate senza modificare le direzioni delle tensioni principali, in particolare quelle di carico proporzionale, non sono atte a fornire una risposta al I quesito. D'altra parte esse sono estremamente utili, fornendo una risposta, sia pure non del tutto generale, al II quesito. A questo proposito si ricorda che, ammesso che la deformazione plastica non alteri il volume, il vettore $d\vec{\varepsilon}^p$, riportato nello spazio delle tensioni principali, sta nel piano dei deviatori, come $\vec{s}$; la direzione dei due vettori è definita dai parametri di Lode ν' e μ, il loro parallelismo essendo denun-

ciato dall'eguaglianza $\nu' = \mu$. Le teorie incrementali lineari isotrope lasciano alla determinazione sperimentale la legge $\nu'(\mu)$, ad eccezione della teoria semplice che pone $\nu' = \mu$. Allo stato attuale delle conoscenze sperimentali non è possibile precisare l'influenza di J_s su ν' e si deve ammettere che esso dipenda solo da μ. Dalle esperienze di Lode (Rif. 26*A*) e di Fraenkel (Rif. 48*A*) effettuate in condizioni di carico proporzionale, e da quelle di Taylor e Quinney (55) (Rif. 32*A*) risulta che la differenza $\mu - \nu'$ è piccola, ha il segno di μ e di solito non supera 0,15 in valore assoluto; una curva rappresentativa è la linea *b* della fig. 12.

Fig. 34.

Ordinariamente i dati sperimentali relativi all'incremento di deformazione plastica in condizioni di carico generiche (non proporzionale) vengono posti a raffronto con la teoria isotropa semplice; si controlla cioè se le componenti di $d\vec{\varepsilon}^p$ sono proporzionali a quelle di $\vec{s}$, senza separare i quesiti I e II. È difficile rielaborare quei dati secondo una traccia differente da quella seguita nelle note degli sperimentatori. Sicchè qui si possono dare indicazioni poco precise sui controlli relativi a quei due punti, come pure sul quesito (*b*).

Una serie assai ricca di prove su tubi di lega d'alluminio sollecitati a torsione e sforzo assiale, secondo cammini di carico variamente spezzati fu effettuata da Phillips e Kaechele (Rif. 56*B*, 57*B*). Se si riportano in ascissa i valori di σ e in ordinata, nella stessa scala, i valori di $\sqrt{3}\,\tau$, la linea dei limiti elastici $J_s =$ costante risulta rappresentata da un cerchio (fig. 34). Nella figura sono segnati due cammini di carico della serie menzionata. Per ciascuno degli intervalli di carico sono riportati segmenti aventi proiezioni rispettivamente proporzionali a $\sqrt{3}\,d\varepsilon^p$ e $d\gamma^p$ sulle ascisse e sulle ordinate. Secondo la teoria isotropa semplice questi segmenti avrebbero direzione radiale rispetto all'origine delle coordinate. In realtà questa condizione mediamente è verificata in misura soddisfacente. Si nota che, in generale, la deviazione dalla direzione radiale si manifesta nella direzione di avanzamento del cammino di carico. Un controllo analogo nel caso

(55) Se il valore di ν' dipende solo da μ lo si può calcolare in base ai valori integrali delle ε ottenuti dalla prova di carico proporzionale; cioè, in luogo della (103) si può scrivere $\nu' = 3\varepsilon''/(\varepsilon' - \varepsilon''')$. Nelle prove di Taylor e Quinney le direzioni e i valori delle tensioni principali sono variati; quindi a rigore i valori di quel rapporto calcolati in base alle ε non rappresentano il paramentro ν' della (103).

di carico isodirezionale può effettuarsi mediante i diagrammi del tipo di quelli delle figure 28-30. Da quelli tracciati si osserva che la direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$, tangente alla linea punteggiata, è compresa fra la direzione radiale e la tangente nel corrispondente punto del cammino di carico. Il fenomeno rilevato della attrazione della direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ da parte di $d\vec{\sigma}$ è qualitativamente giustificato dalle teorie anisotrope. Secondo la teoria espressa dalla relazione (114), al cammino di carico *O-A-G* nel piano della fig. 35 corrispondono, in scala, le deformazioni plastiche rappresentate dalla linea *O-A'-G'* (curva « del traino »). Le direzioni degli incrementi di deformazione plastica, segnate sui corrispondenti punti del cammino di carico, mostrano di deviare rispetto alla radiale nel senso anzidetto.

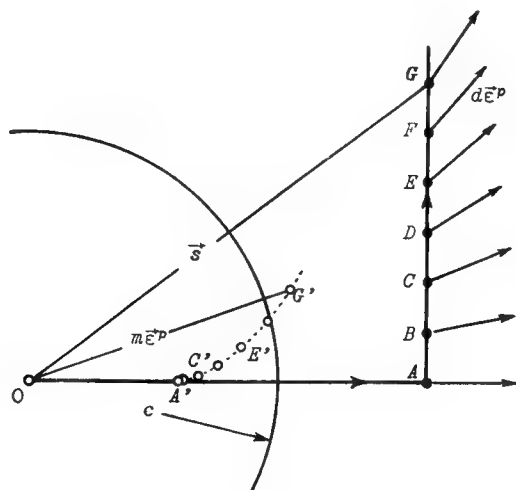



Fig. 35.

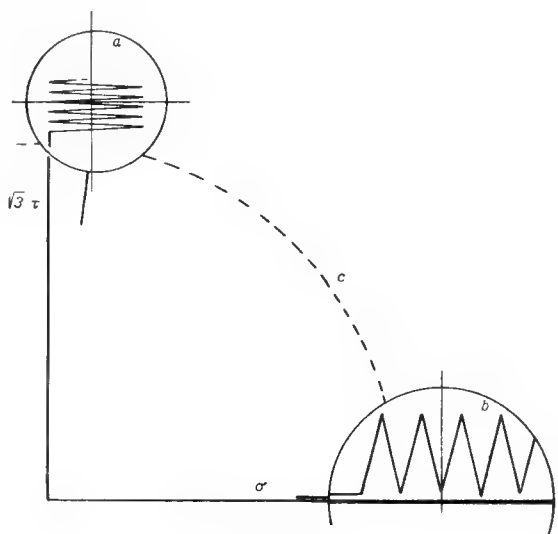
Con considerazioni di questo genere si trova una giustificazione per i risultati trovati da Feigen (Rif. 54*E*) nelle prove su tubi sollecitati a trazione e torsione. Il tubo, sotto sforzi assiali continuamente crescenti, assoggettato in più ad un momento torcente costante presentava deformazioni torsionali plastiche crescenti; quando si toglieva il carico torcente, sotto carichi assiali ancora crescenti, la torsione residua presentava una graduale diminuzione, prevista dalla teoria anisotropa, non dalla isotropa. Si deve però osservare che tale diminuzione non tende ad annullare interamente la torsione plastica, come vorrebbe la teoria anisotropa semplice. Si può dunque affermare che questa fornisce un'indicazione qualitativa.

Fra le ricerche sperimentali volte alla determinazione della direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$ va annoverata una serie di prove, molto originali, effettuate da Naghdi, Rowley e Beadle (Rif. 55*C*) sottoponendo a torsione e trazione combinate tubi di dural 24S-T4. Il tipo di cammino seguito nel piano σ, τ è indicato schematicamente nella fig. 36, dove il cerchio c è il luogo iniziale dei limiti elastici $J_s =$ costante. Entro i cerchi a, b sono ingranditi 5 volte (omoteticamente rispetto ai centri) due caratteristici percorsi. Secondo le teorie lineari, isotrope o anisotrope, che suppongono il luogo p privo di singolarità le oscillazioni angolari del vettore $\vec{\sigma}$ dovrebbero ripercuotersi in misura assai ridotta sulla direzione di $d\vec{\varepsilon}^p$: il rapporto fra le

oscillazioni angolari dovrebbe essere dell'ordine del rapporto fra l'ampiezza di oscillazione del punto di carico in direzione tangente al luogo p ed il raggio di curvatura della sezione di quello col piano di oscillazione. Invece sperimentalmente sono state rilevate variazioni di ordine ben maggiore: ad esempio per i cammini del tipo indicato nel cerchio b, $d\gamma^p/d\tau$ risulta di poco minore di $1/G$. Gli Autori concludono che deve esistere un punto angoloso nel luogo dei limiti elastici presso il punto di carico.

Dati relativi alla direzione dell'incremento di deformazione plastica per cammini di carico vari (non proporzionali) sono impliciti nei risultati sperimentali rappresentati nei grafici delle note di Marin e Hu (Rif. 52*A*, 53*B*, 56*A*) per prove di trazione e pressione interna su tubi, di Marin e Wiseman (Rif. 53*C*) per prove di trazione e torsione e in vari altri lavori (Rif. 47*C*, 48*D*, 52*B*) per prove degli stessi tipi. I confronti effettuati dagli Autori con la teoria isotropa semplice, talora modificata semiempiricamente per tener conto delle anisotropie iniziali, si riferiscono ai valori globali delle deformazioni, non agli incrementi; in genere si limitano all'esame della correlazione (163). Gli scarti riscontrati, spesso rilevanti, comprendono insieme le divergenze relative ai vari quesiti sopra formulati.

Fig. 36.

Informazioni relative esclusivamente al punto (*b*), ossia al modulo de_p si possono ricavare solo dalle prove a carico proporzionale. Una importante serie di dati al riguardo è fornita dalle esperienze di Osgood (Rif. 47*B*) su tubi soggetti a tensioni assiale e circonferenziale combinate in vari rapporti (costanti in ciascuna prova). I diagrammi di s (o della tensione ottaedrica (50)) in funzione del modulo di $\vec{e}_l$ (o dello scorrimento ottaedrico, § II. 7) mostrano che i punti sperimentali si dispongono presso una curva di ordinate continuamente crescenti, con scarti relativi sulle ordinate prossimi al 10%. Scarti dello stesso ordine sono riscontrati da Cunningham, Thomsen e Dorn (Rif. 47*C*), da Davis e Parker (Rif. 48*B*), da Marin e Wiseman (Rif. 53*C*) e da altri sperimentatori. Se si ammette che ν' dipenda solo da μ da quei dati si può ricavare la relazione fra e_p e

s ([56]), rappresentata da una serie di grafici con il parametro μ costante su ciascuno, per un dato materiale. Da questi diagrammi si può determinare la derivata ds/de_p occorrente per la (108). L'influenza del parametro μ è però spesso coperta dagli scarti accidentali. Ad esempio nelle prove a carico proporzionale di Gill e Parker (Rif. 59*A*) risulta uno scarto notevole fra le linee che rappresentano la relazione fra s e $|\bar{e}|$ sperimentalmente ottenuta assoggettando il provino tubulare a pressione interna o a torsione, per quanto μ nei due casi abbia circa lo stesso valore (0 per la torsione, 0,06 per la pressione interna, con le dimensioni dei tubi adoperati). La divergenza viene attribuita ad anisotropia dei provini. D'altra parte si nota una buona correlazione fra s e e_p, indipendentemente da μ, nei valori sperimentali ottenuti da Davis (Rif. 55*B*) con una tecnica alquanto diversa dalla usuale: i tubi, in acciaio SAE 1020, venivano sottoposti a torsione e trazione combinate in modo da mantenere fisse nella parete le direzioni delle *dilatazioni* principali, con inclinazioni preassegnate sulle generatrici.

Ovviamente le pendenze ds/de_p che si ricavano dalle prove di carico proporzionale hanno valore per il cammino di carico da cui sono ottenute; per estenderne la validità a percorsi generici occorre accettare l'una o l'altra delle teorie enunciate. Attualmente non sussistono dati sperimentali sufficienti perchè possa decidersi se il rapporto $d\bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}^p / d\bar{\varepsilon}^p \cdot d\bar{\varepsilon}^p$ dipenda solo dal valore attuale di $\bar{s}$ o altri fattori intervengano.

V. 5. - Conclusioni. — Le conclusioni che possono trarsi dalle esperienze menzionate hanno neccessariamente carattere soggettivo, a causa delle incertezze che tuttora sussistono. È stata qui formulata una serie di quesiti ai quali si cerca risposta nell'esperimento; la questione fondamentale, la determinazione dell'incremento di deformazione plastica $d\bar{\varepsilon}^p$ è scissa così in problemi parziali. Fondamentale fra i quesiti preliminari è quello relativo alla linearità delle relazioni fra incrementi di deformazione e di tensione: qui purtroppo si hanno le più marcate discordanze. La questione è stata messa a fuoco sul punto cruciale, il modulo iniziale G_i. Nella misurazione di G_i gli autori stessi della teoria non lineare degli slittamenti plastici trovarono dati in accordo con la teoria lineare; e così parecchi altri sperimentatori. Altri trovarono variazioni di G_i nel senso voluto dalla teoria degli slittamenti, ma generalmente secondo leggi che non possono dirsi in accordo con le previsioni.

([56]) È possibile che quella dipendenza sia esprimibile nella forma

$$s = f_1(\mu) f_2(e_p) .$$

Accogliendo un risultato trovato da Drucker (Rif. 49*C*) con riferimento alla relazione fra s e $|\bar{e}|$, si può ritenere

$$f_1(\mu) = (1 - 2{,}25\eta^2)^{-1/6} .$$

Altra questione preliminare è quella relativa alla costanza di volume nella deformazione plastica e della indipendenza di questa dalla pressione media. Dai dati sinora noti non appaiono prove sufficienti perchè si debbano abbandonare le ipotesi semplificative ammesse generalmente.

Ancora come questione preliminare si può considerare quella relativa al contorno della regione elastica. Si può già escludere che quel luogo subisca durante la deformazione plastica l'ingrandimento omotetico postulato dalle teorie isotrope, specialmente se si fa riferimento ai limiti relativi alla incipiente deformazione plastica. Quanto al particolare delicato relativo alla esistenza di una singolarità nel punto di carico è difficile che possa ottenersi da esperienze, per quanto accurate, una risposta diretta.

Sul punto conclusivo, del calcolo di $d\vec{\varepsilon}^p$ è difficile desumere indicazioni definitive dai dati oggi noti. Il parallelismo dei vettori $d\vec{\varepsilon}^p$ e $\vec{s}$ non è certo generalmente affermabile; però in molti casi appare verificato in via approssimata. Esso costituisce un punto di base sul quale potrà costruirsi una teoria correttiva. Si può escludere che una correzione importante sia ottenibile introducendo una componente coassiale a $\vec{s}$, come quella rappresentata dal deviatore $\vec{q}$. Nè pare che basti fare intervenire una componente parallela a $\vec{\varepsilon}^p$, sebbene l'introduzione di tale componente, voluta dalle teorie lineari anisotrope, porti a giustificare diversi fenomeni noti che rivelano l'impronta lasciata nel materiale dalla deformazione plastica; è probabile che una componente parallela a $d\vec{s}$ debba intervenire. Occorre individuare i moduli delle componenti e le relative zone di annullamento, distinte o no, a seconda della non-linearità che l'esperienza denunci. Allo stato attuale delle conoscenze sperimentali sarebbe vano azzardarsi in congetture. L'esperienza volta alla misura degli effetti delle piccole variazioni dello stato di tensione introdotte sulla base di configurazioni diverse, raggiunte per differenti cammini di carico, deve guidare nella formulazione delle relazioni fra incrementi di sforzi e deformazioni nel campo elastoplastico, valide nell'ordine di precisione che possa ritenersi raggiungibile in questa classe di problemi.

NOTAZIONI PRINCIPALI

σ_h, τ_{hk}	ordinarie componenti di tensione nel riferimento cartesiano; h, k sono simboli che assumono indipendentemente i significati di x, y, z; σ è una generica tensione normale, τ una tensione tangenziale.
$\bar{\sigma}$	tensione media, $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$.
σ_1, σ_2, σ_3	tensioni principali.
σ_a, σ_t, σ_r	tensioni assiale, circonferenziale e radiale, nei tubi.
σ_p, τ_L	limiti elastici.

$$\sigma_{hk} \begin{cases} = \sigma_h & \text{(per } h = k) \\ = \tau_{hk} & \text{(per } h \neq k) \end{cases} \qquad s_{hk} \begin{cases} = \sigma_h - \bar{\sigma} & \text{(per } h = k). \\ = \tau_{hk} & \text{(per } h \neq k). \end{cases}$$

$I,\ J,\ K$	primo, secondo e terzo invariante delle σ, o delle s, o delle ε a seconda dell'indice (equazioni (27)-(32), (35)-(39), (69)-(71)).
$\vec{\sigma} = \Sigma\sigma_{hk}\vec{i}_{hk}$, $\vec{s} = \Sigma s_{hk}\vec{i}_{hk}$.	
s	modulo di $\vec{s}$.
$d\sigma_n,\ \vec{i}_t$	(87), (43).
τ_{ot}	tensione ottaedrica (50).
$\eta,\ \mu$	rapporto (46), e paramentro di Lode (modificato) (48).
$E,\ K,\ G$	modulo elastico, modulo di compressibilità, modulo tangenziale.
$\varepsilon_h,\ \gamma_{hk}$	ordinarie componenti delle piccole deformazioni.
$\varepsilon_{hk} = \varepsilon_h$	per $h = k$.
$\varepsilon_{hk} = \gamma_{hk}/2$	per $h \neq k$.
$\vec{\varepsilon} = \Sigma\varepsilon_{hk}\vec{i}_{hk}$	
$\vec{\varepsilon}^e,\ \vec{\varepsilon}^p$	vettori della deformazione elastica e della plastica.
$\vec{\varepsilon}_l$	deformazione naturale, con le componenti principali (75).
$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$	dilatazioni principali.
$\varepsilon_a,\ \varepsilon_t,\ \varepsilon_r$	dilatazioni assiale, circonferenziale e radiale, nei tubi.
γ_{ot}	scorrimento ottaedrico (116).
ν'	parametro di Lode (modificato) (103).
e_p	valore integrale della deformazione plastica (106).

Per i caratteri cirillici s'è adottata la traslitterazione seguente:

а = *a*, б = *b*, в = *v*, г = *g*(*h*), д = *d*, е = *e*, ж = *ž*, з = *z*, и = *i*, й = *j*, к = *k*, л = *l*, м = *m*, н = *n*, о = *o*, п = *p*, р = *r*, с = *s*, т = *t*, у = *u*, ф = *f*, х = *h*, ч = *č*, ц = *c*, ш = *š*, щ = *šč*, ы = *y*, ь = ′, ю = *ju*, я = *ja*.

RIFERIMENTI

59*A* – S. S. Gill, J. Parker, *Plastic stress-strain relationships. Some experiments on the effect of loading path and loading history.* « Journ. Appl. Mech. », 1959, p. 77-87.

59*B* – H. Ziegler, *A modification of Prager's hardening rule.* « Quart. Appl. Math. », 1959, p. 55-65.

59*C* – V. D. Kljušnikov, *O vozmožnom puti postroenija sootnošenij plastičnosti.* « Priklad. Matem. Meh. », 1959, p. 282-291.

59*D* – V. D. Kljušnikov, *Novye predstavlenija v plastičnosti i deformacionnaja teorija.* « Priklad. Matem. Meh. », 1959, p. 722-731.

58*A* - R. T. Shield, H. Ziegler. *On Prager's hardening rule.* « Zeit. angew. Math. Physics », 1958, p. 260-275.

58*B* J. F. Besseling, *A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep.* « Journ. Appl. Mech. », 1958, p. 529.

58*C* – L. W. Hu, J. F. Bratt, *Effect of tensile plastic deformation on yield conditions.* « Journ. Appl. Mech. », 1958, p. 411.

58*D* P. M. Naghdi, F. Essenburg, W. Koff, *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity.* « Journ. Appl. Mech. », 1958, p. 201-209.

58*E* - Ju. I. Kadaševič, V. V. Novožilov, *Teorija plastičnosti učityvajuščaja ostatočnye mikronaprjaženija.* « Priklad. Matem. Meh. », 1958, p. 78-89.

58*F* V. D. Kljušnikov, *O zakonah plastičnosti dlja materiala s upročneniem.* « Priklad. Matem. Meh. », 1958, p. 97-118.

58*G* - T. H. Lin, *On stress-strain relations based on slips.* Proc. Third U. S. Nat. Congress Appl. Mech., 1958, p. 581-587.

57*A* - D. R. BLAND, *The two measures of workhardening*. IX Intern. Congress Appl. Mech., Vol. VIII, p. 45-50.

57*B* - A. PHILLIPS, *An experimental investigation on plastic stress-strain relations*. IX Intern. Congress Appl. Mech., Vol. VIII, p. 23-33.

57*C* - T. H. LIN, *Analysis of elastic and plastic strains of a face-centred cubic crystal*. « Journ. Mech. Physics of Solids », 1957, p. 143.

56*A* - J. MARIN, L. W. HU, *Biaxial plastic stress-strain relations of a mild steel for variable stress ratios*. « A.S.M.E. Trans. », 1956, p. 409-509.

56*B* - A. PHILLIPS, L. KAECHELE, *Combined stress tests in plasticity*. « Journ. Appl. Mech. », 1956, p. 43-48.

56*C* - W. PRAGER, *A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids*. « Journ. Appl. Mech. », 1956, p. 493-496.

56*D* - S. S. GILL, *Three « neutral » loading tests*. « Journ. Appl. Mech. », 1956, p. 497.

56*E* - W. H. WARNER, G. H. HANDELMAN, *A modified incremental strain law for work-hardening materials*. « Quart. Journ. Mech. Appl. Mathematics », 1956, p. 279-293.

56*F* - A. BERIO, *Teoremi variazionali sull'equilibrio elasto-plasto-viscoso* Symposium su la Plasticità, Varenna 1956, p. 1-52.

55*A* - L. W. HU, J. MARIN, *Anisotropic loading functions for combined stresses in the plastic range*. « Journ. Appl. Mech. », 1955, p. 77-85.

55*B* - E. A. DAVIS, *Combined tension-torsion tests with fixed principal directions*. « Journ. Appl. Mech. », 1955, p. 411-415.

55*C* - P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, C. W. BEADLE, *Experiments concerning the yield surface and an assumption of linearity in the plastic stress-strain relations*. « Journ. Appl. Mech. », 1955, p. 416-420.

54*A* - S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *Polyaxial stress-strain relations of a strain-hardening material*. « Journ. Appl. Mech. », 1954, p. 323-326.

54*B* - J. L. SANDERS, *Plastic stress-strain relations based on linear loading functions*. Proc. Second U. S. Nat. Congress Appl. Mech., p. 455-460.

54*C* - A. V. HERSHEY, *The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals*. « Journ. Appl. Mech. », 1954, p. 241-249.

54*D* - T. H. LIN, *A proposed theory of plasticity based on slips*. Proc. Second U. S. Nat. Congress Appl. Mech., p. 461-468.

54*E* - M. FEIGEN, *Inelastic behavior under combined tension and torsion*. Proc. Second U. S. Nat. Congress Appl. Mech., p. 469-476.

54*F* - P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, *An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity*. « Journ. Mech. Physics of Solids », 1954, p. 63-80.

53*A* - W. T. KOITER, *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface*. « Quart. Appl. Math. », 1953, p. 350-354.

53*B* - J. MARIN, L. W. HU, *On the validity of assumptions made in theories of plastic flow for metals*. « A.S.M.E. Trans. », 1953, p. 1181-1190.

53*C* - J. MARIN, H. A. B. WISEMAN, *Plastic stress-strain relations for Aluminium Alloy 14S-T6 subiected to combined tension and torsion*. « Journal Metals », 1953, p. 1181-1190.

53*D* - J. F. BESSELING, *A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material*. « Nat. Luchtv. Lab. », Amsterdam, Rep. S. 410.

52*A* - L. W. HU, J. MARIN, *Determination of theoretical plastic stress-strain relations for variable combined stress ratios*. « Journ. Appl. Mech. », 1952, p. 485-488.

52*B* - A. PHILLIPS, *Combined tension-torsion tests for Aluminium Alloy 2S-O*. « Journ. Appl. Mech. », 1952, p. 496-500.

51*A* - J. F. W. Bishop, R. Hill, *A teory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses.* « Phylos. Magazine », 1951, p. 414-427.

51*B* D. C. Drucker, *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations.* Proc. first U. S. Nat. Congress Appl. Mech., p. 487-491.

51*C* - P. Cicala, *On plastic buckling of plates and a theory of plastic slip.* « Journ. Aeron. Sciences », 1951, p. 285-286.

51*D* B. Budiansky, N. F. Dow, R. W. Peters, R. P. Shepherd, *Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity.* Proc first U. S. Nat. Congress Appl. Mech., p. 503-512.

51*E* - F. Edelman, D. C. Drucker, *Some extensions of elementary plasticity theory.* « Journ. Franklin Inst. », 1951, p. 581-605.

51*F* - J. P. Benthem, *On the stress-strain relations of plastic deformation.* « Nat. Luchtv. Lab. », Amsterdam, Rep. S. 398.

50*A* - G. N. White, D. C. Drucker, *Effective stress and effective strain in relation to stress theories of plasticity.* « Journ. Appl. Physics », 1950, p. 1013-1021.

50*B* - D. C. Drucker, *Some implications of workhardening and ideal plasticity.* « Quart. Appl. Math. », 1950, p. 411-418.

50*C* - P. Cicala, *On plastic buckling of a compressed strip.* « Journ. Aeron. Sciences », 1950, p. 378-379.

50*D* - P. P. Bijlaard, *On plastic buckling of plates.* « Journ. Aeron. Sciences », 1950, p. 742-743.

50*E* P. Cicala, *Sobre la teorìa de Batdorf y Budiansky de la deformación plástica.* « Revista Fac. C. Exactas Fís. Naturales Córdoba », Año XIII, N. 2.

50*F* L. F. Coffin, *The flow and fracture of a brittle material.* « Journ. Appl. Mech. », 1950, p. 223-248.

50*G* R. Hill, *The mathematical theory of plasticity.* Clarendon Press, Oxford, 1950

49*A* J. C. Fisher, *Anisotropic plastic flow.* « A.S.M.E. Trans. », 1949, p. 349-356.

49*B* - W. Prager, *Recent developments in the mathematical theory of plasticity.* « Journ. Appl. Physics », 1949, p. 235-241.

49*C* - D. C. Drucker, *Relation of experiments to mathematical theories of plasticity.* « Journ. Appl. Mech. », 1949, p. 349-357.

49*D* D. C. Drucker, *A reconsideration of deformation theories of plasticity.* « A.S. M.E. » Trans., 1949, p. 587-590.

49*E* D. Trifan, *A new theory of plastic flow.* « Quart. Appl. Math. », 1949, p. 201-211.

49*F* - D. C. Drucker, *The significance of the criterion for additional plastic deformation of metals.* « Journ. Colloid Science », 1949, p. 299-311.

49*G* S. B. Batdorf, B. Budiansky, *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip.* « N.A.C.A. », Tec. Note N. 1871.

49*H* - P. W. Bridgman, *Volume changes in the plastic stages of simple compression.* « Journ. Appl. Physics », 1949, p. 1241-1251.

49*I* G. Colonnetti, *Les phénomènes de coaction élasto-plastique et l'adaptation a la résistance des matériaux.* « Ann. Inst. Tech. Bat. Trav. Publ. », 1949, N. 99.

48*A* - S. J. Fraenkel, *Experimental studies of biaxially stressed mild steel in the plastic range.* « Journ. Appl. Mech. », 1948, p. 193-200.

48*B* - H. E. Davis, E. R. Parker, *Behavior of steel under biaxial stresses as determined by tests on tubes.* « Journ. Appl. Mech. », 1948, p. 201-215.

48*C* - W. Prager, *Theory of plastic flow versus theory of plastic deformation.* « Journ. Appl. Physics », 1948, p. 540-543.

48*D* - W. Prager, *The stress-strain laws of the mathematical theories of plasticity. A survey of recent progress.* « Journ. Appl. Mech. », 1948, p. 226-233.

47*A* – G. H. Handelman, C. C. Lin, W. Prager, *On the mechanical behaviour of metals in the strain-hardening range.* « Quart. Appl. Math. », 1947, Vol. IV, p. 397-407.

47*B* W. R. Osgood, *Combined-stress tests on 24S-T tubes.* « Journ. Appl. Mech. », 1947, p. 147-153.

47*C* - D. M. Cunningham, E. G. Thomsen, J. E. Dorn, *Plastic flow of a Magnesium Alloy under biaxial stresses.* « Proc. Amer. Soc. Testing Materials », 1947, p. 546-553.

45*A* W. Prager, *Strain hardening under combined stresses.* « Journ. Appl. Physics », 1945, p. 837-840.

38*A* G. I. Taylor, *Plastic strain in metals.* « Journ. Institute Metals », 1938, p. 307-324.

35*A* - W. Prager, *Der Einfluss der Verformung auf die Fliessbedingung zähplastischer Körper,* « Zeit. angew. Math. Mech. », 1935, p. 76-80.

31*A* – G. I. Taylor, H. Quinney, *The plastic distortion of metals.* « Philos. Trans. Royal Soc. », London, Ser. A, 1931, p. 323-362.

26*A* – W. Lode, *Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle Eisen Kupfer und Nickel.* « Zeit. Physik », 1926, p. 913.

CITAZIONI INDIRETTE [56]

Bibl. 1. - W. Prager, *The theory of plasticity: a survey of recent achievements.* « Proc. Inst. Mech. Engin. », 1955, p. 41-57.

2. A. M. Žukov, Ju. N. Rabotnov, *Issledovanie plastičeskih deformacij stali pri složnom nagruženii.* Inzener. Sbornik, 1954.

3. - V. A. Svešnikova, *O plastičeskom deformirovanii upročnjajuščihsja metallov.* « Izv. Akad. Nauk SSSR », Otd. Teh. Nauk, 1956.

4. - J. Marin, L. W. Hu, *Plastic stress-strain relations for biaxial tension and variable stress ratio.* « Proc. Amer. Soc. Test. Materials », 1952, p. 1098-1123.

5. – S. B. Batdorf, *The interpretation of biaxial-tension experiments involving constant stress ratios.* « N.A.C.A. », Tec. Note N. 2029.

6. - F. D. Stockton, D. C. Drucker, *Fitting mathematical theories of plasticity to mathematical results.* « Journ. Colloid Science », 1950, p. 239-250.

7. J. L. Morrison, W. M. Shepherd, *An experimental investigation of plastic stress-strain relations.* « Proc. Inst. Mech. Eng. », 1950, p. 1-97.

8. - F. S. Shaw, G. W. Wycherley, *Experiments on the plasticity of metals. The octahedral shear stress loading criterion.* « Structure and Materials », Note 181, Dept. of Supply, Australia 1950.

9. – D. C. Drucker, *Stress-strain relations in the plastic range.* « Rep. A11-S1 Graduate Division of Appl. Math., Brown University, Providence, 1950.

10. E. G. Thomsen, I. Cornet, I. Lotze, J. E. Dorn, *Investigation of the validity of an ideal theory of elastoplasticity for wrought Aluminium Alloys.* « N.A.C.A. » Tec. Note N. 1552.

11. – A. K. Malmejster, *Plastičnost' kvazilinejnogo tela.* « Sbornik Voprosy dinamiki i dinamičeskoj pročnosti », Akad. Nauk Riga, 1956.

12. – A. Ju. Išlinskii, *Obščaja teorija plastičnosti s lineinym upročneniem.* « Ukr. Mat. Ž. », N. 3, 1954.

---

[56] Lo scrivente non ha avuto modo di consultare direttamente queste opere.

RELAZIONE

LETTA ED APPROVATA NELL'ADUNANZA DEL 30 NOVEMBRE 1960
SULLA MEMORIA DI HALINA MILICER GRUZEWSKA INTITOLATA

RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION DU SYSTÈME PARABOLIQUE D'ÉQUATION

In questa memoria l'Autrice reca notevoli contributi allo studio delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari a derivate parziali di tipo parabolico.

Lo studio stesso riflette le proprietà delle soluzioni in corrispondenza ad opportune ipotesi sui coefficienti delle equazioni, le quali proprietà possono anche essere utilizzate per pervenire a teoremi di unicità nei problemi d'integrazione che si pongono per le considerate equazioni.

La memoria, per la novità del contenuto, appare degna di essere accolta, per la sua pubblicazione, negli Atti dell'Accademia.

La Commissione

MAURO PICONE (*Relatore*)
FRANCESCO TRICOMI
CATALDO AGOSTINELLI

RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION DU SYSTÈME PARABOLIQUE D'ÉQUATIONS

Memoria di H. MILICER GRUZEWSKA
presentata dal Socio nazionale non residente Mauro PICONE
nell'adunanza del 30 Novembre 1960

Introduction.

On doit à M. M. Picone [1] ses beaux théorèmes sur les signes et les valeurs extrémales de la solution de l'équation parabolique. Il était intéressant de savoir si ces résultats pouvaient être énoncés pour la solution du système parabolique d'équations. Ce système a été récemment résolu et étudié par M. W. Pogorzelski, [2] - [4], les hypothèses admises étant d'une grande généralité (¹).

Grâce aux théorèmes d'unicités, [6] et [7], et à quelques propriétés probabilistes des solutions, dont il s'agit, [8], il a été possible de résoudre cette question définitivement. A savoir, si les composantes de la valeur initiale de la solution du système de second ordre, sans termes linéaires, sont les mêmes, la généralisation est possible. Elle est même presque automatique. Par contre, si au moins, une des dites composantes est différente, les théorèmes de M. M. Picone aussi bien sur les signes que sur les valeurs extrémales de la solution ne se transportent pas.

Outre ce résultat principal, l'article actuel présente une revue des diverses propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles, ce qui justifie son titre.

1. — Soient E l'espace euclidien à n dimensions de points $X = X(x_1, \dots x_n)$; le temps t la variable non négative et bornée $(0 \leq t \leq T =$

(¹) Pour les solutions des systèmes paraboliques aux hypothèses moins générales, ou les résultats moins précis et accomplis voir les articles cités sous [11] et [12].

$= \text{const.})$. $\mathfrak{E} = (E^* < O, T >)$ leur produit cartésien et

$$(1,1) \qquad \hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \dots u_N) = \sum_{1 \leq j \leq N}^{0 \leq \mathfrak{S} \leq M} A_{\alpha j}^{k_1, \dots k_n}(X, t) \frac{\partial^{\mathfrak{S}} u_j}{\partial x^{k_1}, \dots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 ,$$

$$0 \leq k_l \leq M, \ l = 1, \dots n, \ \mathfrak{S} = k_1 + \dots + k_n, \ X \in E, \ 0 < t \leq T,$$

$$\alpha = 1, \dots N, \ N > 1, \ M > 1 ,$$

le système parabolique en question, où $u_1(X, t), \dots u_N(X, t)$ $(X, t) \varepsilon \mathfrak{E}$ sont les composantes de la solution $(u_1, \dots u_N)$.

On suppose, comme dans l'article [2], que les coefficients sont soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les coefficients du système (1,1) sont bornés et continus dans $\mathfrak{E}$. Ils sont höldériens par rapport à la variable spatiale X et les coefficients des dérivées d'ordre M sont de plus höldériens par rapport au temps t, à savoir:

$$(2,1) \qquad |A_{\alpha j}^{k_1, \dots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1, \dots k_n}(Y, \tau)| \leq \begin{cases} C[|XY|^h + |t - \tau|^{h'}], & \mathfrak{S} = M \\ C|XY|^h, \ 0 \leq \mathfrak{S} \leq M, & t = \tau \end{cases}$$

$$(X, t), (Y, \tau) \in \mathfrak{E}; \ \alpha, j = 1, \dots N, \ 0 \leq \mathfrak{S} = k_1 + \dots + k_n \leq M;$$

$$0 \leq k_l \leq M, \ l = 1, \dots n .$$

II. Le système (1,1) est parabolique selon Petrovsky [10], c'est-à-dire: les racines λ_α, $\alpha = 1, \dots N$ de l'équation:

$$(3,1) \qquad \det_{\alpha, \beta} \left| \sum_{0 \leq k_l \leq M}^{\mathfrak{S} = M} A_{\alpha\beta}^{k_1, \dots k_n}(X, t) (is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} - \delta_\alpha^\beta \lambda \right| = 0, \ \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}$$

$$l = 1, \dots n \quad \alpha, \beta = 1, \dots N; \quad s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1$$

ont leurs parties réelles négatives:

$$(4,1) \qquad R_e(\lambda_\alpha) < -\delta < 0, \quad \alpha = 1, \dots N_1 \leq N$$

(δ_α^β est ici le symbole de Kronecker).

Outre ces deux hypothèses on admettra dans la partie 3, pour $M = 2$, l'ypothèse suivante:

III. Les formes quadratiques:

$$(5,1) \qquad \sum_{j=1}^{N} \sum_{0 \leq k_l \leq 2}^{\mathfrak{S}=2} A_{\alpha j}^{k_1, \dots k_n}(X, t) s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}, \quad \alpha = 1, \dots N$$

sont définies positives.

Soient N solutions fondamentales [2] du système (1,1):

$$(\Gamma_{\alpha 1}, \dots \Gamma_{\alpha N})\alpha = 1, \dots N \, . \tag{6,1}$$

Ces solutions sont normées [9], [2].
Selon la définition de l'article [2] on a la relation suivante:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \tag{7,1}$$

$$= W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{E}\sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{Z,\theta}(X, t; Z, \theta)\Phi_{\gamma\beta}(Z, \theta; Y, \tau)dZd\theta =$$

$$= W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau) + W_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) \, ,$$

où

$$\{W_{\alpha\beta}^{Z,\theta}(X, t; Y, \tau)\}\alpha = 1, \dots N \, , \quad \beta = 1, \dots N$$

sont les quasi-solutions du système (1,1). Elles sont définies par les solutions du système d'équations linéaires:

$$\frac{dV_{\alpha}^{\beta}}{dt} = \sum_{1 \leq j \leq N}^{\Xi = M} A_{\alpha j}^{k_1, \dots k_n}(Z, \theta)\,(is_1)^{k_1}\dots(is_n)^{k_n} V_j^{\beta}(t, \tau; Z, \theta; S) \, , \tag{8,1}$$

à valeurs initiales:

$$V_{\alpha}^{\beta}(\tau, \tau; Z, \theta; S) = \delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{8',1}$$

$$S = S(s_1, \dots s_n) \in E \, , \quad \alpha, \beta = 1, \dots N \, ,$$

et

$$W_{\alpha\beta}^{Z,\theta}(X, t; Y, \tau) = \tag{8'',1}$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{E} V_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; Z, \theta; S)\exp\left[i\sum_{\nu=1}^{n} s_{\nu}(x_{\nu} - y_{\nu})\right] ds_1, \dots ds_n \, .$$

On sait, voir [2] page 4, que:

$$V_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; Z, \theta; S) = \tag{8''',1}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N_1}[K_{\alpha\nu\mu_{\nu}}^{\beta} s^{M\mu_{\nu}}(t-\tau)^{\mu\nu} + \dots + K_{\alpha\nu 1}^{\beta} s^{M}(t-\tau) + K_{\alpha\nu 0}^{\beta}]e^{\lambda'_{\nu} s^{M}(t-\tau)} \, ,$$

où

$$s^2 = s_1^2 + \dots + s_n^2, \quad \lambda'_{\alpha} = \lambda_{\alpha}, \quad si \quad s^2 = 1, \quad \alpha = 1, \dots N. \tag{8^{IV},1}$$

μ_ν est l'ordre de la racine λ_ν; N_1 le nombre des différentes racines λ_ν; les constantes $K^\beta_{\alpha\nu l}$, $l = 0, 1, \dots \mu_\nu$ dépendent des coefficients $A_{\alpha j}(Z, \theta)$ et des variables $s_1/s, \dots s_n/s$; elles sont bornées dans toute l'espace $\mathfrak{E}$.

2. — La parité des quasi-solutions du système (1,1.)

On a comme un corollaire immédiat de la définition de l'équation de Petrovsky (3,1) pour le système parabolique de second ordre et du § 5 de l'article [8], le lemme suivant:

LEMME (1, 2). La condition nécéssaire et suffisante pour la parité, par rapport à chaque variable réelle $s_1, \dots s_n$ de toutes les racines λ_ν, de l'équation de Petrovsky du système parabolique d'équations de second ordre, et des coefficients $K^\beta_{\alpha\nu l}$, $l = 0, \dots \mu_\nu$, $\nu = 1, \dots N_1$ de l'expression (8''',1), est que les coefficients des dérivées du second ordre par rapport aux différentes variables spatiales du système (1,1) soient nuls, les hypothèses I et II étant admises.

LA CONDITION EST SUFFISANTE. En effet, il résulte des égalités:

$$A^{k_1,\dots k_n}_{\alpha\beta}(X,t) = 0,\ (X,t) \in \mathfrak{E}\ k_i = k_j = 1,\ i \neq j,\ k_1 + \dots + k_n = 2,\ i,j = 1, \dots n,$$
$$\alpha, \beta = 1, \dots N$$

et de l'équation (3,1), pour $M = 2$, que dans cette équation ne figurent que les puissances paires des variables réelles $s_1, \dots s_n$; les racines λ_ν et les coefficients $K^\beta_{\alpha\nu l}$, $l = 0,1, \dots \mu_\nu$, $\nu = 1, \dots N_1$ sont donc fonctions paires de chacune de ces variables $s_1, \dots s_n$.

LA CONDITION EST NÉCÉSSAIRE. En effet, nous avons démontré dans le § 5 de l'article [8] qu'il résulte de la supposition de la parité des racines λ_ν et des coefficients $K^\beta_{\alpha\nu l}$, $l = 0,1, \dots \mu_\nu$, $\nu = 1, \dots N_1$ par rapport à chacune variable réelle $s_1, \dots s_n$ que:

$$A^{k_1,\dots k_n}_{\alpha\beta}(X,t) \equiv 0,\ k_i = k_j = 1, i \neq j, i,j = 1, \dots n, k_1 + \dots + k_n = 2, \alpha, \beta = 1, \dots N,$$
$$(X,t) \in \mathfrak{E}.$$

C'est le résultat de l'étude de l'intégrale suivante:

$$(\Delta t)^{-1} \int_E (y_i - x_i)(y_j - x_j) W^{Y,t+\Delta t}_{\alpha\beta}(X, t; Y, t + \Delta t) dY,\ i \neq j,\ i, j = 1, \dots n,$$
$$\alpha, \beta = 1, \dots N$$

qui converge, avec $\Delta t \to 0$, en même temps vers:

$$A^{k_1,\dots k_n}_{\alpha\beta}(X,t),\ k_i = k_j = 1,\ i \neq j,\ k_1 + \dots + k_n = 2;\ i,j = 1, \dots n,$$
$$\alpha, \beta = 1, \dots N$$

et vers zéro, au cas de la parité des racines λ_ν et des coefficients $K^\beta_{\alpha\nu l}$, $l = 0, 1, \dots \mu_\nu$, $\nu = 1, \dots N_1$ pour chaque variable réelle $s_1, \dots s_n$.

COROLLAIRE (1,2). La condition nécéssaire et suffisante de la parité par rapport à chaque variable réelle $s_1 \dots s_n$ de toutes les fonctions V^β_α, définies par les formules (8''',1), est que les coefficients des dérivées secondes par rapport aux différentes variables spatiales du système (1,1) soient nuls, les hypothèses du lemme (1,2) étant admises.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme (1,2) et de la définition des fonctions V^β_α.

D'ici et des lemmes (2,5) et (1,7) de l'article [8] résulte facilement le

THÉORÈME (1,2). La condition nécéssaire et suffisante pour la parité de chaque quasi-solution du système parabolique (1,1) de second ordre, par rapport aux accroissements de toutes les coordonnées des points X et Y: $x_\nu - y_\nu$, $\nu = 1, \dots n$, est que les coefficients des dérivées secondes par rapport aux différentes variables spatiales soient nuls, les hypothèses I et II étant admises.

REMARQUE (1,2). Il semble que cette conclusion subsiste même si l'ordre du système parabolique est arbitraire (pair). En effet, la condition:

$$A^{k_1, \dots k_n}_{\alpha\beta}(X, t) = 0, \ k_i \neq 2l, \ 1 \leq i \leq n, \ k_1 + \dots + k_n = M, \ \alpha, \beta = 1, \dots N$$

est suffisante pour la parité des racines λ_ν et des coefficients

$$K^\beta_{\alpha\nu l}, \ l = 0, 1, \dots \mu_\nu, \ \nu = 1, \dots N_1 .$$

La démonstration qu'elle est aussi nécéssaire sera sans doute compliquée. Mais pourra-t-on réussir peut-être en étudiant les limites des intégrales:

$$(\Delta t)^{-M/2} \int_E (x_{i_1} - y_{i_1}) \dots (x_{i_M} - y_{i_M}) W^{Y, t+\Delta t}_{\alpha\beta}(X, t; Y, t + \Delta t)\, dY$$
$$(i_1, \dots i_M) \in (1, \dots n) .$$

3. — Une généralisation des théorèmes d'unicités (1er et 2d).

Soit

$$\Psi^{(\alpha)}(u_1, \dots u_N) = F_\alpha(X, t), \ \alpha = 1, \dots N; \ (X, t) \in \mathfrak{E} \qquad (1,3)$$

un système parabolique de N équations d'ordre M, avec les coefficients soumis aux hypothèses I et II.

On admet l'hypothèse suivante:

IV. *Les fonctions* $(F_1 \dots F_N)$ *et* $(f_1, \dots f_N)$ *sont continues et bornées dans* $\mathfrak{E}$ *et höldériennes par rapport à la variable spatiale* X.

On déduit facilement de l'article [3] ainsi que des Théorèmes d'unicités 1^er^ et 2^d^, [6] et [7] les théorèmes que voici.

THÉORÈME (1,3). Les solutions $(U_1, \dots U_N)$ du système (1,3), qui appartiennent à la classe d'unicité Z_1 ou Z'_1 avec la même fonction initiale $(f_1, \dots f_N)$, sont identiques, les hypothèses I, II et IV étant admises.

THÉORÈME (2,3). Admettons les hypothèses I, II et IV. La solution unique du système (1,3) qui appartient à la classe Z'_1, avec la fonction initiale $(f_1, \dots f_N)$ prend la forme suivante:

$$(2,3) \qquad u_\alpha(X,t) = \int_E \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{\alpha l}(X,t;Y,0) f_l(Y)dY - \int_0^t \int_E \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{\alpha l}(X,t;Y,\tau) F_l(Y,\tau)dYd\tau,$$
$$\alpha = 1, \dots N.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (1,3).

Soit, en effet, deux solutions $(u_1, \dots u_N)$, et $(\overline{u}_1, \dots \overline{u}_N)$ de la même classe d'unicité Z_1 ou Z'_1 avec la même fonction initiale $(f_1, \dots f_N)$. Leur différence $(u_1 - \overline{u}_1, \dots u_N - \overline{u}_N)$ est identiquement nulle au moment initial $(t = 0)$, elle vérifie le système d'équations:

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1 - \bar{u}_1, \dots u_N - \bar{u}_N) = 0, \ \alpha = 1, \dots N, \ X \in E, \ 0 < t \leq T,$$

et appartient à la même classe d'unicité Z_1 ou Z'_1. Elle est donc identiquement nulle. C'est pourquoi on peut écrire:

$$(u_1, \dots u_N) \equiv (\bar{u}_1, \dots \bar{u}_N); \ (X,t) \in \mathfrak{E}.$$

DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME (2,3).

Il a été démontré dans l'article [4], l'hypothèse IV étant admise [2], que les fonctions (2,3) constituent la solution du système (1,3) à valeur initiale $(f_1, \dots f_N)$. Il a été démontré dans l'article [7] que le premier composant de la somme (2,3) appartient à la classe Z'_1, l'hypothèse IV étant admise. Il résulte de cette hypothèse, ainsi que de la forme du second com-

---

[2] En y supposant seulement que les fonctions: $(f_1, \dots f_N)$ et $(F_1, \dots F_N)$ sont exponentiellement bornées.

posant (2,3), que celui-ci est aussi de la classe Z'_1. La solution (2,3) est donc de la classe Z'_1. Le théorème (2,3) est donc démontré à cause du théorème (1,3), c.q.f.d.

On reçoit du théorème (2,3) un intéressant corollaire, en remarquant que l'unité $(\underbrace{1, \dots 1}_{n \text{ fois}})$ est la solution du système suivant:

$$(3,3) \qquad \hat{\Psi}^{(a)}(u_1, \dots u_N) = \sum_{1 \le j \le N} A^{0, \dots 0}_{aj}(X, t), \quad a = 1, \dots N .$$

En vertu du théorème (2,3) sa solution unique, avec la valeur initiale (1, ... 1), est la suivante:

$$(4,3) \qquad u^{(a)}(X, t) =$$

$$- \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{a\beta}(X, t; Y, 0) dY - \int_0^t \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{a\beta}(X, t; Y, \tau) \sum_{j=1}^{N} A^{0, \dots 0}_{\beta j}(Y, \tau) dY d\tau ,$$

$$a = 1, \dots N .$$

On a donc identiquement:

$$(5,3) \qquad \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{a\beta}(X, t; Y, 0) dY -$$

$$- \int_0^t \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{a\beta}(X, t; Y, \tau) \sum_{j=1}^{N} A^{0, \dots 0}_{\beta j}(Y, \tau) dY d\tau = 1 .$$

En faisant intervenir la solution (0, 0, ... 1, 0, ... 0), où l'unité est à la l-ième place, pour le système:

$$\hat{\Psi}_a(u_1, \dots u_N) = A^{0, \dots 0}_{al}(X, t), \quad a = 1, \dots N$$

on trouve au lieu de l'égalité (5,3) les égalités suivantes:

$$(5',3) \qquad \int_E \Gamma_{al} dY - \int_0^t \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{a\beta} A^{0, \dots 0}_{\beta l} dY d\tau = \delta^l_a ,$$

(symbole de Kronecker).

On vérifie sans difficulté que les formules (5,3) et (5',3) ne se contredisent pas:

THÉORÈME (3,3). la différence de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass, de densité unitaire, et du potentiel de charge spatiale, cons-

tituée par les coefficients linéaires du système parabolique (1,3), est identiquement égale à un. Les hypothèses I et II sont ici admises.

Voilà encore une conséquence du 1^er^ théorème d'unicité [6] et des propriétés probabilistes des solutions du système parabolique de second ordre [8].

THÉORÈME (4,3). Supposons les hypothèses I, II et III. Soit:

$$W_{\alpha\beta}^{Z,\xi}(X,t;Y,\tau),\ (X,t),\ (Y,\tau),\ (Z,\xi)\in\mathfrak{E},\quad \alpha,\beta=1,\dots N$$

la matrice de quasi-solutions du système parabolique (1,1) du second ordre ($M=2$). Soit

$$w_{\alpha}^{Z,\xi}(X,t;Y,\tau)$$

la quasi-solution [5] de l'équation:

$$(6,3)\qquad \sum_{i\le j=1}^{n}\left[\sum_{1\le\beta\le N}^{\mathfrak{S}=2} A_{\alpha\beta}^{k_1,\dots k_n}(Z,\xi)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial t}=0\,,\qquad 1\le\alpha\le N$$

$$\mathfrak{S}=k_1+\dots+k_n,\ k_i=k_j=1,\ i\neq j;\ k_i=2,\ i=j;\ i,j=1,\dots n\,.$$

On a N formules asymptotiques suivantes:

$$(7,3)\qquad \left[\sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\right]-w_{\alpha}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\to 0\,,\quad t\to\tau$$

dès que:

$$(7',3)\qquad 0<a\le|XY|/\sqrt{t-\tau}\le b$$

les constantes a et b étant suffissamment petites uniformément par rapport à X et $Y\in E$ pour $t-\tau\to 0$, $\alpha=1,\dots N$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)$; $\alpha,\beta=1,\dots N$ la matrice de solutions du système parabolique (1,1) de second ordre, sans termes linéaires. On a démontré dans le § 6 de l'article [8] que l'on a identiquement:

$$(8,3)\qquad P_\alpha(X,t;Y,\tau)=\sum_{\beta=1}^{N}P_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\equiv\Gamma_\alpha(X,t;Y,\tau)$$

où $\Gamma_\alpha(X,t;Y,\tau)$ est la solution fondamentale normée d'une équation parabolique (K_α) [3] [8] dont la forme caractéristique est celle de l'équation (6,3), avec (Z,ξ) remplacé par (X,t) [8]. Il résulte du Lemme (2,7) et du

---

[3] L'équation K_α est l'équation (2,4) de l'article [8] (v. les théorèmes (1,4), (1,6 et les par. 7 et 8 de [8]).

§ 8 de cet article (formules (2,8) (3,8) et conséquences) qu'on peut écrire en admettant l'inégalité (7',3) que

$$(9,3) \quad P_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,(1 + {}_0(1)),\ {}_0(1) \to 0,\ t - \tau \to 0$$

$$(9',3) \quad \Gamma_{\alpha}(X, t; Y, \tau) = w_{\alpha}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,(1 + {}_0(1)),\ {}_0(1) \to 0,\ t - \tau \to 0\,.$$

Les égalités (9,3), (9',3) et (8,3) démontrent la formule (7,3), c.f.f.d.

Observons que les formules (9,3) et (9',3) n'exigent que les hypothèses I et II ([8]). La formule (7,3) ne dépend que de la partie principale du système (1,1), les hypothèses I, II et III étant admisent. Cette formule tient donc pour chaque système de second ordre soumis aux hypothèses I, II et III, même si les termes linéaires du système (1,1) ne disparaissent pas.

4. — La matrice du système conjuguè au système parabolique (1,1).

Il a été démontré par Eidelmann [11] pour sa matrice

$$\{\gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots N$$

des solutions fondamentales du système (1,1), où il a supposé les coefficients quelques fois différentiables, [11], que la matrice des solutions fondamentales du système adjoint:

$$\{\gamma^*_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots N$$

est liée avec la première par la relation:

$$\gamma^*_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \gamma_{\beta\alpha}(Y, \tau; X, t), \quad \alpha, \beta = 1, \dots N\,.$$

Un pareil théorème peut être énoncé pour la matrice des solutions introduite dans l'article [2] par M. W. Pogorzelski, à savoir pour la matrice:

$$\{\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots N\,.$$

Supposons que les coefficients du système (1,1) sont différentiables un suffisant nombre de fois pour qu'on puisse écrire le système adjoint au système (1,1), à savoir:

$$(1,4) \quad {}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}(v_1, \dots v_n) = \sum_{1 \le j \le N}^{0 \le \mathfrak{S} \le M} (-1)^{\mathfrak{S}} \frac{\partial^{\mathfrak{S}} A_{j\alpha}^{k_1, \dots k_n}(X, t)\, v_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = 0\,,$$

$$k_1 + \dots + k_n = \mathfrak{S}, \quad \alpha = 1, \dots N\,.$$

On remarque en passant [7] que les formes caractéristiques des systèmes (1,1) et (1,4) pour $N = 1$ sont les mêmes, car alors

$$A_{ja}^{k_1,\dots k_n}(X,t) = A_{aj}^{k_1,\dots k_n}(X,t),\ k_1 + \dots + k_n = M;\ a, j = 1 .$$

Il est évident que l'on doit admettre l'hypothèse suivante:

V. *Les dérivées:*

$$(2,4)\qquad \frac{\partial^{\mathfrak{S}'} A_{ja}^{k_1,\dots k_n}(X,t)}{\partial x_1^{k'_1}, \dots \partial x_n^{k'_n}} \qquad \begin{array}{l} k_1 + \dots + k_n = \mathfrak{S},\ 0 \leq \mathfrak{S} \leq M \\ k'_1 + \dots + k'_n = \mathfrak{S}' \\ 0 \leq \mathfrak{S}' \leq \mathfrak{S} \end{array}$$

existent, sont continues dans $\mathfrak{E}$, *sont hölderiennes par rapport à la variable spatiale* $X \in E$; *au cas où* $\mathfrak{S}' = 0$, $\mathfrak{S} = M$ *elles sont aussi hölderiennes par rapport au temps* t (voir l'hypothèse I).

Soit

$$(3,4)\qquad {}^*\Gamma_{\alpha\beta}(X, t;\ Y, \tau),\quad \alpha, \beta = 1, \dots N,\ t < \tau$$

la matrice des solutions fondamentales du système (1,4), selon la définition de l'article [2] l'hypothèse V étant admise.

Observons que le système (1,4) est aussi bien parabolique que le système (1,1). En effet, le déterminant de Petrovsky pour le système (1,4) est le suivant:

$$(4,4)\qquad \det_{\alpha,\beta} \left| \sum_{\substack{0 \leq k_l \leq M \\ l = 1,\dots n}}^{\mathfrak{S} = M} A_{\beta a}^{k_1,\dots k_n}(X,t)\,(is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} - \delta_\beta^a \lambda \right| = 0 .$$

Mais ce déterminant revient au déterminant (3,1), si l'on remplace les lignes par les colonnes, ce qui ne change pas sa valeur.

Observons qu'on peut écrire grâce à la propriété de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass ([4] th. 4 et th. 3) et au 2[d] théorème d'unicité [7], que

$$(6,4)\qquad \int_E \sum_{a=1}^{N} \Gamma_{\beta a}(Z, \tau;\ X, t) \int_E \sum_{\nu=1}^{N} \Gamma_{a\nu}(X, t;\ Y, \theta) U_\nu(Y, \theta) dY dX =$$

$$= \int_E \sum_{\nu=1}^{N} \Gamma_{\beta\nu}(Z, \tau;\ Y, \theta) U_\nu(Y, \theta) dY ,\quad \tau \geq t > \theta$$

les composantes $U_\nu(Y, \theta)$, $\nu = 1, \dots N$ étant soumises à l'hypothèse IV.

Nommons comme dans l'article [2]

$$(7,4) \qquad \int_E \sum_{\nu=1}^{N} \Gamma_{\alpha\nu}(X,t;Y,\theta)U_\nu(Y,\theta)dY = J_\alpha(X,t,\theta) = u_\alpha(X,t), \quad t>\theta$$

et posons dans le cas actuel

$$(7',4) \qquad \Gamma_{\beta\alpha}(Z,\tau;X,t) = V_{\alpha\beta}(X,t;Z,\tau), \quad \alpha,\beta = 1,\dots N.$$

Nous démontrerons que

$$(8,4) \qquad {}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}[V_{1\beta},\dots V_{N\beta}] \equiv 0, \quad \alpha,\beta = 1,\dots N, \quad \tau > t.$$

En effet, on a démontré dans l'article [6], (4,3), pour les fonctions u_α et V_α de la classe Z_1, la formule suivante:

$$(9,4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\int_E [u_\alpha(X,t){}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}(V_1,\dots V_N) - V_\alpha(X,t)\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1,\dots u_N)]dXdt =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\int_E [u_\alpha(X,t_2)V_\alpha(X,t_2) - u_\alpha(X,t_1)V_\alpha(X,t_1)]dX, \quad t_1 < t_2.$$

Cette formule subsiste aussi dès que:

$$(9',4) \qquad \frac{\partial^R u_\alpha}{\partial x_1^{l_1},\dots \partial x_n^{l_n}} \; \frac{\partial^{\mathfrak{S}-R} V_{\alpha\beta}}{\partial x_1^{k_1},\dots \partial x_n^{k_n}} \to 0, \; |x_j| \to \infty, \; 1 \leq j \leq n, \; t_1 \leq t \leq t_2$$

où

$$R = l_1 + \dots + l_n; \; \mathfrak{S} - R = k_1 + \dots + k_n, \; 0 \leq R \leq \mathfrak{S}, \; \mathfrak{S} = 0, 1, \dots M.$$

Ce fait-là est mentionné dans le Lemme (1,3) de l'article [7]. La formule (6,4), vu les définitions (7,4) et (7',4), prend la forme:

$$(10,4) \qquad \int_E \sum_{\alpha=1}^{N} V_{\alpha\beta}(X,t;Z,\tau)J_\alpha(X,t,\theta)dX \equiv J_\beta(Z,\tau,\theta), \; \theta < t \leq \tau; \; \beta = 1,\dots N$$

et la formule (9,4), où l'on remplace u_α par J_α et V_α par $V_{\alpha\beta}$, la forme:

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\int_E J_\alpha(X,t,\theta){}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}(V_{1\beta},\dots V_{N\beta})dXdt =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\int_E V_{\alpha\beta}(X,t_2;Z,\tau)J_\alpha(X,t_2,\theta) - V_{\alpha\beta}(X,t_1;Z,\tau)J_\alpha(X,t_1,\theta)dX \equiv$$

$$\equiv J_\beta(Z,\tau,\theta) - J_\beta(Z,\tau,\theta) \equiv 0, \quad \beta = 1,\dots N$$

dès que:

$$\theta \leq t_1 < t_2 \leq \tau$$

à cause de la formule (10,4) et du théorème 4, [4].

Nous démontrerons l'impossibilité des égalités:

$$(11,4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \int_E J_\alpha(X, t, \theta) {}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}(V_{1\beta}, \dots V_{N\beta}) dX dt \equiv 0, \quad (\beta = 1, \dots N)$$

où:

$$\theta \leq t_1 < t_2 < \tau$$

les fonctions $U_\alpha(Y, \theta)$ outre l'hypothèse IV, étant arbitraires, sans que

$$(12,4) \qquad {}^*\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{X,t}(V_{1\beta}, \dots V_{N\beta}) \equiv 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots N$$

les égalités (9',4) étant valables.

En effet, supposons par exemple

$${}^*\hat{\Psi}^{(1)}_{X,t}(V_{11}, \dots V_{N1}) \neq 0$$

pour

$$(X, t; Z, \tau) = (X_0, t_0; Z_0, \tau_0), \quad t_0 < \tau_0 ,$$

car c'est le cas qui nous intéresse. Soit par exemple:

$$(12',4) \qquad [{}^*\hat{\Psi}^{(1)}_{X,t}(V_{11} \dots V_{N1})]_{(X_0,t_0;Z_0,\tau_0)} > 2\mathfrak{E} > 0, \quad \mathfrak{E} < 1; \ t_0 < \tau_0$$

et soit, à cause de la continuité de l'opérateur ${}^*\Psi^{(1)}_{X,t}$ dans l'entourage du point (X_0, t_0): $(K_0 {}^* i_0)$, $i_0 = (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ où l'on a:

$$(12'',4) \qquad [{}^*\hat{\Psi}^{(1)}_{X,t}(V_{11}, \dots V_{N1})]_{(X,t;Z_0,\tau_0)} > \mathfrak{E}, \ (X, t) \in (K_0 \times i_0) .$$

Posons maintenant:

$$(13,4) \qquad U_\alpha(X, t) = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha \neq 1 \\ U(X), & \alpha = 1 . \end{cases}$$

La fonction $U(X)$ est supposée positive, bornée et différentiable partout; outre celà

$$U(X) = 0, \qquad X \bar{\in} K_0$$

mais

$$(13',4) \qquad \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \int_{K_0} U(X) dX dt = 2\eta .$$

Posons aussi:

$$\theta < t_0 - \eta = t_1; \quad t_0 + \eta = t_2 < \tau_0 .$$

Observons que [4]:

$$J_a(X, t, \theta) \underset{t \to \theta}{\rightarrow} \begin{cases} 0 & , a \neq 1 \\ U(X), & a = 1 . \end{cases}$$

Si donc le nombre positif η_1 est suffisamment petit, on peut écrire pour

$$0 < t - \theta < \eta_1, \quad t \in i_0$$

$$\int_E \operatorname{Max} | {}^*\Psi^{(a)}_{X,t}(V_{11}, \dots V_{N1}) | dX \leq A, \; t < t_0 + \eta = t_2 < \tau_0 = \tau$$

$$X, Z \in E; \quad t \in i_0 .$$

(14,4) $$| J_a(X, t, \theta) | < \frac{\mathfrak{E}}{4AN}, \; a = 2, \dots N, \; X \in E ,$$

et

$$a = 1 \text{ si } X \bar{\in} K_0,$$

et:

(14',4) $$\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \int_{K_0} J_1(X, t, \theta) dX dt = 2\eta + \frac{\mathfrak{E}\theta'}{2} \eta, \quad |\theta'| < 1 .$$

Il suffit donc que:

$$t_0 + \eta - \theta < \eta_1 .$$

On peut poser

(14'',4) $$\theta = t_0 - \eta$$

et alors

$$t_0 + \eta - (t_0 - \eta) < \eta_1$$

$$2\eta < \eta_1 .$$

Il suffit de poser

$$\eta < \frac{\eta_1}{2} .$$

Le nombre η_1 ne dépendra pas de η mais seulement des coefficients du système (1,1). Dès qu'il fût fixé, on a aussi assujetti le nombre η et la fonction U_a (X, t) par les formules (13,4) et (13',4). Les formules (11,4), (14,4), (14',4) et (14'',4) permettent d'écrire que:

(15,4) $$0 \equiv \sum_{a=1}^{N} \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} \int_E J_a(X, t, t_0 - \eta) \times$$

$$\times {}^*\hat{\Psi}^{(a)}_{X,t}(V_{11}(X, t; Z_0, \tau_0), \dots V_{N1}(X, t; Z_0, \tau_0) dX dt \geq 2\eta\mathfrak{E} - \eta\mathfrak{E} = \eta\mathfrak{E}$$

ce qui est impossible, les nombres η et $\mathfrak{E}$ ètant positifs. Mais le passage à la limite (9',4) subsiste pour les fonctions $u_\alpha(X, t)$ définies par la formule (7,4), $\theta = t_0 - \eta$ et $V_{\alpha\beta}(X, t; Z_0, \tau_0)$, définies par (7',4), pour $t_0 - \eta < t < t_0 + \eta < \tau_0$. D'ici résulte l'égalité (12,4), c.q.f.d. On a donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME (1,4). Admettons les hypothèses I, II et V. Le système adjoint au système (1,1) est parabolique et l'on reçoit la matrice de ses solutions fondamentales en changeant de place les indices dans chaque solution fondamentale du système (1,1), et la première paire des variables avec la seconde. Si donc la matrice des solutions fondamentales du système (1,1) est

$$\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau), \quad t > \tau \tag{16,4}$$

alors la matrice des même solutions du système adjoint est:

$$^*\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \Gamma_{\beta\alpha}(Y, \tau; X, t), \quad t < \tau . \tag{16',4}$$

Il résulte aussi des égalités (5',3) que

$$\int_E {}^*\Gamma_{l\beta}(X, t; Y, \tau) dX - \int_0^\tau \int_E \sum_{\alpha=1}^{N} {}^*\Gamma_{\alpha\beta} A_{\alpha l}^{0,\dots 0} dX dt = \delta_\beta^l . \tag{16''4}$$

Observons que si l'on pose

$$P_\alpha^*(X, t; Y, \tau) = \sum_{\beta=1}^{N} {}^*\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau), \alpha = 1, \dots N, \tau > t \tag{17,4}$$

on a

$$P_\alpha^*(X, t; Y, \tau) = \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\beta\alpha}(Y, \tau; X, t), \alpha = 1, \dots N, \tau > t . \tag{17',4}$$

On a aussi pour la fonction généralisée de Poisson-Weierstress du système (1,4) à savoir pour l'intégrale

$$J_\alpha^*(X, t, \tau) = \int_E \sum_{\beta=1}^{N} {}^*\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) f_\beta(Y, \tau) dY \tag{18,4}$$

l'égalité suivante:

$$J_\alpha^*(X, t, \tau) = \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\beta\alpha}(Y, \tau; X, t) f_\beta(Y, \tau) dY . \tag{18',4}$$

Admettons jusqu'à la fin de ce par. *le système* (1,1) *de second dégré sans termes linéaires, et soummis à part les hypothèses I, II, V, à l'hypothèse III.* Les formules (17,4) à (16'',4) et (8,3) nous donnent:

$$(19,4)\qquad \frac{1}{N}\int_E \sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha^*(X,t;Y,\tau)dX = 1, \qquad \frac{1}{N}\sum_{\alpha-1}^{N} P_\alpha^*(X,t;Y,\tau) \geqq 0\,.$$

La moyenne arithmétique des composantes de la solution (17,4) du système (1,4) est donc une densité de la probabilité de la variable $X \in E$. Cependant l'on ne peut pas affirmer que la composante $P_\alpha^*(X,t;Y,\tau)$ soit une fonction de passage (de la variable Y), ce qui aurait place si le système (1,4) était sans termes linéaires.

On a aussi, au cas des composantes des la densité ($f_\beta\,(Y,\tau)$) non négatives ($\beta = 1, \ldots N$), l'inégalité:

$$(19',4)\qquad \sum_{\alpha-1}^{N} J_\alpha^*(X,t,\tau) \geqq 0\,.$$

Il est intéréssant d'observer qu'on ne peut pas affirmer qu'une pareille inégalité ait place pour l'intégrale généralisées de Poisson-Weresstrass du système (1,1) (v. par. 6).

Cependant l'on peut écrire:

$$(20,4)\qquad J_\alpha(X,t,\tau) = \sum_{\beta=1}^{N}\int_E \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)f_\beta(Y,\tau)dY \geqq 0,$$

si

$$(20',4)\qquad f_\beta(Y,\tau) = f(Y,\tau), \geqq 0, \qquad \beta = 1, \ldots N$$

et de même:

$$(20'',4)\qquad \sum_{\alpha-1}^{N} J_\alpha(X,t,\tau) = \sum_{\alpha,\beta}^{N}\int_E \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)f_\beta(Y,\tau)dY \geqq 0$$

au cas où le système (1,4) est sans termes linéaires (v. théorème (2,6)).

En tout cas il est intéressant d'observer qu'il résulte de la formule (8,3) et du théorème (1,4) la généralisation du résultat bien connu du cas d'une équation parabolique: chaque composante de la solution $P_\alpha(X,t;Y,\tau)$ du système (1,1) est par rapport à la paire des variables (Y,τ) une solution de l'équation conjugée à l'équation $K_\alpha\,(\alpha = 1, \ldots N)$ (v. par. 3 et [8], (3,4)).

5. — Revenons au théorème (2,3) pour le système (1,1) en admettant les hypothèses I, II et IV. Supposons que la valeur initiale $\{f_l(Y)\}_{l=1,\dots N}$ a toutes ses composantes égales à une fonction non-négative $f(Y)$, bornée et höldérienne dans E à savoir:

$$f_l(Y) = f(Y) \geq 0, \qquad l = 1, \dots N .$$

On a alors, comme l'unique solution du système (1,1) de la classe Z'_1 avec la valeur initiale $\{f(X)\}_{l=1,\dots N}$, la fonction:

$$(1,5) \qquad u_\alpha(X, t) = \int_E f(Y) \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{\alpha l}(X, t; Y, 0) dY =$$

$$= \int_E f(Y) P_\alpha(X, t; Y, 0) dY .$$

Si nous admettons pour le système (1,1) sans termes linéaires et de second ordre, outre les hypothèses I et II, l'hypothèse III, la fonction

$$P_\alpha(X, t; Y, 0), \quad t > 0$$

sera non-négative. Cette fonction $P_\alpha(X, t; Y, 0)$ est identique à la solution fondamentale normée d'une équation parabolique (K_α) de second ordre, sans terme linéaire (v. par. 3 et [8], (3,4)). On reçoit donc aussi:

$$u_\alpha(X, t) \geq 0 .$$

Toute fonction $u_\alpha(X, t)$, définie par la formule (1,5), est aussi une solution de cette équation K_α et tous les résultats classiques sur les signes et les valeurs extrémales de la solution d'une telle équation [1] lui sont appliquables. On a le

THÉORÈME (1,5). Chaque composante de la solution de la classe Z'_1 du système (1,1) de second ordre, sans termes linéaires, soumis aux hypothèses I, II et III à valeur initiale bornée et höldérienne $\{f(X)\}_{\alpha=1,\dots N}$ vérifie tous les résultats classiques sur les signes et les valeurs extrémales de la solution d'une équation parabolique de second ordre.

Observons que les formules (5',3) donnent pour le système parabolique d'équations sans termes linéaires les égalités suivantes:

$$\int_E \Gamma_{\alpha\alpha}(X, t; Y, \tau) dY \equiv 1, \qquad \alpha = 1, \dots N$$

$$\int_E \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) dY = \int_E \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) dY = 0,$$

$$\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, \dots N .$$

De là il résulte qu'on n'a pas toujours pour $\alpha \neq \beta$

$$\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) \geq 0 .$$

De la dernière des égalités (3,5) il résulte qu'il existe un ensemble de mesure positive K_0, et des telles variables X_0, t_0, τ_0 que par exémple:

$$\sum_{\beta \neq 1} \Gamma_{1\beta}(X_0, t_0; Y, \tau_0) < -2\mathfrak{E}, \mathfrak{E} > 0; \; Y \in K_0, t_0 \, \tau_0 \tag{4,5}$$

parce que la fonction à intégrer dans l'égalité (3,5) n'est nulle presque partout (4). Soit par exemple

$$t_0 - \tau_0 > 1 .$$

La définition de la fonction initiale $\{U_\alpha(X)\}$ sera la suivante:

$$U_1(X) = \mathfrak{E}; \qquad X \in E, \qquad \mathfrak{E} > 0 \tag{4',5}$$

$$U_\beta(X) = U(X) \geq 0, \qquad \beta > 1 \tag{4'',5}$$

---

(4) Il faut distinguer ici les *systèmes* d'équations des *pseudo-systèmes*. Formons en effet N équations paraboliques pour chacune des solutions: $u_1, \dots u_N$. On peut leur faire correspondre le déterminant de Petrovsky. Mais on trouve les éléments non identiquement nuls seulement sur la diagonale principale. Le même fait est à observer pour le système d'équations, dit pseudo-système, où la partie principale de chaque équation ne contient que la fonction inconnue qui figure sous la dérivée par rapport au temps. Il n'est pas difficile de démontrer qu'on a pour les solutions fondamentales des pseudo-systèmes les identités: $\Gamma_{\alpha\beta} = 0$ dès que $\alpha \neq \beta$. Au point de vue des théorèmes sur les signes et les extrèmes des solutions, les pseudo-systèmes se comportent également comme les équations. Par contre nous dirons avoir un système d'équations, si au moins une partie principale de ces équations possède plus d'une fonction inconnue. On trouvera alors dans le déterminant de Petrovsky de ce système les expressions non identiquement nuls outre la diagonale principale. Supposons ce système parabolique. Dans ce cas au moins une solution fondamentale $\Gamma_{\alpha\beta}$ pour $\alpha \neq \beta$ ne sera pas identiquement nulle. En effet, si l'on avait $\Gamma_{\alpha\beta} = 0$, dès que $\alpha \neq \beta$, on trouverait pour la matrice des quasi-solution: $W_{\alpha\beta} = 0$, dès que $\alpha \neq \beta$ et pour leur transformées de Laplace: $V_\alpha^\beta = 0$, dès que $\alpha \neq \beta$. Les formules (12) et (14) de l'article [2] donnent dans ce cas:

$$\sum^{K_1 + \dots K_n = M} A_{\alpha\beta}^{K_1 \dots K_n}(Z, \xi) \, (is_1)^{K_1} \dots (is_n)^{K_n} = 0, \qquad \alpha \neq \beta$$

contre l'hypothèse.

Dès qu'on sait qu'il existe un élément de la matrice des solution $\Gamma_{\alpha\beta} \neq 0$, avec $\alpha \neq \beta$, on peut appliquer le théorème (2,5). On voit donc que la *distinction parmi les pseudo-systèmes et les systèmes est essentielle.* On peut la définir pour les systèmes paraboliques soit par les parties principales du système, soit par le dèterminant de Petrovsky, soit par le fait d'existence de $\Gamma_{\alpha\beta} \neq 0$ pour au moins une paire des indices $\alpha \neq \beta$, soit enfin par le fait de l'impossibilité de conserver les théorèmes sur les signes et les extrèmes des solutions des équations paraboliques.

mais $U(X)$, étant différentiable partout, vérifie la condition (4''',5)

$$(4''',5) \qquad U(X) = 0, X \bar{\in} K_0; \int_{K_0} U(X)dX = 1 .$$

La solution du système (1,1) de la classe Z'_1 à valeur initiale $\{U_\alpha(X)\}_{\alpha=1,\dots N}$ définie par les formules (4',5) à (4''',5) est la suivante:

$$(5,5) \qquad u_1(X_0, t_0) = \int_{K_0} U(Y) \sum_{\beta-2}^{N} \Gamma_{1\beta}(X_0, t_0; Y, \tau_0)dY + \mathfrak{E}$$

et

$$(5',5) \qquad u_1(X_0, t_0) < -2\mathfrak{E} \int_{K_0} U(Y)dY + \mathfrak{E} = -\mathfrak{E}, \qquad t_0 - \tau_0 \geq 1 .$$

Mais

$$(5'',5) \qquad \lim_{t-\tau \to 0} u_1(X, t) = U_1(X) = \mathfrak{E} > 0$$

et pour $\alpha > 1$ on a:

$$(5''',5) \qquad \lim_{t-\tau\to 0} u_\alpha(X, t) = U_\alpha(X) = U(X) \geq 0 \quad \alpha = 2, \dots N \qquad \text{c.q.f.d.}$$

En même temps on a donc démontré que le minimum des composantes de la solution du système parabolique ne se trouve pas nécessairement sur le bord. On a donc démontré le théorème suivant:

Théorème (2,5). Les composantes d'une solution de la classe Z'_1 du système (1,1), aux valeurs initiales non-négatives, ne sont pas toujours non-négatives. C'est le cas du système soumis aux hypothèses I et II, sans termes linéaires, si les composantes de la fonction initiale, soumise à l'hypothèse IV, sont différentes entre elles.

6. — Observons encore qu'il résulte du Théorème (2,3) que la somme des composantes de chaque solution $\{u_\alpha(X, t)\}_{\alpha=1,\dots N}$ de la classe Z'_1 du système (1,1), avec les hypothèses I, II et IV admises, est la suivante

$$(1,6) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(X, t) = \int_E \sum_{\beta=1}^{N} f_\beta(Y) \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0)dY, \qquad t \geq 0 .$$

Supposons:

$$f_\beta(X) \geq 0, \qquad X \in E, \qquad \beta = 1, \dots N .$$

Si

$$(2,6) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) \geq 0, \qquad \beta = 1, \dots N$$

alors on a également

$$\sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(X,t) \geq 0 \,. \tag{2',6}$$

Si au contraire pour un indice quelconque $\beta = \beta'$ l'inégalité (2,6) ne tient pas, alors il existe une paire de variables (X_0, t_0) et $(Y_0, 0)$ telle que:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta'}(X_0, t_0; Y_0, 0) < -2\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{E} > 0, \qquad t_0 > 0 \,. \tag{3,6}$$

Il existe donc un entourage du point $Y_0 : K_0 = K_0(Y_0, S)$, $S > 0$ où:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta'}(X_0, t_0; Y, 0) < -\mathfrak{E}, \qquad Y \in K_0, \qquad t_0 > 0 \,. \tag{3',6}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} & f_\beta^{(X_0,t_0)}(Y) = 0, && \beta \neq \beta' \\ & f_{\beta'}^{(X_0,t_0)}(Y) = \begin{cases} 0, & Y \bar{\in} K_0 \\ f(Y) \geq 0, & Y \in K_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3'',6}$$

où $f(Y)$ est bornée et différentiable dans E et:

$$\int_{K_0} f(Y)dY = 1 \,.$$

La formule (1,6) donne

$$\sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(X,t) = \int_{K_0} f(Y) \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta'}(X,t;Y,0)dY, \qquad t_0 > 0 \,. \tag{3''',6}$$

En particulier on a:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(X_0,t_0) = \int_{K_0} f(Y) \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta'}(X_0,t_0;Y,0)dY < -\mathfrak{E}, \quad t_0 > 0 \,. \tag{3^{IV},6}$$

La somme $(3^{IV},6)$ est donc négative au point $(X_0, t_0) \in \mathfrak{E}$. Le cas des valeurs initiales non-positives est analogue. On a donc démontré le

THÉORÈME (1,6). Admettons pour le système (1,1) les hypothèses I, II et IV et les composantes de la valeur initiale de mêmes signes. La condition nécessaire et suffisante pour que la somme des composantes

de la dite solution $\{u_\alpha(X,t)\}_{\alpha=1,\dots N}$ conserve le signe des composantes de la valeur initiale est que l'on ait:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,0) \geq 0, \qquad t>0, \qquad \beta = 1, \dots N\,.$$

THÉORÈME (2,6). Supposons les systèmes (1,1) et (1,4) sans termes linéaires, de second dégré, les hypothèses I, II, IV et V étant admises. Alors l'intégrale de la somme des composantes de cette solution est égale à l'intégrale de la somme des composantes de la valeur initiale.

En effet il résulte des corollaires du théorème (1,4) (v. le texte entre les formules (19,4) et (19',4)) que

$$(5,6) \qquad \int_E \sum_{\alpha=1}^{N} u_\alpha(X,t)\,dX =$$

$$= \int_E \sum_{\beta=1}^{N} f_\beta(Y,0) \int_E \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,0)\,dY = \int_E \sum_{\beta=1}^{N} f_\beta(Y,0)\,dY\,.$$

THÉORÈME (3,6). Supposons le système (1,1) sans termes linéaires et admettons les hypothèses I, II et IV. Supposons que la valeur initiale de la solution de la classe Z'_1, ainsi que les coefficients du système (1,1) convergent uniformément quand $|X| \to \infty$. Alors la valeur limite de chaque composante de cette solution, pour $|X| \to \infty$ est égale à la valeur limite de sa valeur initiale.

En effet, soient

$$(7,6) \qquad \lim_{|X|\to\infty} U_\alpha(X) = \overline{U}_\alpha, \qquad \alpha = 1, \dots N\,.$$

De même, si les limites des coefficients du système (2,1) existent uniformément pour $|X| \to \infty$, on peut écrire:

$$(7',6) \qquad \lim_{|X|\to\infty} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,X+Z,0) = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}(t;\,Z,0),\, t>0,\, Z \neq 0\,.$$

Posons dans la formule (1,6):

$$Y = X + Z$$

alors on a

$$u_\alpha(X,t) = \int_E \sum_{\beta=1}^{N} U_\beta(X+Z)\,\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,X+Z,0)\,dZ\,.$$

De là et de la formule (7',6) résulte la formule

$$(7'',6) \qquad \lim_{|X|\to\infty} u_\alpha(X,t) - \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \overline{U}_\beta \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}(t; Z, 0) dZ =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{N} \overline{U}_\beta \int_E \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}(t; Z, 0) dZ .$$

Mais les formules (3,5) donnent à la limite pour $|X| \to \infty$ avec la formule (7'',6) la formule suivante:

$$(8,6) \qquad \lim_{|X|\to\infty} u_\alpha(X,t) = \overline{U}_\alpha, \qquad t \geq 0, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Ce théorème permet d'énoncer le

COROLLAIRE (1,6). Admettons les hypothèses du Théorème (3,6). Il existe alors une telle sphère, centrée à l'origine, qu'en dehors d'elle chaque composante de la solution du système (1,1) conserve le signe de sa valeur initiale, si celle-ci ne converge pas vers zéro. Dans le cas où les composantes de la valeur initiale sont intégrables dans E, les composantes de la solution du système (1,1) sont aussi intégrables dans E.

Soit m_α la valeur minimum de la composante de la valeur initiale $U_\alpha(X)$ et m'_α la valeur minimum de la composante $u_\alpha(X,t)$ de la solution du système (1,1). On y trouve alors les inégalités que voici: si $m_\alpha = \overline{U}_\alpha$ alors $m'_\alpha \leq \overline{U}_\alpha$; le cas $m'_\alpha < \overline{U}_\alpha$ ne peut avoir lieu que dans la sphère, $m'_\alpha = \overline{U}_\alpha$ qu'à l'infini.

7. — *La valeur limite de la solution du système parabolique dont les coefficients avec la valeur initiale de cette solution dépendent d'un paramètre* $m \to \infty$.

Il est intéressant de savoir, si aux petits changements des coefficients du système parabolique et de la valeur initiale de la solution de la classe Z'_1 de ce système, correspondent de petits channgements de la solution même. S'il en est ainsi, *la matrice des solutions fondamentales du système parabolique, construite par M. W. Pogorzelski* [2], *donne une solution du problème de Cauchy, correctement posé, d'aprés M. Hadamard.*

En effet *c'est une conséquence du théorème suivant.*

Soient

$$(1,7) \qquad \tilde{\Psi}_\alpha^{(m)}(u_1^{(m)} \ldots u_N^{(m)}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots N$$

les systèmes paraboliques d'équations, dont les coefficients forment des suites soumises aux conditions suivantes:

1) les coefficients des systèmes (1,7) sont uniformément bornés et continus par rapport à m dans $\mathfrak{E}$;

2) ils sont uniformément höldériens par rapport à m dans E, et les coefficients des plus hauts dégrés des systémes (1,7) sont uniformément höldériens par rapport à m dans $\mathfrak{E}$;

3) les conditions de parabolicité de Petrovsky des systèmes (1,7) sont uniformes par rapport à m;

4) les coefficients des systèmes (1,7) convergent uniformément, avec $m \to \infty$, vers les fonctions limites (disons vers les coefficients du système (1,1)).

Supposons à part celà, l'hypothèse 5):

5) les valeurs initiales $\{U_\alpha^m(X, \tau)\}$, $\tau = \text{const.}$, $\alpha = 1, \ldots N$, $m = 1, \ldots$, des solutions de la classe Z'_1 des systèmes (1,7) sont uniformément bornées et uniformément höldériennes dans E par rapport à m. Elles convergent uniformément dans E, avec $m \to \infty$ vers la fonction limite $\{U_\alpha(X, \tau)\}$, $\tau = \text{const.}$ $\alpha = 1, \ldots N$.

THÉORÈME (1,7). *Les solutions de la classe Z'_1 des systèmes* (1,7), *les hypothèses 1) à 5) étant admises, convergent avec $m \to \infty$, vers la solution de la classe Z'_1 du système limite* (1,1), *à valeur initiale limite des valeurs initiales des dites solutions.*

Démonstration du théorème (1,7).

Il résulte des hypothèses 1) à 3) que les systèmes (1,7) sont uniformément paraboliques par rapport à m. Les limites de leurs coefficients sont höldériennes comme ces coefficients mêmes. Ils forment le système limite (1,1) qui est soumis aux hypothèses I et II. Il résulte de l'hypothèse 5) que la fonction initiale limite $\{U_\alpha(X, \tau)\}_{\alpha=1,\ldots N}$, $\tau = \text{const.}$ est aussi bornée et höldérienne dans E.

Le second théorème d'unicité [7] prouve que les solutions des systèmes (1,7) et (1,1) sont respectivement les suivantes:

$$(2,7) \qquad u_\alpha^m(X, t, \tau) = \sum_{\beta=1}^{N} \int_E U_\beta^m(Y, \tau) \Gamma_{\alpha\beta}^m(X, t; Y, \tau) dY, \quad t > \tau, \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots N \\ \tau = \text{const} . \end{array}$$

$$(2',7) \qquad u_\alpha(X, t, \tau) = \sum_{\beta=1}^{N} \int_E U_\beta(Y, \tau) \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) dY \quad t > \tau, \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots N \\ \tau = \text{const} . \end{array}$$

$$(3,7) \qquad \{\Gamma_{\alpha\beta}^m(X, t; Y, \tau)\}, \alpha, \beta = 1, \ldots N$$

$$(3',7) \qquad \{\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}, \alpha, \beta = 1, \ldots N$$

désignent les matrices des solutions fondamentales de M. W. Pogorzelski [2] des systèmes (1,7) et (1,1) respectivement.

Il résulte de l'hypothèse 4) et de la définition de la solution fondamentale (voir les formules (7,1), (8,1), (8'',1), (8''',1) et (3,1), ainsi que 6 [2]) que:

$$(4,7) \qquad \lim_{m\to\infty} \Gamma^{m}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \Gamma_{\alpha\beta}(X, t, Y, \tau), \quad t \geqq \tau + \eta; \quad \eta > 0$$

les hypothèses 1) à 4) assurent l'uniformité dans $\mathfrak{E}$ du passage à la limite (4,7). De même, toutes les limitations de la solution fondamentale de larticle [2] sont uniformes par rapport à m pour les solutions (3,7); elles tiennent aussi pour leurs limites (3',7). Les intégrales (2,7) existent alors uniformément par rapport à m, $t \geqq \tau + \eta$, $\eta > 0$, et le passage à la limite sous le signe de l'intégrale (2,7) est légitime. C'est pourquoi on peut écrire, en tenant compte de l'égalité (2',7) que

$$(5,7) \qquad \lim_{m\to\infty} u^{m}_{\alpha}(X, t, \tau) = u_{\alpha}(X, t, \tau), \quad t \geqq \tau + \eta, \quad \eta > 0, \quad \alpha = 1, \ldots N \cdot$$

Le cas de $t \to \tau$ est encore plus facile. On a, en effet, à cause des hypothèses 1) à 4) et des démonstrations des articles [3] ou [4] que

$$\lim_{t\to\tau+0} u^{m}_{\alpha}(X, t, \tau) = U^{m}_{\alpha}(X, \tau), \quad m = 1, \ldots, \quad \alpha = 1, \ldots N$$

et ce passage à la limite est uniforme par rapport à m.

Soit $\mathfrak{E} > 0$ et soit $\eta > 0$, mais convenablement petit, alors on a:

$$(6,7) \qquad |u^{m}_{\alpha}(X, t, \tau) - U^{m}_{\alpha}(X, \tau)| \leqq \epsilon/3, \quad \alpha = 1, \ldots N, \quad m = 1, \ldots$$

$$(6',7) \qquad |u_{\alpha}(X, t, \tau) - U_{\alpha}(X, \tau)| \leqq \epsilon/3, \quad \alpha = 1, \ldots N$$

dès que:

$$(7,7) \qquad 0 < t - \tau < \eta\,.$$

Si l'entier M est suffisament grand, alors on a pour

$$(7',7) \qquad m \geqq M$$

les inégalités:

$$|U^{m}_{\alpha}(X, \tau) - U_{\alpha}(X, \tau)| \leqq \epsilon/3, \quad \alpha = 1, \ldots N.$$

Les inégalités (7,7) et (7',7) impliquent donc les inégalités voulues:

$$(9,7) \qquad |u^{m}_{\alpha}(X, \mathrm{t}, \tau) - u_{\alpha}(X, t, \tau)| \leqq \mathfrak{E}, \quad \alpha = 1, \ldots N \quad \text{c.q.f.d.}$$

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Picone, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine.* « Annali di Matematica Pura e Applicata », 7. (1929-1930), 145-192.

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles.* « Ricerche di Matematica », 7 (1958), 153-185.

[3] W. Pogorzelski, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations ause dérivées partielles.* « Math. Scand », 6 (1958), 237-262.

[4] W. Pogorzelski, *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weirstrass.* « Ann. Ec. Norm », 76 (1959), 125-149.

[5] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique.* « Ricerche di Matematica », 5 (1956), 25-33.

[6] H. Milicer Gruzewska, *Le théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équation linéaires avec les coefficients höldériens.* « Bul. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math. astr. et phys. », 7 (1959), 593-599 et « Ricerche di Matematica », IX (1960), 20-42.

[7] H. Milicer Gruzewska, *Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens,* ibid., dans ce numéro, 719-720, et « Atti d. Acc. Naz. d. Lincei », VI (1960), 17-29.

[8] H. Milicer Gruzewska, *Les propriétés probabilistes de la solution d'un système parabolique d'équations,* ibid., 8 (1959), 721-728, et « Rendiconti d. Circolo Matematico d. Palermo », IX (1960), 1-34.

[9] H. Milicer Gruzewska, *La construction du champ de probabilité avec la solution fondamentale de l'équation parabolique normale aux coefficients höldériens,* ibid., 7 (1959), 673-675.

[10] J. Petrovsky, *Uber das Cauchysche Problem für ein System linearer Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen.* « Bulletin de Moscou », 1 (1938), 65-67.

[11] S. D. Eidelman, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe). « Mat. Sbor. », 38 (1956), 51-92.

[12] A. Friedman, *On the uniqueness of Cauchy problem for parabolic equations.* « American Journal of Math. », LXXXI, 2 (1959), 503-510.

RELAZIONE

LETTA ED APPROVATA NELL'ADUNANZA DELL'11 GENNAIO 1961
SULLA MEMORIA DI LUCIANO DE VITO INTITOLATA

SULLA EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE DI TIPO ELLITTICO DI VOLTERRA

Nella presente Memoria è studiato un problema pòsto da Volterra fin dal 1912, in connessione con la sua teoria della isteresi elastica, che lo portò a considerare problemi al contorno per equazioni integro-differenziali nelle quali l'incognita dipende, oltre che dalle variabili spaziali, anche dal tempo. L'operatore integro-differenziale relativo ai problemi di equilibrio consta, oltre che di una parte differenziale identica a quella relativa ai corpi elastici « senza passato », di una ulteriore componente integro-differenziale costituita da una somma di operatori (rispetto al tempo) del tipo oggi detto di Volterra, agenti sulle derivate di ordine massimo, rispetto alle variabili spaziali, delle incognite.

Il De Vito considera il caso tipico di problema integro-differenziale pòsto da Volterra e, dopo una sagace analisi, perviene ad una soddisfacente soluzione di esso. Egli mostra, infatti, l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema al contorno nella classe delle soluzioni che, oltre ad avere tutte le attese proprietà di regolarità all'interno del dominio di integrazione, hanno un integrale dell'energia spaziale finito ed assumono quindi i dati al contorno tramite il concetto di « traccia generalizzata ».

Data la difficoltà del problema studiato e l'interesse dei risultati conseguiti, la Commissione ritiene meritevole la Memoria del de Vito di essere integralmente pubblicata nelle Memorie di questa Accademia.

La Commissione

FRANCESCO TRICOMI
CATALDO AGOSTINELLI
GAETANO FICHERA (*Relatore*)

SULLA EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE DI TIPO ELLITTICO DI VOLTERRA

Memoria di LUCIANO DE VITO
presentata dal Socio corrisp. Gaetano FICHERA
nell'adunanza dell'11 Gennaio 1961

Riassunto. — *Viene considerato il problema relativo all'esistenza ed all'unicità di una soluzione dell'equazione* (1) *del testo, nell'insieme* $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in A$, $0 \leq t \leq t_0$ *(ove* A *è un campo abbastanza regolare dello spazio euclideo tridimensionale) con la condizione al contorno* $u(x, t) = 0$, $x \in \mathfrak{F}A$, $0 \leq t \leq t_0$. *Si dimostra l'esistenza di una ed una sola* $u(x, t)$ *soluzione di questo problema, regolare nell'interno, dotata di derivate prime rispetto a* x_i *di quadrato sommabile nell'insieme* $x \in A$, $0 \leq t \leq t_0$, *e la cui traccia su* $(\mathfrak{F}A) \times (0, t_0)$ *verifica la condizione al contorno imposta.*

Indichiamo con S_n lo spazio cartesiano n-dimensionale. Per $n = 3$, denoteremo con x il punto generico dello spazio e con x_1, x_2, x_3, le coordinate di x; per $n = 4$, il punto generico dello spazio sarà indicato con (x, t) e x_1, x_2, x_3, t saranno le sue coordinate (talora, useremo anche la lettera ξ in luogo di x e la lettera τ in luogo della lettera t). Siano A un campo regolare di S_3 (1) e t_0 un numero reale positivo. Denoteremo con T_0 l'intervallo reale chiuso di estremi 0, t_0, con T il generico intervallo reale chiuso contenuto in T_0. Se C è un arbitrario insieme di S_3, con $C \times T$ denoteremo l'insieme di S_4 descritto dal punto (x, t) al variare di x in C e di t in T. Con φ_i (t, τ) $i = 1, 2, 3$ indichiamo tre funzioni reali delle variabili reali t e τ, che supporremo definite al variare di t e τ in T_0, ivi misurabili secondo *Lebesgue* e limitate; diremo M un numero che sia superiore a $|\varphi_i(t, \tau)|$ per ogni $t \in T_0$, $\tau \in T_0$, $i = 1, 2, 3$.

(1) Dicendo che A è un *campo regolare* intendiamo che A è un campo limitato tale che: 1°) $\mathfrak{F}(A \cup \mathfrak{F}A) = \mathfrak{F}A$, 2°) $\mathfrak{F}A$ è composta di un numero finito di superficie regolari, 3°) ogni funzione u di quadrato sommabile in A ed avente derivate parziali prime deboli di quadrato sommabile in A è dotata di traccia su $\mathfrak{F}A$ nel senso di *Fichera* (cfr. [1] p. 44 e [2] p. 213), 4°) per le funzioni continue con le derivate prime e seconde in $A \cup \mathfrak{F}A$ sussistono le formule integrali di *Green-Gauss*.

Vito Volterra, nel 1912, proponeva lo studio dei problemi al contorno per la seguente equazione integrodifferenziale:

$$(1) \qquad E(u) = \Delta_x^2 u(x, t) + \int_0^t \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t, \tau) d\tau = f(x, t) \quad (^2)$$

ove $f(x, t)$ è una arbitraria funzione definita in $A \times T_0$, che rappresenta il termine noto dell'equazione, ed ove $u(x, t)$ è la funzione incognita; avvertiamo che, con il simbolo Δ_x^2, qui intendiamo indicare l'operatore di *Laplace* relativo alle sole variabili (spaziali) x_1, x_2, x_3.

Alla considerazione della (1), il *Volterra* era stato condotto dalla formulazione della Sua *teoria dell'elasticità ereditaria*, la quale ha per oggetto i problemi elastostatici ed elastodinamici dei corpi materiali quando si tenga conto di tutta la precedente « storia delle deformazioni » dei corpi stessi. A quanto mi consta, non esiste, a tutt'oggi, una teoria completa dei problemi al contorno per l'equazione (1). Non è stato, ad esempio, dimostrato un teorema d'esistenza per il problema di *Dirichlet* relativo alla (1), cioè il problema consistente nel dimostrare l'esistenza di una soluzione della (1), convenientemente « regolare » in $\bar{A} \times T_0$ (3) e che assuma valori assegnati nei punti di $(\mathfrak{F}A) \times T_0$. Gli unici risultati, a me noti, aventi carattere generale, relativi alla equazione (1), sono dovuti allo stesso *Volterra* e consistono nella dimostrazione di un teorema d'unicità per l'anzidetto problema di *Dirichlet* e nella costruzione di una soluzione fondamentale della (1).

Nel presente lavoro, mi occupo del sopradetto problema di *Dirichlet* per la (1). Durante lo studio di tale problema, ho potuto constatare come la (1), benchè abbia come parte puramente differenziale un operatore ellittico, non si lasci trattare con i metodi esistenziali che d'ordinario vengono impiegati per le equazioni differenziali lineari di tipo ellittico a coefficienti reali. Ciò forse spiega il motivo per il quale il problema è rimasto, per così lungo tempo, insoluto.

Ho, in primo luogo, potuto costatare come, pur disponendosi della soluzione fondamentale costruita da *Volterra*, l'estensione al problema di *Dirichlet* per la (1) del classico metodo consistente nel rappresentare la soluzione cercata come somma di un potenziale di volume più uno di superficie non sia — almeno al momento presente — attuabile. In effetti, facendo uso della sopradetta rappresentazione, il problema di *Dirichlet* viene ricondotto alla risoluzione di un sistema di equazioni integrali singolari

(2) Cfr. [13] pp. 295-355.
(3) Se C è un arbitrario insieme, con $\bar{C}$ indicheremo l'insieme $C \cup \mathfrak{F}C$.

del quale non è ancora nota la teoria e la cui discussione, peraltro, costituisce un problema di ordine di difficoltà non inferiore a quello iniziale. Ho successivamente cercato di applicare i procedimenti oggi maggiormente in uso nella teoria delle equazioni ellittiche basati su disuguaglianze integrali del tipo di quella di *Gårding* (4), il sussistere delle quali definisce, secondo una locuzione introdotta da *J. L. Lions*, la $\mathfrak{B}$-*ellitticità* del problema al contorno che si considera (5). Tale $\mathfrak{B}$-ellitticità costituisce una condizione soltanto sufficiente (6) per l'esistenza di una soluzione « generalizzata » del problema al contorno che si considera, laddove, la condizione necessaria e sufficiente — costituita dal sussistere di una certa diseguaglianza — per l'esistenza di una siffatta soluzione, è stata data da *G. Fichera* (7). Orbene, nel caso del problema di *Dirichlet* per la (1), da me considerato, si verifica la circostanza secondo la quale il problema non può essere $\mathfrak{B}$-ellittico, cioè non sussiste la diseguaglianza del tipo di *Gårding*, come mostrerò nelle righe che seguono, mentre è verificata la diseguaglianza indicata da *Fichera*, come è provato nel paragrafo 2 di questo lavoro.

Indichiamo con $\mathfrak{H}^2$ lo spazio delle funzioni reali di quadrato sommabile in $A \times T_0$ e dotate di derivate parziali prime deboli rispetto ad x_1, x_2, x_3, di quadrato sommabile in questo stesso insieme. Diremo *soluzione semidebole* per il problema di *Dirichlet* relativo all'equazione (1) (8), con condizione omogenea su $(\mathfrak{F}A) \times T_0$, una funzione appartenente ad $\mathfrak{H}^2$ la quale, per quasi tutti i valori t di T_0, come funzione di x, abbia traccia nulla su $\mathfrak{F}A$ (9), ed inoltre verifichi le equazioni

$$(2) \qquad B(u, v) + \int_{A \times T_0} fv\,dx\,dt = 0 \qquad (dx \equiv dx_1 dx_2 dx_3)$$

per ogni v appartenente alla classe $\mathfrak{B}$ delle funzioni reali continue in $\bar{A} \times T_0$ assieme alle loro derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3, e nulle su

(4) Cfr. [9].

(5) Cfr. [11], [12], [5] p. 70.

(6) Cfr. [5] p. 73.

(7) Cfr. [2], [3], [5], [6], [7].

(8) Usiamo qui il termine « soluzione semidebole » seguendo una locuzione introdotta da *G. Fichera* (cfr. [5] p. 68). Altri Autori adoperano invece il termine « soluzione debole ». Noi preferiamo indicare, con quest'ultima locuzione, le soluzioni generalizzate secondo un concetto introdotto da *G. Fichera* (cfr. [3], [5] p. 28) e che si basa sulla « formula integrale di *Green* », ed usare invece il termine « semidebole » per quelle soluzioni generalizzate per la cui definizione si fa ricorso alla « semiformula integrale di *Green* ». In generale, ogni soluzione semidebole è anche soluzione debole, mentre non è vero il viceversa.

(9) La traccia su $\mathfrak{F}A$ è qui intesa nel senso di *Fichera* (cfr. nota (1)).

$(\mathfrak{F}A) \times T_0$, dove, con $B(u, v)$, si è indicata la « forma bilineare » associata all'operatore integrodifferenziale E:

$$B(u, v) = \int_{A \times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \int_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \varphi_i(t,\tau) d\tau \right] dxdt .$$

L'anzidetta soluzione esiste se il problema è $\mathfrak{V}$-ellittico, se cioè è verificata, per ogni $v \in \mathfrak{V}$, la seguente disuguaglianza (del tipo *Gårding*):

$$B(v, v) \geq K \int_{A \times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 dxdt - C \int_{A \times T_0} | v(x,t) |^2 dxdt \tag{4}$$

Tale diseguaglianza, in generale, non è vera. Se, infatti, la (4) sussistesse per ogni $v \in \mathfrak{V}$, assumendo $t_0 = 3$, $\varphi_i(t, \tau) \equiv -1$, si avrebbe:

$$K \int_A dx \int_0^3 \sum_{1}^{3}{}_i \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 dt \leq \int_A dx \int_0^3 \sum_{1}^{3}{}_i \left[\left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \int_0^t \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i} d\tau \right] dxdt + C \int_A dx \int_0^3 | v(x,t) |^2 dt ,$$

e quindi, per ogni $v(x)$ continua con le derivate parziali prime e seconde in $\bar{A}$ e nulla su $\mathfrak{F}A$:

$$3K \int_A | \operatorname{grad} v(x) |^2 dx \leq 3 \int_A | \operatorname{grad} v(x) |^2 dx -$$

$$- \int_0^3 t dt \int_A | \operatorname{grad} v(x) |^2 dx + 3C \int_A v^2(x) dx ,$$

donde:

$$\left(K + \frac{1}{2} \right) \int_A | \operatorname{grad} v(x) |^2 dx \leq C \int_A v^2(x) dx ,$$

il che è assurdo.

Introdotto in $\mathfrak{H}^2$ il seguente prodotto scalare:

$$(u, v)_{\mathfrak{H}^2} = \int_{A \times T_0} \left[u(x,t) v(x,t) + \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \right] dxdt$$

(seguiteremo ad indicare con $\mathfrak{H}^2$ lo spazio di *Hilbert* reale che così si ottiene) e detta $\overline{\mathfrak{B}}$ la chiusura di $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}^2$, esiste una trasformazione $\mathfrak{T}$, lineare e continua, di $\overline{\mathfrak{B}}$ in sè, tale che, per ogni coppia $u, v \in \mathfrak{B}$ si abbia:

$$B(u, v) = (u, \mathfrak{T}(v))_{\mathfrak{H}^2}$$

(infatti, il primo membro di tale relazione è un funzionale lineare e continuo in $\mathfrak{B}$, come subito si constata ([10])). La condizione necessaria e sufficiente per la esistenza sopraricordata dell'anzidetta soluzione semidebole è la seguente:

$$\int_{A \times T_0} v^2(x, t)dxdt \leq H \,\|\, \mathfrak{T}(v) \,\|^2_{\mathfrak{H}^2} \tag{5}$$

per ogni $v \in \mathfrak{B}$ (ove H è una opportuna costante positiva indipendente da v). Ho dimostrato il sussistere della (5) nel paragrafo 2. Pertanto, il problema da me considerato costituisce un esempio di problema al contorno per il quale sussiste la (5) e non la (4). La (5) è perfettamente equivalente alla diseguaglianza:

$$\int_{A \times T_0} v^2(x, t)dxdt \leq K \sum_{0}^{\infty}{}_k \left\{ \int_{A \times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{dv(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t)d\tau \right] dxdt \right\}^2 \tag{6}$$

([10]) Basta, per questo, osservare che:

$$\left| \int_{A \times T_0} dxdt \int_0^t \sum_1^3{}_i \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \tau)d\tau \right| \leq \left(\int_{A \times T_0} \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{A \times T_0} \sum_1^3{}_i \left| \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \tau)d\tau \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|v\|_{\mathfrak{H}^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{A \times T_0} t\, dxdt \int_0^t \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq M\sqrt{t_0}\, \|v\|_{\mathfrak{H}^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{A \times T_0} dxdt \int_{T_0} \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = Mt_0 \|v\|_{\mathfrak{H}^2} \|u\|_{\mathfrak{H}^2} \cdot$$

ove $\{u_k\}$ è un sistema completo in $\mathfrak{V}$ e tale che:

$$\int_{A\times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u_h(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_i} dxdt = \delta_h^k .$$

Questa diseguaglianza, a mio avviso, presenta interesse anche in quanto costituisce una generalizzazione della diseguaglianza di *Poincaré*; infatti, se nella (6) si assume $\varphi_i(\tau, t) = 0$ e si considerano funzioni v dipendenti solo da x, si trova:

$$\int_A v^2(x)dx \leq K \int_A |\operatorname{grad} v(x)|^2 dx .$$

I risultati ai quali sono giunto, relativi alla esistenza ed unicità della soluzione ed alla regolarizzazione di essa, si possono riassumere al modo seguente: se $f(x, t)$ è reale e di quadrato sommabile in $A \times T_0$, esiste una ed una sola soluzione semidebole del problema di *Dirichlet* per la (1), relativo a dati al contorno omogenei ([11]), cioè esiste una ed una sola funzione $u(x, t)$ verificante le seguenti condizioni:

1°) $u(x, t)$ appartiene ad $\mathfrak{H}^2$ e, per quasi tutti i valori di $t \in T_0$, come funzione di x, ha traccia nulla su $\mathfrak{F}A$,

2°) per ogni funzione $v \in \mathfrak{V}$ riesce:

$$(7) \qquad \int_{A\times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dxdt = $$

$$= - \int_{A\times T_0} v(x,t) f(x,t) dxdt .$$

Inoltre, $u(x, t)$ gode delle seguenti proprietà:

3°) per ogni $v(x, t)$ di $\mathfrak{V}$ riesce:

$$\int_{A\times T_0} u(x,t) E^*[v(x,t)] dxdt = \int_{A\times T_0} v(x,t) f(x,t) dxdt$$

([11]) Ci siamo limitati a considerare il teorema d'esistenza per dati al contorno omogenei. È d'altra parte facile dare condizioni sufficienti perchè il problema generale si riduca a questo.

ove

$$E^*[v(x,t)] = \Delta_x^2 v(x,t) + \int_t^{t_0} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(\tau,t)d\tau \quad [12]$$

cioè $u(x,t)$ è soluzione debole del problema in questione [13];

4°) se le funzioni $\varphi_i(t,\tau)$ sono continue e se $f(x,t)$ è continua in $\bar{A} \times T_0$ ed uniformemente hölderiana rispetto ad x in ogni insieme chiuso contenuto in $A \times T_0$, la soluzione u è continua in $A \times T_0$ assieme alle sue derivate parziali prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3, ed in ogni punto di $A \times T_0$ verifica l'equazione (1).

La regolarizzazione della soluzione u (cfr. 4°) è stata ottenuta impiegando una tecnica per la regolarizzazione (all'interno) delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per equazioni differenziali la quale prescinde dal sussistere della (4) [14] e che mi è stato possibile estendere anche al caso dell'equazione integro differenziale (1).

Desidero qui esprimere la mia gratitudine al *Prof. Fichera* per i molti suggerimenti e consigli datimi durante lo studio di questo problema.

Prima di passare a dare le dimostrazioni dei risultati testè esposti, vogliamo fare la seguente osservazione:

OSSERVAZIONE 1. Le ipotesi che si fanno sulle $\varphi_i(t,\tau)$ sono le seguenti: per i teoremi d'esistenza ed unicità si ammette che le $\varphi_i(t,\tau)$ siano misurabili e limitate, per la regolarizzazione della soluzione si ammette anche che le $\varphi_i(t,\tau)$ siano continue. Pertanto, i risultati sopraelencati, relativi all'operatore E, continuano a sussistere inalterati e con dimostrazione inalterata per l'operatore:

$$\tilde{E}[v(x,t), t'] = \Delta_x^2 v(x,t) + \int_0^t \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} \tilde{\varphi}_i(t,\tau)d\tau \qquad t \leq t'$$

---

[12] L'operatore E^* è l'operatore aggiunto di E relativamente all'intervallo T_0; con $E^*[v, t']$ indicheremo invece il seguente operatore:

$$\Delta_x^2 v(x,t) + \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau,t)d\tau \qquad t \leq t'$$

che chiameremo operatore aggiunto di E relativamente all'intervallo $(0, t')$.

[13] Cfr. nota [8].

[14] Cfr. [4] p. 530.

ove si è posto: $\tilde{\varphi}_i(t, \tau) = \varphi_i(t' - \tau, t' - t)$. Se ora si considera la trasformazione che associa ad ogni funzione $v(x, t)$ definita in $\overline{A} \times (o, t')$ (in $A \times (o, t')$) la funzione $v^*(x, t)$ così definita nel medesimo insieme: $v^*(x, t) = v(x, t' - t)$, si vede subito che la funzione trasformata di $\tilde{E}[v(x, t), t']$, nella suddetta trasformazione, è $E^*[v^*(x, t), t']$. Ne viene che i risultati che verranno stabiliti per l'operatore E continuano a sussistere inalterati per l'operatore $E^*[v, t']$, e quindi in particolare, per l'operatore E^*. In modo analogo si vede poi che, viceversa, i risultati relativi all'operatore $E^*[v, t']$ valgono anche per l'operatore E nell'insieme $A \times (o, t')$.

1. Definizione di alcuni spazi funzionali.

Sia A un campo limitato di S_3. Come si è già detto nell'introduzione indichiamo con $\mathfrak{H}^2$ (con $\mathfrak{H}^2(A)$) l'insieme delle funzioni reali $u(x, t)$ di quadrato sommabile in $A \times T_0$ (in A) e dotate di derivate parziali prime deboli rispetto ad x_1, x_2, x_3, di quadrato sommabile in $A \times T_0$ (in A). Indichiamo con lo stesso simbolo $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{H}^2(A))$ lo spazio hilbertiano reale costituito dalle funzioni di $\mathfrak{H}^2$ (di $\mathfrak{H}^2(A)$) ove il prodotto scalare è così definito:

$$(8) \qquad (u, v)_{\mathfrak{H}^2} = \int_{A \times T_0} \left[u(x, t) v(x, t) + \sum_{1}^{3} {}_i \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \right] dx dt$$

$$\left((u, v)_{\mathfrak{H}^2(A)} = \int_A \left[u(x) v(x) + \sum_{1}^{3} {}_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right] dx \right).$$

Lo spazio di *Hilbert* $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{H}^2(A))$ è completo ([15]). Mostriamo che:

I. *Se $u(x, t)$ appartiene ad $\mathfrak{H}^2$, per quasi tutti i valori t di T_0 la funzione di $x : u(x, t)$ appartiene ad $\mathfrak{H}^2(A)$.*

In effetti, lo spazio $\mathfrak{H}^2(\mathfrak{H}(A))$ può riguardarsi come il completamento dello spazio di *Hilbert* $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(A))$ costituito dalle funzioni reali $v(x, t)$ ($v(x)$) continue con le loro derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3, in $\overline{A} \times T_0$ (in $\overline{A}$) ove il prodotto scalare è definito ancora mediante la (8) ([16]).

([15]) Cfr. [8] [5] p. 266. Avvertiamo che, con il termine « spazio di *Hilbert* » (reale) qui si intende un insieme lineare in cui è introdotto un prodotto scalare (u, v) cioè un funzionale di u, v bilineare, hermitiano e la cui corrispondente forma quadratica è definita positiva. Se un siffatto spazio è tale che la condizione di *Cauchy*, oltre che necessaria, è anche sufficiente per la convergenza di una successione di elementi di tale insieme, allora tale insieme verrà chiamato « Spazio di *Hilbert* completo ».

([16]) Cfr. [5] p. 256 e segg., [8].

Sia ora $u(x, t)$ una funzione di $\mathfrak{H}^2$ e sia $(v_n(x, t))$ una successione di funzioni di $\mathfrak{C}$ tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A \times T_0} \{[v_n(x, t) - u(x, t)]^2 + |\operatorname{grad}_x[v_n(x, t) - u(x, t)]|^2\} dxdt = 0 . \quad (17)$$

Allora esiste una successione di numeri naturali $\{n_k\}$ tale che, per quasi tutti i valori t di T_0, riesce:

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \{[v_{n_k}(x, t) - u(x, t)]^2 + |\operatorname{grad}_x [v_{n_k}(x, t) - u(x, t)]|^2\} dx = 0 .$$

Da qui si trae immediatamente l'asserto.

Supponiamo ora che A sia un campo regolare (cfr. nota (1)); in tale ipotesi, dal teorema precedente segue ovviamente che:

II. *Se $u(x, t)$ appartiene ad $\mathfrak{H}^2$, esiste un insieme $N \subset T_0$, di misura nulla, tale che, per $t \in T_0 - N$, la funzione di $x : u(x, t)$ è dotata di traccia su $\mathfrak{F}A$. La funzione definita in $(\mathfrak{F}A) \times (T_0 - N)$ che, per ogni $t \in T_0 - N$, coincide con tale traccia, appartiene a $\mathfrak{L}^2 [(\mathfrak{F}A) \times T_0]$.* (18)

Con il simbolo $u(x, t)$, quando (x, t) appartenga ad $(\mathfrak{F}A) \times T_0$, intenderemo il valore della traccia di u su $(\mathfrak{F}A) \times T_0$ nel senso ora precisato.

Come si è già detto nell'introduzione, indicheremo con $\mathfrak{B}$ la sottovarietà di $\mathfrak{C}$ costituita dalle funzioni di $\mathfrak{C}$ che si annullano su $(\mathfrak{F}A) \times T_0$ e con $\overline{\mathfrak{B}}$ la chiusura di $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}^2$.

III. *Se $u(x, t)$ appartiene ad $\overline{\mathfrak{B}}$, per quasi tutti i valori $t \in T_0$ la funzione di $x : u(x, t)$ ha traccia nulla su $\mathfrak{F}A$.*

Se $u(x, t)$ appartiene ad $\overline{\mathfrak{B}}$, esiste, per ipotesi, una successione $\{v_n(x, t)\}$ di funzioni appartenenti a $\mathfrak{B}$, tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A \times T_0} \{[v_n(x, t) - u(x, t)]^2 + |\operatorname{grad}_x [v_n(x, t) - u(x, t)]|^2\} dxdt = 0 .$$

---

(17) Con il simbolo $\operatorname{grad}_x v(x, t)$ si intende il vettore a tre componenti:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_3}.$$

(18) Con il simbolo $\mathfrak{L}^2[(\mathfrak{F}A) \times T_0]$ indichiamo lo spazio di *Hilbert* reale delle funzioni reali di quadrato sommabile su $(\mathfrak{F}A) \times T_0$. La seconda parte del teorema segue immediatamente dalla diseguaglianza

$$\int_{\mathfrak{F}A} |u(x, t)|^2 d\sigma_x \leq K \| u(x, t) \|^2_{\mathfrak{H}^2(A)} \qquad t \in T_0 - N$$

cfr. [5] pag. 62.

Allora esistono un insieme $N \subset T_0$ di misura nulla ed una successione di numeri naturali: $\{n_k\}$ tali che, per $t \in T_0 - N$ riesca:

$$\lim_{k\to\infty}\int_A \{[v_{n_k}(x,t) - u(x,t)]^2 + |\operatorname{grad}_x [v_{n_k}(x,t) - u(x,t)]|^2\} dxdt = 0 .$$

Ciò ha di conseguenza che, per ogni $t \in T_0 - N$, la funzione di $x : u(x,t)$ ha traccia nulla su $\mathfrak{F}A$.

L'insieme $\overline{\mathfrak{V}}$ è, ovviamente, uno spazio di *Hilbert* completo, con prodotto scalare dato dalla (8). Considerata la varietà lineare costituita da tutti gli elementi di $\overline{\mathfrak{V}}$, possiamo in essa introdurre una differente struttura di spazio di *Hilbert* $\mathfrak{H}_0^2$ mediante la seguente nuova definizione di prodotto scalare:

$$(u,v)_{\mathfrak{H}_0^2} = \int_{A\times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} dxdt . \tag{9}$$

Poichè, in virtù della diseguaglianza di *Poincaré*, riesce:

$$\int_{A\times T_0} |u(x,t)|^2 dxdt \leq \Omega^2 \int_{A\times T_0} |\operatorname{grad}_x u(x,t)|^2 dxdt \qquad u \in \mathfrak{H}_0^2$$

dalla sudetta completezza di $\overline{\mathfrak{V}}$ segue quella di $\mathfrak{H}^2$ (essendo i due spazi equivalenti nel senso di *Banach* (19)).

Con $\mathfrak{L}^2$ indicheremo lo spazio di *Hilbert* reale delle funzioni reali di quadrato sommabile in $A \times T_0$, con L^2 lo spazio di *Hilbert* reale dei vettori reali a tre componenti aventi modulo di quadrato sommabile in $A \times \times T_0$ (ove il prodotto scalare è definito nel modo consueto), con L_0^2 lo spazio di *Hilbert* reale costituito dai vettori di L^2 ognuno dei quali è il gradiente debole (rispetto a x_1, x_2, x_3) di una funzione di $\mathfrak{H}_0^2$, in cui il prodotto scalare è quello stesso di L^2. È subito visto che L_0^2 è isomorfo (nel senso degli spazi hilbertiani) allo spazio $\mathfrak{H}_0^2$ e pertanto esso è completo.

Siano T un intervallo chiuso contenuto in T_0 e C un insieme di S_3; con i simboli $\mathfrak{H}_0^2(C \times T)$, $\mathfrak{H}^2(C \times T)$, $\mathfrak{L}^2(C \times T)$, etc... ($\mathfrak{H}^2(C)$, $\mathfrak{H}_0^2(C)$, $\mathfrak{L}^2(C)$, etc...) intenderemo rispettivamente gli spazi di *Hilbert* reali che si definiscono come $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{H}_0^2$, etc. salvo la sostituzione di A con C e dell'intervallo T_0 con l'intervallo T (salvo la sostituzione di $A \times T_0$ con C e di (x,t) con x). Analoga convenzione faremo per i simboli $\mathfrak{C}(C \times T)$, $\mathfrak{V}(C \times T)$

(19) Due spazi di *Banach* sono qui detti *equivalenti* se sono isomorfi linearmente ed inoltre si possono determinare due costanti positive B_1, B_2 tali che, per ogni coppia di elementi u, u' corrispondentisi nell'isomorfismo si abbia: $B_1 \|u\| \leq \|u'\| \leq B_2 \|u\|$.

etc... Inoltre, se $v(x,t)$ è una funzione definita in $A \times T_0$ (in $\overline{A} \times T_0$) con $v_T(x,t)$ indicheremo la funzione definita in $A \times T_0$ (in $\overline{A} \times T_0$), coincidente con $v(x,t)$ in $A \times T$ (in $\overline{A} \times T$) e nulla negli altri punti di $A \times T_0$ (di $\overline{A} \times T_0$). Con il simbolo $\mathfrak{L}^2(T)$ intenderemo lo spazio di *Hilbert* reale delle funzioni reali di quadrato sommabile nell'intervallo chiuso (dell'asse reale T.

Nel seguito, quando non vi sia luogo ad equivoci, adotteremo costantemente la seguente convenzione: se S e S' sono due spazi di *Hilbert* uno isomorfo all'altro, (nel senso di *Hilbert*), elementi di S' (o varietà lineari di elementi di S') verranno indicati usando lo stesso simbolo impiegato per denotare gli enti corrispondenti in S.

2. Formule di maggiorazione.

Mostriamo che:

IV. *Esiste una costante positiva K, dipendente esclusivamente da A* ([20]), *da T_0 e da $\varphi_i(t,\tau)$ $i = 1, 2, 3$, in corrispondenza alla quale, per ogni sistema $\{u_k(x,t)\}$ ortonormale e completo in $\mathfrak{H}_0^2$ e per ogni $v(x,t) \in \mathfrak{V}$, riesce soddisfatta la diseguaglianza* (6).

Cominciamo con l'osservare che la serie a secondo membro di (6) è sempre convergente e che la sua somma è indipendente dal particolare sistema $\{u_k(x,t)\}$ scelto. Si indichi, per questo, con $\gamma[v(x,t)]$ il vettore di L^2 che ha come i-esima componente la funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[v(x,t) + \int_t^{t_0} v(x,\tau)\varphi_i(\tau,t)d\tau\right].$$

Poichè il sistema $\{\mathrm{grad}_x\, u_k(x,t)\}$ costituisce, com'è ovvio, un sistema ortonormale e completo in L_0^2, si ha che il secondo membro di (6) è convergente verso $\| P_{L_0^2}\gamma(v) \|^2_{L^2}$ ove $P_{L_0^2}\gamma$ rappresenta la proiezione di $\gamma(v)$ su L_0^2. Così l'asserto è provato.

Supponiamo ora, per assurdo, che il numero K non esista. Allora, per ogni intero positivo n, esisterebbe una funzione $v_n(x,t) \in \mathfrak{V}$ tale che:

$$\| v_n(x,t) \|^2_{\mathfrak{L}^2} > n^2 \| P_{L_0^2}\gamma[v_n(x,t)] \|^2_{L^2}. \tag{10}$$

Poichè $L_0^2(A \times T) \subset L_0^2$, si ha:

$$\| P_{L_0^2(A\times T)}\gamma[v_n(x,t)] \|^2_{L^2} \leq \| P_{L_0^2}\gamma[v_n(x,t)] \|^2_{L^2}. \tag{11}$$

([20]) D'ora in avanti, il campo A sarà sempre sopposto regolare (cfr. nota ([1])).

Allora, per le (10) (11), detto $\{u_{T,k}(x,t)\}$ un sistema ortonormale e completo in $\mathfrak{H}_0^2\,(A \times T)$, riesce:

$$\| v_n(x,t) \|^2_{\mathfrak{L}^2} > n^2 \sum_{0}^{\infty}{}_k \,|\, (\mathrm{grad}_x\, u_{T,k}(x,t), \gamma[v_n(x,t)])_{L_0^2} |^2 .$$

Potendosi assumere

$$u_{T,1}(x,t) = v_{n_T}(x,t) / \| v_{n_T} \|_{\mathfrak{H}_0^2} \qquad \text{se} \qquad \| v_{n_T} \|_{\mathfrak{H}_0^2} \neq 0 ,$$

dalla precedente diseguaglianza si trae:

$$(12) \qquad n^2 \,|\, (\mathrm{grad}_x\, v_{n_T}(x,t), \gamma[v_n(x,t)])_{L_0^2} |^2 \leq \| v_n(x,t) \|^2_{\mathfrak{L}^2} \|v_{n_T}(x,t) \|^2_{\mathfrak{H}_0^2} .$$

Dalla diseguaglianza di *Poincaré* segue l'esistenza di una costante $\Omega > 0$ tale che:

$$\| v_n(x,t) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq \Omega \, \| v_n(x,t) \|_{\mathfrak{H}_0^2} .$$

Dalla (12) e da questa relazione, tenendo presente che

$$\| v_{n_T}(x,t) \|^2_{\mathfrak{H}_0^2} \leq \| v_n(x,t) \|^2_{\mathfrak{H}_0^2}$$

si deduce

$$\left| \int_{A \times T_0} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial v_{n_T}(x,t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v_n(x,t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v_n(x,\tau)}{\partial x_i} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot\, \varphi_i(\tau,t) d\tau \right] dxdt \right|^2 \leq \frac{\Omega^2}{n^2} \, \| v_n(x,t) \|^4_{\mathfrak{H}_0^2}$$

donde

$$\left| \int_{A \times T} \left[|\, \mathrm{grad}_x\, W_n(x,t) |^2 + \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial W_n(x,t)}{\partial x_i} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \int_t^{t_0} \frac{\partial W_n(x,\tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau,t) d\tau \right] dxdt \right| \leq \frac{\Omega}{n}$$

ove si sia posto:

$$W_n(x,t) = v_n(x,t) / \| v_n(x,t) \|_{\mathfrak{H}_0^2} .$$

Si ha allora:

$$\int_{A \times T} |\, \mathrm{grad}_x\, W_n(x,t) |^2 dxdt \leq$$

$$\leq \left| \int_{A \times T} \left[\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial W_n(x,t)}{\partial x_i} \int_t^{t_0} \frac{\partial W_n(x,\tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau,t) d\tau \right] dxdt \right| + \frac{\Omega}{n} .$$

Ne viene:

$$(13) \qquad \int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt \leq M \int_{A\times T} dxdt \cdot$$

$$\cdot \int_t^{t_0} \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial W_n(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial W_n(x,\tau)}{\partial x_i} \right| d\tau + \frac{\Omega}{n}.$$

Dalla (13), per la diseguaglianza di *Cauchy-Schwarz*, si trae:

$$\int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt \leq M \left[\int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{A\times T} dxdt \sum_2^3{}_i \left| \int_t^{t_0} \left| \frac{\partial W_n(x,\tau)}{\partial x_i} \right| d\tau \right|^2 \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n};$$

inoltre si ha:

$$\sum_1^3{}_i \left| \int_t^{t_0} \left| \frac{\partial W_n(x,\tau)}{\partial x_i} \right| d\tau \right|^2 \leq (t_0 - t) \int_t^{t_0} |\operatorname{grad}_x W_n(x,\tau)|^2 d\tau .$$

Pertanto riesce:

$$(14) \quad \int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt \leq M \left[\int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{A\times T} (t_0 - t) \int_t^{t_0} |\operatorname{grad}_x W_n(x,\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n}.$$

Siano $t_1, t_2, \ldots, t_r$, r numeri tali che

$$t_0 > t_1 > t_2 \ldots > t_r = 0, \quad t_{h-1} - t_h = t_h - t_{h+1} < M^{-1} \quad h = 1, 2, \ldots r - 1 .$$

La (14), per $T = (t_1, t_0)$, fornisce:

$$\int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \leq M \left[\int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[(t_0 - t_1) \int_A dx \int_{t_1}^{t_0} dt \int_{t_1}^{t_0} |\operatorname{grad}_x W_n(x,\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n} =$$

$$= M(t_0 - t_1) \int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx + \frac{\Omega}{n}.$$

e quindi:

$$\int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \leq \frac{\Omega}{n} \frac{1}{1 - M(t_0 - t_1)}$$

donde:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx = 0 .$$

Supponiamo ora d'aver provato che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_h}^{t_{h-1}} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots, m$$

e dimostriamo che tale relazione è vera anche per $h = m + 1$.

La (13), per $T = (t_{m+1}, t_m)$, fornisce:

$$\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \leq M \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A dx \int_t^{t_0} \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial W_n(x, t)}{\partial x_i} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial W_n(x, \tau)}{\partial x_i} \right| d\tau + \frac{\Omega}{n} \leq M \int_A dx \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_{m+1}}^{t_0} \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial W_x(x, t)}{\partial x_i} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial W_n(x, \tau)}{\partial x_i} \right| d\tau + \frac{\Omega}{n} = M \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_{m+1}}^{t_m} d\tau \int_A \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial W_n(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial W_n(x, \tau)}{\partial x_i} \right| \cdot$$

$$\cdot dx + M \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_m}^{t_0} d\tau \int_A \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial W_n(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial W_n(x, \tau)}{\partial x_i} \right| dx + \frac{\Omega}{n} \leq$$

$$\leq M \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_{m+1}}^{t_m} d\tau \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_{m+1}}^{t_m} d\tau \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, \tau)|^2 dx \right]^{1/2} + M \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_m}^{t_0} d\tau \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_{t_m}^{t_0} d\tau \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, \tau)|^2 dx \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n} = M(t_m - t_{m+1}) \cdot$$

$$\cdot \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx + M(t_0 - t_m)^{1/2} (t_m - t_{m+1})^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{t_m}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x, t)|^2 dx \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n},$$

donde

$$\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \leq \frac{M}{1 - M(t_m - t_{m+1})} (t_0 - t_m)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot (t_m - t_{m+1})^{1/2} \left[\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{t_m}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \right]^{1/2} + \frac{\Omega}{n} \frac{1}{1 - M(t_m - t_{m+1})} .$$

Poichè

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t_m}^{t_0} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx = 0 ,$$

dalla precedente relazione si trae intanto che:

$$\Lambda \equiv \max \lim_{n \to \infty} \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx < \infty .$$

Allora, se, per $n > n_0$, riesce

$$\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx < \Lambda + 1 ,$$

si ha:

$$\int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \leq \frac{1}{1 - M(t_m - t_{m+1})} \cdot$$

$$\cdot \left[M(\Lambda + 1)^{1/2} (t_0 - t_m)^{1/2} (t_m - t_{m+1})^{1/2} \left(\int_{t_m}^{t_0} dt \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{\Omega}{n} \right] ,$$

donde

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t_{m+1}}^{t_m} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx = 0 .$$

È così provato che, in corrispondenza ad ogni h, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{t_{h+1}}^{t_h} dt \int_A |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx = 0$$

e quindi che

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A \times T_0} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dx dt = 0 . \tag{15}$$

Siamo, in tal modo, pervenuti ad un assurdo, dato che, per costruzione, si aveva

$$\int_{A\times T_0} |\operatorname{grad}_x W_n(x,t)|^2 dxdt = 1 .$$

Il teor. IV è così dimostrato.

Con una dimostrazione di questo stesso tipo, si possono anche provare le seguenti formule di maggiorazione

$$(16) \qquad \int_{A\times T_0} |v(x,t)|^2 dxdt \leq K' \int_{A\times T_0} |E[v(x,t)]|^2 dxdt$$

$$(16^*) \qquad \int_{A\times T_0} |v(x,t)|^2 dxdt \leq K' \int_{A\times T_0} |E^*[v(x,t)]|^2 dxdt .$$

Non daremo qui la loro dimostrazione, poichè la (16) e la (16*) saranno da noi dedotte «a posteriori» sfruttando il già citato principio di *G. Fichera* [21].

3. Esistenza ed unicità della soluzione semidebole.

Dimostriamo che:

V. *Le formule di maggiorazione* (5) *e* (6) *sono tra loro equivalenti.*

La trasformazione $\mathfrak{T}(v)$ che interviene nella (5) è definita in $\overline{\mathfrak{V}}$ ed ha codominio contenuto in $\overline{\mathfrak{V}}$ (ove $\overline{\mathfrak{V}}$ è la chiusura di $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{H}^2$, come si è detto nell'introduzione); questa trasformazione è lineare e continua e inoltre tale che, per ogni coppia $u, v \in \overline{\mathfrak{V}}$, riesce:

$$B(u,v) = (u, \mathfrak{T}(v))_{\overline{\mathfrak{V}}} .$$

Detta $\mathfrak{T}_0$ la trasformazione lineare e continua di $\mathfrak{H}_0^2$ in sè, tale che, per ogni coppia $u, v \in \mathfrak{H}_0^2$, riesca

$$\Phi_v(u) \equiv B(u,v) = (u, \mathfrak{T}_0(v))_{\mathfrak{H}_0^2}$$

si ha:

$$\| \mathfrak{T}_0(v) \|_{\mathfrak{H}_0^2} = \| \Phi_v \|_{\mathfrak{H}_0^{2*}} , \quad \| \mathfrak{T}(v) \|_{\overline{\mathfrak{V}}} = \| \Phi_v \|_{\overline{\mathfrak{V}}^*}$$

---

(21) Cfr. nota (7).

ove, con $\mathfrak{H}_0^{2*}$ e $\overline{\mathfrak{B}}^*$ si sono indicati, rispettivamente, gli spazi di *Banach* duali di $\mathfrak{H}_0^2$ e $\overline{\mathfrak{B}}$. Questi due spazi di *Banach* $\mathfrak{H}_0^{2*}$, $\overline{\mathfrak{B}}^*$ sono tra loro equivalenti, dato che tali sono $\mathfrak{H}_0^2$, $\overline{\mathfrak{B}}$ [22]; pertanto si ha:

$$K_1 \| \mathfrak{T}(v) \|_{\overline{\mathfrak{B}}} \leq \| \mathfrak{T}_0(v) \|_{\mathfrak{H}_0^2} \leq K_2 \| \mathfrak{T}(v) \|_{\overline{\mathfrak{B}}} .$$

La (5) è quindi equivalente alla

$$\int_{A\times T_0} | v(x, t) |^2 dxdt \leq K \| \mathfrak{T}_0(v) \|^2_{\mathfrak{H}_0^2} .$$

D'altra parte, se $\{u_k(x, t)\}$ è un sistema ortonormale e completo in $\mathfrak{H}_0^2$, si ha:

$$\| \mathfrak{T}_0(v) \|^2_{\mathfrak{H}_0^2} = \sum_1^\infty{}_k | (u_k(x, t) \, , \mathfrak{T}_0[v(x, t)])_{\mathfrak{H}_0^2} |^2 = \sum_0^\infty{}_k | B(u_k, v) |^2 =$$

$$= \sum_0^\infty{}_k \left| \int_{A\times T_0} \sum_1^3{}_i \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dxdt \right|^2 .$$

È così provata l'equivalenza tra (5) e (6).

La (6) è stata dimostrata nel paragrafo precedente (teor. IV); in tal modo resta provata la (5). Allora, per il citato principio d'esistenza di *G. Fichera* [23], come si è osservato nell'introduzione, in corrispondenza ad ogni funzione $f(x, t) \in \mathfrak{L}^2$ esiste almeno una funzione $u(x, t) \in \overline{\mathfrak{B}}$ tale che, per ogni $v(x, t) \in \overline{\mathfrak{B}}$, riesca:

$$(7) \qquad \int_{A\times T_0} \sum_1^3{}_i \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + \int_t^{t_0} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, t) d\tau \right] dxdt = -$$

$$= - \int_{A\times T_0} v(x, t) f(x, t) dxdt .$$

Inoltre, per il teor, III, ogni u appartenente a $\overline{\mathfrak{B}}$, per quasi tutti i valori $t \in T_0$, come funzione della sola x, ha traccia nulla su $\mathfrak{F}A$.

È così dimostrato che:

VI. *Il problema di Dirichlet per l'equazione* (1) *con dato al contorno omogeneo, ammette soluzione semidebole comunque si assuma il termine noto* $f(x, t)$ *in* $\mathfrak{L}^2$.

---

(22) Cfr. nota (19).
(23) Cfr. nota (7).

Dimostriamo ora che:

VII. *La soluzione semidebole dell'anzidetto problema è unica.*

Sia $u(x, t)$ una funzione di $\mathfrak{H}_0^2$. Proviamo che, se per ogni $v(x, t) \in \mathfrak{V}$ riesce

$$\int_{A\times T_0} \sum_1^3{}_i \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} + \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \tau) d\tau \right] dxdt = 0$$

si ha $u(x, t) = 0$. Poichè il funzionale $B(u, v)$, che costituisce il primo membro di questa relazione, è bilineare e continuo in $\mathfrak{H}_0^2$, la detta relazione sussiste per ogni $v(x, t) \in \mathfrak{H}_0^2$; quindi, in particolare, sussiste anche per $v(x, t) = u_T(x, t)$. Si ha allora, per ogni intervallo $T \subset T_0$:

$$\int_{A\times T} \left[|\operatorname{grad}_x u(x, t)|^2 + \sum_1^3{}_i \int_0^t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \tau) d\tau \right] dxdt = 0$$

donde si trae:

$$\int_{A\times T} |\operatorname{grad}_x u(x, t)|^2 dxdt \leq M \int_{A\times T} dxdt \int_0^t \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_i} \right| d\tau .$$

Con dimostrazione perfettamente analoga a quella con la quale da (13) si è dedotta la (15), si può ora trarre da quest'ultima relazione la

$$\int_{A\times T_0} |\operatorname{grad}_x u(x, t)|^2 dxdt = 0 .$$

Da qui, per la diseguaglianza di *Poincaré*, segue l'asserto.

Dimostriamo ora che:

VIII. *La soluzione semidebole del problema di Dirichlet per la* (1), *con dato al contorno omogeneo, è anche soluzione debole di tale problema, cioè, per ogni* $v \in \mathfrak{V}$ *riesce*:

$$\int_{A\times T_0} u(x, t) E^*[v(x, t)] dxdt = \int_{A\times T_0} v(x, t) f(x, t) dxdt \tag{17}$$

Infatti, per goni coppia u, v di funzioni di $\mathfrak{V}$, riesce:

$$B(u, v) = - \int_{A\times T_0} u(x, t) E^*[v(x, t)] dxdt . \tag{18}$$

Poichè entrambi i membri di tale relazione, per ogni fissato v in $\mathfrak{B}$, sono funzioni di u continui in $\mathfrak{H}_0^2$, la soprascritta relazione sussiste anche in corrispondenza ad ogni coppia u, v con $u \in \mathfrak{H}_0^2$, $v \in \mathfrak{B}$; in particolare, quindi, essa sussiste in corrispondenza alla soluzione semidebole u del nostro problema, per ogni $v \in \mathfrak{B}$. D'altra parte, in questo caso, il primo membro di (18) coincide con $-\int_{A \times T_0} v(x, t)\, f(x, t) dxdt$ qualunque sia v in $\mathfrak{B}$. È in tal modo provato il teorema.

IX. *Esiste una costante positiva K' in corrispondenza alla quale risultano soddisfatte la* (16) *e la* (16*) *per ogni* $v \in \mathfrak{B}$.

Infatti, per ogni $f \in \mathfrak{L}^2$, esiste una $u \in \mathfrak{L}^2$ che soddisfa la (17) qualunque sia $v \in \mathfrak{B}$. Allora, applicando il citato principio necessario e sufficiente di esistenza di *G. Fichera* [24], si ha che è soddisfatta la formula di maggiorazione (16*) (la quale fornisce appunto la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una u verificante la (17) per ogni $v \in \mathfrak{B}$). La validità della (16) si deduce da quella di (16*) tenendo presente l'*Osservazione 1* dell'introduzione.

4. Soluzione fondamentale.

Faremo ora l'ipotesi che le funzioni $\varphi_i(t, \tau)$ siano continue. Tale ipotesi sarà mantenuta per tutto il resto del lavoro. Avvertiamo comunque che alcuni dei risultati, che verremo a stabilire, sussistono anche se non è verificata la suddetta ipotesi.

Si ponga:

$$\varphi_{1,0,0}(t, \tau) = \varphi_1(t, \tau)\,, \quad \varphi_{0,1,0}(t, \tau) = \varphi_2(t, \tau)\,, \quad \varphi_{0,0,1}(t, \tau) = \varphi_3(t, \tau)$$

$$\varphi_{h,k,l}(t, \tau) = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=r} \varphi_{h-i,k-j,l-g}(t, s)\varphi_{i,j,g}(s, \tau) ds \quad (h, k, l \text{ interi}) \quad (0 \leq \tau \leq t)\,,$$

ove r è un intero verificante le condizioni: $1 \leq r < h + k + l$ ed ove la somma $\sum_{i+j+g=r}$ è estesa a tutte le terne (i, γ, g) di interi non negativi tali che $i + j + g = r$ facendo la convenzione che ogni $\varphi_{h,k,l}$ con indici negativi sia nulla. La *funzione $\varphi_{h,k,l}(t, \tau)$ risulta indipendente dalla scelta dell'intero r che interviene nella sua definizione* [25].

---

[24] Cfr. nota [7].
[25] Cfr. [13] pp. 306-307.

Il *Volterra*, in [13] [26], dimostra che:

X. *La serie di potenze:*

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} \varphi_{h,k,l}(\tau, t) \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \tag{19}$$

$$\cdot \frac{[2(\alpha+\beta+\gamma)]!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{(2h)!(2k)!(2l)!}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!} \frac{x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta} x_3^{2\gamma}}{(h-\alpha)!(k-\beta)!(l-\gamma)!}$$

è totalmente convergente al variare di x in un qualsiasi insieme limitato di S_3 e di t, τ in T_0.

Ne viene che, indicata con $\Phi(x, \tau, t)$ la somma di questa serie, la funzione $\Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, \tau, t\right)$ gode delle seguenti proprietà:

1) per ogni fissato ξ (per ogni fissato x) è continua assieme a tutte le sue derivate rispetto a x_1, x_2, x_3, di ordine comunque elevato, al variare di x (di ξ) in $S_3 - \xi$ (in $S_3 - x$) e di t, τ in T_0.

2) indicata con $D^n \Phi(x, \tau, t)$ una qualsiasi derivata di ordine n di $\Phi(x, \tau, t)$ fatta rispetto a x_1, x_2, x_3, esiste un numero N_n, dipendente solo da n, tale che:

$$\left| D^n \Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, \tau, t\right) \right| \leq N_n \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{20}$$

Allora, la funzione

$$V(x,\xi,t,t') = \frac{1}{|x-\xi|}\left[1 + \int_t^{t'} \Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, \tau, t\right) d\tau\right],$$

che pensiamo definita per $x \neq \xi$, $0 \leq t \leq t'$, risulta continua nel suo insieme di definizione assieme alle sue derivate di ordine comunque elevato rispetto a x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3, e del primo ordine rispetto a t', le quali si calcolano con le ordinarie regole di derivazione sotto il segno d'integrale. Dall'applicazione di tali regole di derivazione, tenendo conto della (20), si trae subito che, uniformemente al variare di t, $t' \in T_0$ con $t \leq t'$, riesce:

$$D_{x,t'} V(x, \xi, t, t') = O\left(\frac{1}{|x-\xi|^{m+1}}\right), \tag{21}$$

$$D_{\xi,t'} V(x, \xi, t, t') = O\left(\frac{1}{|x-\xi|^{m+1}}\right)$$

---

[26] Pp. 307-309.

ove con $D_{x,t'}$ (con $D_{\xi,t'}$) si indichi una derivata parziale di ordine m rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 (alle variabili ξ_1, ξ_2, ξ_3) e al più di primo ordine rispetto a t'.

Il *Volterra*, in [13] (27), dimostra che:

XI. *La funzione* $V(x, \xi, t, t')$, *per ogni fissato* t' *in* $T_0 - 0$, *e per ogni fissato* ξ (*per ogni fissato* x), *come funzione di* (x, t) (*come funzione di* (ξ, t)) *soddisfa l'equazione*

$$E^*[v(x, t), t'] = 0 \qquad (E^*[v(\xi, t), t'] = 0) \tag{22}$$

nell'insieme definito da: $x \in S_3 - \xi$ (*da* $\xi \in S_3 - x$), $0 \leq t \leq t'$.

La funzione $V(x, \xi, t, t')$ è la *soluzione fondamentale di Volterra* dell'equazione integro-differenziale (22).

In base all'*osservazione 1* dell'introduzione, possiamo anche affermare che: la funzione:

$$W(x, \xi, t, t') - \frac{1}{|x - \xi|}\left|1 + \int_0^t \Phi\left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|}, t, \tau\right)d\tau\right|,$$

che pensiamo definita per $x \neq \xi$, $0 \leq t \leq t'$, risulta continua nel suo insieme di definizione assieme alle sue derivate di ordine comunque elevato rispetto ad $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, le quali si calcolano con l'ordinaria regola di derivazione sotto il segno d'integrale. Dall'applicazione di queste regole, tenendo presente le (20), si trae subito che, uniformemente rispetto a t, riesce:

$$D_x W(x, \xi, t, t') = O\left(\frac{1}{|x - \xi|^{m+1}}\right), \tag{23}$$

$$D_\xi W(x, \xi, t, t') = O\left(\frac{1}{|x - \xi|^{m+1}}\right),$$

ove con D_x (con D_ξ) si indichi una derivata parziale di ordine m rispetto a x_1, x_2, x_3 (a ξ_1, ξ_2, ξ_3). Inoltre per ogni fissato $t' \leq t_0$ e per ogni fissato ξ (per ogni fissato x), come funzione di x (di ξ), la $W(x, \xi, t, t')$ soddisfa l'equazione (1) nell'insieme definito da $x \in S_3 - \xi$ (da $\xi \in S_3 - x$) $0 \leq t \leq t'$. Per dimostrare quest'ultimo risultato basta osservare che, con riferimento alle notazioni dell'*Osservazione* 1 dell'introduzione, dalle posizioni:

$$\tilde{\varphi}_{1,0,0}(t, \tau) = \tilde{\varphi}_1(t, \tau)\ , \ \tilde{\varphi}_{0,1,0}(t, \tau) = \tilde{\varphi}_2(t, \tau)\ , \ \tilde{\varphi}_{0,0,1}(t, \tau) = \tilde{\varphi}_3(t, \tau)$$

$$\tilde{\varphi}_{h,k,l}(t, \tau) = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=r} \tilde{\varphi}_{h-i,k-j,l-g}(t, s)\tilde{\varphi}_{i,j,g}(s, \tau)ds$$

(27) Pp. 309-310.

si trae, per ricorrenza:

$$\tilde{\varphi}_{h,k,l}(t, \tau) = \varphi_{h,k,l}(t' - \tau, t' - t) .$$

Allora, indicata con $\tilde{\Phi}(x, \tau, t)$ la somma della serie (19), nella quale si siano sostituite le $\varphi_{h,k,l}$ con le $\tilde{\varphi}_{h,k,l}$ si ha:

$$\tilde{\Phi}(x, \tau, t) = \Phi(x, t' - t, t' - \tau)$$

e quindi, posto:

$$\tilde{V}(x, \xi, t, t') = \frac{1}{|x - \xi|}\left[1 + \int_t^{t'} \tilde{\Phi}\left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|}, \tau, t\right) d\tau\right],$$

riesce:

$$\tilde{V}(x, \xi, t, t') = \frac{1}{|x - \xi|}\left[1 + \int_0^{t'-t} \Phi\left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|}, t' - t, \tau\right) d\tau\right] \qquad t \leq t' .$$

Ne viene che la $W(x, \xi, t, t') \equiv \tilde{V}^*(x, \xi, t, t')$, come funzione di x (di ξ) per $x \neq \xi$ e $0 \leq t \leq t'$ verifica l'equazione $(\tilde{E}^*[v^*, t'])^* \equiv E(v) = 0$.

Tenendo presente che:

$$\frac{\partial^{2m} |x - \xi|^{2m-1}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}} = \frac{(2m - 1)!(2h)!(2k)!(2l)!}{(m - 1)!\, 2^{2m-1} |x - \xi|} \sum_0^h{}_\alpha \sum_0^k{}_\beta \sum_0^l{}_\gamma \frac{[2(\alpha + \beta + \gamma)]!}{(\alpha + \beta + \gamma)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!(h - \alpha)!(k - \beta)!(l - \gamma)!} \left(\frac{x_1}{|x - \xi|}\right)^{2\alpha} \left(\frac{x_2}{|x - \xi|}\right)^{2\beta} \left(\frac{x_3}{|x - \xi|}\right)^{2\gamma}$$

alla funzione Φ che interviene nella definizione di $V(x, \xi, t, t')$ e di $W(x, \xi, t, t')$ si può dare anche la seguente espressione (che ci sarà utile nel seguito):

$$\Phi\left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|}, \tau, t\right) = |x - \xi| \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} |x - \xi|^{2m-1}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}} \varphi_{h,k,l}(\tau, t) . \quad [28]$$

I caratteri di convergenza della serie a secondo membro si deducono immediatamente da quelli della serie (19).

---

[28] Cfr. [13] p 309.

5. Studio di alcuni potenziali di volume.

Ci proponiamo ora di studiare i seguenti potenziali di volume:

$$v(x, t) = \int_A \left[f(\xi, t) \frac{1}{|x-\xi|} + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \int_0^t f(\xi, \tau) \frac{1}{|x-\xi|} \Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, t, \tau \right) d\tau \right] d\xi$$

$$w_{t'}(x, t) = \int_A f(\xi, t) \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') d\xi = \tag{25}$$

$$= \int_A f(\xi, t) \frac{1}{|x-\xi|} \Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, t', t \right) d\xi \qquad (t \leq t') .$$

Proviamo innanzitutto che:

XII. *Se $f(x, t)$ è continua assieme alle sue derivate prime rispetto ad x_1, x_2, x_3 in $\bar{A} \times T_0$, si ha:*

$$f(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}A} f(\xi, t) \left[\frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial \nu_\xi} + \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial V(x, \xi, \tau, t')}{\partial \xi_i} \cdot \right. \tag{26}$$

$$\left. \cdot \varphi_i(\tau, t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\tau \right| d\sigma_\xi + \frac{1}{4\pi} \int_A \sum_1^3{}_i \left[\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial \xi_i} + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t'} \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial V(x, \xi, \tau, t')}{\partial \xi_i} \varphi_i(\tau, t) \right] d\xi \qquad t \leq t' .$$

Riesce:

$$\int_{\mathfrak{F}C} \left[\frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial \nu_\xi} + \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial V(x, \xi, \tau, t')}{\partial \xi_i} \cdot \right. \tag{27}$$

$$\left. \cdot \varphi_i(\tau, t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\tau \right| d\sigma_\xi = 4\pi \text{ (29)} \qquad t \leq t' ,$$

(29) Cfr. [13] pp. 312-313. Con ν_ξ indichiamo la normale interna nel punto ξ e con $d\sigma$ l'elemento d'area superficiale.

ove con C indichiamo una sfera di centro x. Se $f(x,t)$ è una funzione soddisfacente le ipotesi del teorema, per il lemma di *Green-Gauss* si ha:

$$(28) \qquad \int_{\mathfrak{F}[A-C_\rho(x)]} f(\xi, t) \left[\frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \nu_\xi} + \int_t^{t'} \sum_1^3 {}_i \frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial \xi_i} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varphi_i(\tau, t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\tau \right] d\sigma_\xi + \int_{A-C_\rho(x)} \sum_1^3 {}_i \left[\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_i} + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t'} \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial \xi_i} \varphi_i(\tau, t)\, d\tau \right] d\xi = 0$$

ove $C_\rho(x)$ è una sfera chiusa di centro x e raggio ϱ, contenuta in A. Dalla (27) si trae:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\mathfrak{F}[A-C_\rho(x)]} f(\xi, t) \left[\frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \nu_\xi} + \int_t^{t'} \sum_1^3 {}_i \frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial \xi_i} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varphi_i(\tau, t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\tau \right] d\sigma_\xi = \int_{\mathfrak{F}A} f(\xi, t) \left[\frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \nu_\xi} + \right.$$

$$\left. + \int_t^{t'} \sum_1^3 {}_i \frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial \xi_i} \varphi_i(\tau, t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\tau \right] d\sigma_\xi - 4\pi f(x, t) ,$$

e quindi, passando al limite, per $\varrho \to 0$, nella (28), si ottiene la (26).

Con dimostrazione analoga a quella dell'ordinario potenziale di volume (newtoniano) si dimostra il seguente teorema:

XIII. *Se $f(x,t)$ verifica le ipotesi del teorema precedente, il potenziale* (25), *avente per densità la $f(x,t)$, è continuo in $A \times (0, t')$ assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x_1, x_2, x_3 e sussiste la formula*:

$$(29) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_A f(\xi, t) \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi = \int_{\mathfrak{F}A} f(\xi, t) \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} \cdot$$

$$\cdot \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi + \int_A \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_A f(\xi, t) \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi = - \int_{\mathfrak{F}A} f(\xi, t) \frac{\partial^2 V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j \partial t'} \cdot$$

$$\cdot \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi - \int_A \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j \partial t'} d\xi \qquad (t \leq t') .$$

Possiamo dimostrare ora che:

XIV. *Se $f(x,t)$ è una funzione continua e limitata in $A \times T_0$, hölderiana rispetto ad x in $A \times T_0$ uniformemente al variare di t in T_0, il potenziale* (24), *di densità $f(x,t)$, è continuo in $A \times T_0$ assieme alla sue derivate prime rispetto ad x_1, x_2, x_3 ed ha derivate seconde rispetto alle stesse variabili in ogni punto di $A \times T_0$; inoltre verifica in $A \times T_0$ l'equazione:*

$$E(v(x, t)) + 4\pi f(x, t) = 0 . \tag{30}$$

Se l'hölderianità di $f(x, t)$ rispetto a x in $A \times T_0$ è uniforme in ogni insieme chiuso contenuto in $A \times T_0$, le derivate seconde di $v(x, t)$ rispetto ad x_1, x_2, x_3 sono continue in $A \times T_0$ (30).

Dimostriamo la prima parte del teorema. Cominciamo con il considerare il caso che la densità sia funzione della sola t, cioè prendiamo in considerazione il potenziale:

$$v(x, t') = \int_A f(t') \left[\frac{1}{|x - \xi|} + \int_0^{t'} f(t) \frac{1}{|x - \xi|} \cdot \right. \tag{31}$$

$$\left. \cdot \Phi\left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|}, t', t \right) dt \right] d\xi ,$$

ove $f(t)$ è una funzione continua in T_0.

Si ha:

$$v(x, t') = f(t') \int_A \frac{1}{|x - \xi|} d\xi + \int_0^{t'} f(t) dt \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') d\xi \quad (31) . \tag{32}$$

Facciamo ora vedere che il secondo addendo è funzione di (x, t') continua in $A \times T_0$ assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto *a* x_1, x_2, x_3 e che riesce:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{t'} f(t) dt \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') d\xi = \tag{33}$$

$$= \int_0^{t'} f(t) dt \frac{\partial}{\partial x_i} \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') d\xi ,$$

---

(30) Questo teorema fu enunciato da *Volterra* in [13] p. 320.

(31) La funzione $\int_A V(x, \xi, t, t') d\xi$ è dotata di derivata parziale prima rispetto a t', continua in $S_3 \times T_0$, e riesce: $\frac{\partial}{\partial t'} \int_A V(x, \xi, t, t') d\xi = \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') d\xi$. Basta, per questo, tener presente la (21).

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_0^{t'} f(t)dt \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x,\xi,t,t')d\xi =$$

$$= \int_0^{t'} f(t)dt \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x,\xi,t,t')d\xi .$$

Per il teor,. XIII si ha che la funzione di x, t, t' : $\int_A \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi$ è continua in $x \in A$, $t' \in T_0$, $t \in (o, t')$ assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x_1, x_2, x_3 e riesce:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_A \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi = \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_A \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial t'} d\xi = -\int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial^2 V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j \partial t'} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi , \quad (t \leq t') .$$

Da qui si traggono la continuità delle derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3 di $\int_0^{t'} f(t)dt \int_A \frac{\partial}{\partial t'} V(x,\xi,t,t')\, d\xi$ in $A \times T_0$, e le formule (33), È così provato che la $v(x, t')$, espressa da (31), è continua assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad x_1, x_2, x_3 in $A \times T_0$; inoltre è anche provato che, per la v espressa da (31), sussiste la formula

$$(34) \qquad \frac{\partial^2 v(x,t')}{\partial x_i \partial x_j} = - f(t')\int_{\mathfrak{F}A}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{1}{|x-\xi|}\right)\cos(\nu_\xi, x_i)d\sigma_\xi -$$

$$- \int_0^{t'} f(t)dt \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial^2 V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j \partial t'} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'} f(t)dt \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi\right] .$$

Facciamo ora vedere che:

$$(35) \qquad \int_0^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t',t)dt = -\sum_1^3{}_i \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} f(t)dt \,\cdot$$

$$\cdot \int_t^{t'} \varphi_i(\tau,t)d\tau \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial \xi_i} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi .$$

Si ha, per la (34):

$$\int_0^{t'} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t',t)dt = -\int_0^{t'} \varphi_i(t',t)f(t)dt \cdot \tag{36}$$

$$\cdot \int_{\mathfrak{F}A} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{|x-\xi|} \right) \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi - \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t f(\tau)d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial t} V(x,\xi,\tau,t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi .$$

Ricordando l'espressione di $V(x, \xi, t, \tau)$, si vede che:

$$\int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t f(\tau)d\tau \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial t} V(x,\xi,\tau,t) \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi =$$

$$= \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t f(\tau)d\tau \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \varphi_{h,k,l}(t,\tau) \cdot$$

$$\cdot \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial^{2m}}{\partial \xi_1^{2h} \partial \xi_2^{2k} \partial \xi_3^{2l}} |x-\xi|^{2m-1} \cos(\nu_\xi, x_i) d\sigma_\xi = -\int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \cdot$$

$$\cdot \int_0^t f(\tau)d\tau \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \varphi_{h,k,l}(t,\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}} \cdot$$

$$\cdot \int_A |x-\xi|^{2m-1} d\xi = -\int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t f(\tau)d\tau \cdot$$

$$\cdot \sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!} \sum_{h+k+l=m} \varphi^i_{h,k,l}(t,\tau) \cdot \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}} \cdot$$

$$\cdot \int_A |x-\xi|^{2m-3} d\xi \ \text{(32)} = -\sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}}$$

$$\int_A |x-\xi|^{2m-3} d\xi \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t f(\tau) \varphi^i_{h,k,l}(t,\tau)d\tau =$$

$$= -\sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h} \partial x_2^{2k} \partial x_3^{2l}} \int_A |x-\xi|^{2m-3} d\xi \cdot$$

$$\cdot \int_0^{t'} f(t)dt \int_t^{t'} \varphi_i(t',\tau) \varphi^i_{h,k,l}(\tau,t)d\tau .$$

---

(32) Ove si è posto:

$$\varphi^1_{h,k,l} = \varphi_{h-1,k,l}, \quad \varphi^2_{h,k,l} = \varphi_{h,k-1,l}, \quad \varphi^3_{h,k,l} = \varphi_{h,k,l-1} .$$

Allora, tenuto conto della (36), si ha:

$$(37)\quad \int_0^{t'} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2}\varphi_i(t',t)dt = -\int_0^{t'} f(t)\varphi_i(t',t)dt\,\cdot$$

$$\cdot \int_{\mathfrak{F}A}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{1}{|x-\xi|}\right)\cos(\nu_\xi, x_i)d\sigma_\xi + \sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h}\partial x_2^{2k}\partial x_3^{2l}}\,\cdot$$

$$\cdot \int_A |x-\xi|^{2m-3}d\xi \int_0^{t'} f(t)dt \int_t^{t'} \varphi_i(t',\tau)\varphi_{h,k,l}^i(\tau,t)d\tau\,.$$

Si ha anche:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)d\tau\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial}{\partial\xi_i}V(x,\xi,\tau,t')\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi =$$

$$= \int_0^{t'} f(t)\varphi_i(t',t)dt\int_{\mathfrak{F}A}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{|x-\xi|}\right)\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi +$$

$$+\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)d\tau\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial t'}V(x,\xi,\tau,t')\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi\,.$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto per ottenere la (37), si vede che:

$$\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)d\tau\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial t'}V(x,\xi,\tau,t')\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi =$$

$$= -\sum_2^\infty {}_m\frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h}\partial x_2^{2k}\partial x_3^{2l}}\int_A |x-\xi|^{2m-3}d\xi\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)\varphi_{h,k,l}^i(t',\tau)d\tau\,,$$

e quindi si ha:

$$(38)\qquad -\frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)d\tau\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial V(x,\xi,\tau,t')}{\partial\xi_i}\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi =$$

$$= -\int_0^{t'} f(t)\varphi_i(t',t)dt\int_{\mathfrak{F}A}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{|x-\xi|}\cos(\nu_\xi,x_i)d\sigma_\xi + \sum_2^\infty {}_m\frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2h}\partial x_2^{2k}\partial x_3^{2l}}\int_A |x-\xi|^{2m-3}d\xi\int_0^{t'} f(t)dt\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)\varphi_{h,k,l}^i(t',\tau)d\tau\,.$$

Confrontando (37) e (38), ove si tenga presente che:

$$(39) \qquad \sum_{1}^{3}{}_i \int_t^{t'} \varphi_i(t', \tau)\varphi^i_{h,k,l}(\tau, t)d\tau = \sum_{1}^{3}{}_i \int_t^{t'} \varphi_i(\tau, t)\varphi^i_{h,k,l}(t', \tau)d\tau \text{ (33)},$$

si vede che sussiste la (35).

Tenendo presenti le (34) (35) e la (26) (nella quale ultima si sostituisca la $f(x, t)$ con la $f(t)$) si verifica subito che:

$$(40) \qquad E[v(x, t')] = \Delta_x^2 v(x, t') + \int_0^{t'} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t', t)dt =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'} f(t)dt \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial \nu_\xi} d\sigma_\xi\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'} f(t)dt \int_t^{t'} \varphi_i(\tau, t)d\tau \int_{\mathfrak{F}A} \frac{\partial V(x, \xi, \tau, t')}{\partial \xi_i} \cos(\nu_\xi, x_i)\, d\sigma_\xi =\right.$$

$$= -4\pi f(t') \qquad x \in A .$$

Il teorema è così provato nel caso di densità dipendenti soltanto da t.

Veniamo ora al caso generale. Sia x_0 un fissato punto di A. In corrispondenza a tale punto, consideriamo la funzione:

$$v_0(x, t') = \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} dt \int_A [f(\xi, t) - f(x_0, t)]V(x, \xi, t, t')d\xi .$$

Sfruttando la hölderianità di $f(x, t)$ rispetto a x_1, x_2, x_3 in $A \times T_0$, uniforme rispetto a t in T_0, usando gli stessi ragionamenti che si impiegano per il potenziale di volume (newtoniano), si trova che la funzione $v_0(x, t')$

(33) Per dimostrare questa identità, basta osservare che, se si assume $r = 1$ si ottiene:

$$\varphi_{h,k,l}(t, \tau) = \sum_{1}^{3}{}_i \int_\tau^t \varphi^i_{h,k,l}(t, s)\varphi_i(s, \tau)ds .$$

e se si fa $r = h + k + l - 1$, si ha:

$$\varphi_{h,k,l}(t, \tau) = \sum_{1}^{3}{}_i \int_\tau^t \varphi_i(t, s)\varphi^i_{h,k,l}(s, \tau)ds .$$

è dotata di derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3 nel punto x_0, quale si sia t' in T_0, e che esse si calcolano derivando sotto il segno d'integrale. In particolare si ha:

$$(41)\qquad \left(\frac{\partial^2 v_0(x,t')}{\partial x_i^2}\right)_{x=x_0} = \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} dt \int_A [f(\xi,t) - f(x_0,t)] \cdot \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} V(x_0,\xi,t,t')d\xi\,.$$

Facciamo ora vedere che:

$$(42)\qquad \int_0^{t'} \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i^2}\right)_{x=x_0} \varphi_i(t',t)dt = \sum_1^3{}_i \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \cdot \left[\int_0^{t'} dt \int_A [f(\xi,t) - f(x_0,t)]d\xi \int_t^{t'} \varphi_i(\tau,t)\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} V(x_0,\xi,\tau,t')d\tau\right].$$

Per la (41), si ha:

$$\int_0^{t'} \left(\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i^2}\right)_{x=x_0} \varphi_i(t',t)dt = \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t d\tau \cdot \cdot \int_A [f(\xi,\tau) - f(x_0,\tau)]\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} V(x_0,\xi,\tau,t)d\xi = \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_A [f(\xi,t) - f(x_0,t)] \cdot \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\frac{1}{|x_0 - \xi|}\right)d\xi + \int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t d\tau \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \varphi_{h,k,l}(t,\tau) \cdot \cdot \int_A [f(\xi,\tau) - f(x_0,\tau)] \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial \xi_1^{2h}\partial \xi_2^{2k}\partial \xi_3^{2l}} |x_0 - \xi|^{2m-1}d\xi\,.$$

Riesce:

$$\int_0^{t'} \varphi_i(t',t)dt \int_0^t d\tau \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \varphi_{h,k,l}(t,\tau) \int_A [f(\xi,\tau) - f(x_0,\tau)] \cdot \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial \xi_1^{2h}\partial \xi_2^{2k}\partial \xi_3^{2l}} |x_0 - \xi|^{2m-1}d\xi = \sum_2^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!} \sum_{h+k+l=m} \int_0^{t'} dt \cdot \cdot \int_A [f(\xi,t) - f(x_0,t)] \frac{\partial^{2m}}{\partial \xi_1^{2h}\partial \xi_2^{2k}\partial \xi_3^{2l}} |x_0 - \xi|^{2m-3}d\xi \int_t^{t'} \varphi^i_{h,k,l}(\tau,t)\varphi_i(t',\tau)d\tau$$

e pertanto:

$$(43)\quad \int_0^{t'}\left(\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i^2}\right)_{x=x_0}\varphi_i(t',t)dt = \int_0^{t'}\varphi_i(t',t)dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{1}{|x_0-\xi|}d\xi + \sum_2^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{2(m-1)!}\sum_{h+k+l=m}\int_0^{t'}dt\,\cdot$$

$$\cdot\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi_1^{2h}\partial\xi_2^{2k}\partial\xi_3^{2l}}|x_0-\xi|^{2m-3}d\xi\int_t^{t'}\varphi^i_{h,k,l}(\tau,t)\varphi_i(t',\tau)d\tau\,.$$

Si ha, d'altra parte:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'}dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0-t)]d\xi\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}V(x_0,\xi,\tau,t')d\tau\right] =$$

$$= \int_0^{t'}\varphi_i(t',t)dt\int_A f[(\xi,t)-f(x_0,t)]\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{1}{|x_0-\xi|}d\xi + \int_0^{t'}dt\,\cdot$$

$$\cdot\int_t^{t'}d\tau\,\varphi_i(\tau,t)\sum_1^\infty{}_m\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\varphi_{h,k,l}(t',\tau)\,\cdot$$

$$\cdot\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi_1^{2h}\partial\xi_2^{2k}\partial\xi_3^{2l}}|x_0-\xi|^{2m-1}d\xi\,.$$

Ne viene:

$$(44)\quad \frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'}dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]d\xi\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}V(x_0,\xi,\tau,t')d\tau\right] =$$

$$= \int_0^{t'}\varphi_i(t',t)dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{1}{|x_0-\xi|}d\xi +$$

$$+\sum_2^\infty{}_m\frac{(-1)^{m-1}}{[2(m-1)]!}\sum_{h+k+l=m}\int_0^{t'}dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\,.$$

$$\cdot\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi_1^{2h}\partial\xi_2^{2k}\partial\xi_3^{2l}}|x_0-\xi|^{2m-3}d\xi\int_t^{t'}\varphi_i(\tau,t)\varphi^i_{h,k,l}(t',\tau)d\tau\,.$$

Confrontando (43) con (44) e tenendo presente la (39), si vede che sussiste la (42). Da (41) e (42) si trae allora:

$$(45)\quad (E[v_0(x,t')])_{x=x_0} = (\Delta_x^2 v_0(x,t')_{x=x_0} +$$

$$+\int_0^{t'}\sum_1^3{}_i\left(\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i^2}\right)_{x=x_0}\varphi_i(t',t)dt = \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'}dt\int_A [f(\xi,t)-f(x_0,t)]\,\cdot$$

$$\cdot\left[\Delta^2_\xi V(x_0,\xi,t,t') + \int_t^{t'} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2} V(x_0,\xi,\tau,t')\varphi_i(\tau,t)d\tau\right]d\xi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} dt \int_A [f(\xi,t) - f(x_0,t)]\,(E^*_{t'}[V(x,\xi,\tau,t')])_{x=x_0} d\xi = 0\,.$$

Avendosi:

$$v(x,t') = v_0(x,t') - \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} f(x_0,t)dt \int_A V(x,\xi,t,t')d\xi\,, \tag{46}$$

dalle (40) (45) si trae:

$$(E[v(x,t')])_{x=x_0} = -\,4\pi f(x_0,t')\,.$$

Per l'arbitrarietà di x_0 in A e di t' in T_0 si ha quindi:

$$E[v(x,t)] = -\,4\pi f(x,t) \qquad\qquad x \in A,\ t \in T_0\,.$$

È così dimostrata la prima parte del teorema.

Supponiamo ora che la densità $f(x,t)$ sia hölderiana rispetto ad x, uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $A \times T_0$. Da (46), per (34) e (41), si trae:

$$\frac{\partial^2 v(x,t')}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t'}\left[\int_0^{t'} dt \int_{\mathfrak{F}A} f(x,t)\,\frac{\partial V(x,\xi,t,t')}{\partial \xi_j}\cos(\nu_\xi, x_i)d\sigma_\xi\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} dt \int_A [f(\xi,t) - f(x,t)]\,\frac{\partial^2 V(x,\xi,t,t')}{\partial x_i \partial x_j}\,d\xi\,.$$

Il primo addendo è, ovviamente, continuo in $A \times T_0$. La continuità del secondo si dimostra con gli stessi ragionamenti che si impiegano per l'ordinario potenziale di volume. Il teorema è così completamente dimostrato:

Dalla dimostrazione di questo teorema si trae subito anche il seguente risultato.

XV. *Se $f(x,t)$ verifica le ipotesi precisate nella seconda parte dell'enunciato del teorema precedente, e se $\gamma(x,\xi)$ è una funzione di classe C_∞ in $S_3 \times S_3$, la funzione di (x,t):*

$$\int_A f(\xi,t)\,\frac{\gamma(x,\xi)}{|\,x-\xi\,|}\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_A f(\xi,\tau)\gamma(x,\xi)\,\frac{\partial}{\partial t}\,V(x,\xi,\tau,t)d\xi$$

è continua in $A \times T_0$ assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3.

In base all'*osservazione 1* dell'introduzione, posto:

$$(47) \qquad v_{t'}(x,t) = \int_A \left[f(\xi,t) \frac{1}{|x-\xi|} + \int_t^{t'} f(\xi,\tau) \frac{1}{|x-\xi|} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \Phi\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|}, \tau, t\right) d\tau \right] d\xi \qquad 0 \leq t \leq t', x \in A,$$

dal teor. XIV si trae il seguente:

XIV*. *Se $f(x,t)$ è una funzione continua e limitata in $A \times T_0$, hölderiana rispetto ad x in $A \times T_0$, uniformemente al variare di t in T_0, il potenziale* (47), *di densità $f(x,t)$, è continuo in $A \times (0,t')$ assieme alle sue derivate prime rispetto ad x_1, x_2, x_3 ed ha derivate seconde rispetto alle stesse variabili in ogni punto di $A \times (0,t')$; inoltre verifica in $A \times (0,t')$ l'equazione:*

$$(48) \qquad E^*[v_{t'}(x,t), t'] = -4\pi f(x,t).$$

Se l'hölderianità di $f(x,t)$ rispetto ad x in $A \times T_0$ è uniforme in ogni insieme chiuso contenuto in $A \times T_0$, allora le derivate seconde di $v_{t'}, (x,t)$ rispetto ad x_1, x_2, x_3 sono continue in $A \times (0,t')$.

6. Regolarizzazione della soluzione.

Siano x_0 un punto di A, Γ una corona sferica chiusa, di centro x_0, contenuta in A. Indichiamo con $\mathfrak{B}(x_0, \Gamma)$ la totalità delle funzioni reali $v(x,t)$ che godono delle seguenti proprietà:

I) $v(x,t)$ è continua in $\bar{A} \times T_0$ assieme alle sue derivate parziali prime rispetto ad x_1, x_2, x_3,

II) la $v(x,t)$ è dotata di derivate parziali seconde, rispetto ad x_1, x_2, x_3, continue in $\bar{A} \times T_0$ ed è tale che $\Delta_x^2 v(x,t) = 0$ in $\overline{A - \Gamma} \times T_0$,

III) $v(x,t)$ è nulla per $x \in \mathfrak{F}A$, $t \in T_0$.

Dimostriamo che:

XVI. *Se u è soluzione debole del problema di Dirichlet per la* (1) *(con dato al contorno omogeneo), la $u(x,t)$ verifica la relazione:*

$$(49) \qquad \int_A u(x,t) \Delta_x^2 v(x,t) dx + \int_0^t d\tau \int_A u(x,\tau) \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2} \cdot$$
$$\cdot \varphi_i(t,\tau) dx = \int_A v(x,t) f(x,t) dx \qquad t \neq 0. \text{ in } T_0, \; v \in \mathfrak{B}(x_0, \Gamma).$$

La u verifica la relazione:

$$(50)\qquad \int_{A\times T_0} u(x,t)\left[\Delta_x^2 v(x,t) + \int_t^{t_0}\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2}\varphi_i(\tau,t)d\tau\right]dxdt = $$

$$= \int_{A\times T_0} v(x,t)f(x,t)dxdt$$

per ogni $v \in \mathfrak{V}(x_0, \Gamma)$. Indicata con $v_{t'}, (x, t)$ la funzione che coincide con $v(x, t)$ per $x \in \overline{A}$, $0 \leq t \leq t'$ e che è identicamente nulla per $x \in \overline{A}$, $t' \leq t \leq t_0$, si ha:

$$(50')\qquad \int_{A\times T_0} u(x,t)\left[\Delta_x^2 v_{t'}(x,t) + \int_t^{t_0}\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2 v_{t'}(x,\tau)}{\partial x_i^2}\varphi_i(\tau,t)d\tau\right]dxdt - $$

$$= \int_{A\times T_0} v_{t'}(x,t)f(x,t)dxdt$$

e quindi:

$$(51)\qquad \int_0^{t'} dt\int_A u(x,t)\left[\Delta_x^2 v(x,t) + \int_t^{t'}\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2}\varphi_i(\tau,t)d\tau\right]dxdt = $$

$$= \int_0^{t'} dt \int_A v(x,t)f(x,t)dxdt\,.$$

Introdotta infatti la funzione $g_n(t)$ così definita:

$$g_n(t)\ \begin{cases} = 1 & 0 \leq t \leq t' \\ = 1 - n(t-t') & t' < t \leq t' + \dfrac{1}{n} \\ = 0 & t' + \dfrac{1}{n} < t \leq t_0\,, \end{cases}$$

si ha

$$|\,v(x,t)g_n(t)\,| \leq |\,v(x,t)\,|\ ,\quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v(x,t)g_n(t)\right| \leq \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v(x,t)\right|;$$

allora, sostituendo, nella (50), $v(x, t)$ con $v(x, t)g_n(t)$, e passando al limite, per $n \to \infty$, si ottiene la (50′) (in corrispondenza ad ogni valore t'). Deri-

vando ambo i membri della (51) rispetto a t' in quasi tutti i punti di T_0, si ottiene:

$$(52) \qquad \int_A u(x,t')\Delta_x^2 v(x,t')dx + \int_0^{t'} dt \int_A \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,t')}{\partial x_i^2} \cdot$$

$$\cdot \varphi_i(t',t)u(x,t)dx = \int_A v(x,t')f(x,t')dx \text{ (34)} .$$

Così, il teor. XVI è dimostrato.

Siano x_0 un punto di A, Γ una corona sferica chiusa, di centro x_0, contenuta in A. Indichiamo con $U(x_0, \Gamma)$ la classe delle funzioni $\Psi(x, \xi)$ che godono delle seguenti proprietà:

1) la $\Psi(x, \xi)$ è definita per $\xi \in \overline{A}$ e x contenuto in un intorno di $x_0 : I_{x_0}$,

---

(34) Infatti, posto

$$\varphi(t,t',x) = \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(\tau,t)d\tau ,$$

si ha:

$$\varphi(t,t',x) = O(|t'-t|) , \quad \frac{\partial \varphi(t,t')}{\partial t'} = O(1) .$$

e inoltre:

$$\frac{1}{\Delta t'}\left[\int_0^{t'+\Delta t'} dt \int_A u(x,t)\varphi(t,t'+\Delta t',x)dx - \int_0^{t'} dt \int_A u(x,t)\varphi(t,t',x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t'}\left[\int_0^{t'+\Delta t'} dt \int_A u(x,t)\,(\varphi(t,t'+\Delta t',x) - \varphi(t,t',x))dx\right] + \frac{1}{\Delta t'}\int_{t'}^{t'+\Delta t'} dt \cdot$$

$$\cdot \int_A u(x,t)\varphi(t,t',x)dx = \int_0^{t'} dt \int_A u(x,t)\,\frac{\partial \varphi(t,t'+\theta\Delta t',x)}{\partial t'}\,dx +$$

$$+ \int_{t'}^{t'+\Delta t'} dt \int_A u(x,t)\,\frac{\partial \varphi(t,t'+\theta\Delta t',x)}{\partial t'}\,dx + \frac{1}{\Delta t'}\int_{t'}^{t'+\Delta t'} dt \int_A u(x,t)\varphi(t,t',x)dx .$$

Per $\Delta t' \to 0$, gli ultimi due integrali tendono a zero, per ogni valore di t', mentre il primo integrale tende a

$$\int_0^{t'} dt \int_A u(x,t)\,\frac{\partial \varphi(t,t',x)}{\partial t'}\,dx .$$

È così provato che:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int_0^{t'} dt \int_A u(x,t)dx \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(\tau,t)d\tau = \int_0^{t'} dt \int_A \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} \varphi_i(t',t)u(x,t)dx .$$

2) la $\Psi(x, \xi)$ è continua assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto ad $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ nell'insieme $\xi \in \bar{A}$, $x \in I_{x_0}$,

3) la $\Psi(x, \xi)$ è identicamente nulla nell'insieme: $\xi \in \overline{A - \Gamma}$, $x \in I_{x_0}$.

Denotiamo con $\mathfrak{V}'(x_0, \Gamma)$ la classe delle funzioni $v(x, \xi)$ che verificano le seguenti condizioni:

I) $v(x, \xi)$ è continua, assieme alle sue derivate prime nell'insieme $\xi \in \bar{A}$, $x \in I_{x_0}$,

II) $v(x, \xi)$ è di classe due per $x \in I_{x_0}$, $\xi \in \bar{A}$ e tale che: $\Delta^2_\xi v(x, \xi) = 0$, $\xi \in \overline{A - \Gamma}$, $x \in I_{x_0}$,

III) $v(x, \xi)$ è nulla per ξ su $\mathfrak{F}A$.

Dimostriamo ora che:

XVI'. *Se $\Psi(x, \xi)$ appartiene a $U(x_0, \Gamma)$, esiste una funzione $v(x, \xi)$, contenuta in $\mathfrak{V}'(x_0, \Gamma)$ tale che:*

$$\Delta^2_\xi v(x, \xi) = \Psi(x, \xi)$$

per $x \in I_{x_0}$, $\xi \in A$.

Indicata con $\mathfrak{G}(\xi, \xi')$ la funzione di *Green* relativa all'operatore Δ^2 ed al campo A (35), la funzione $v(x, \xi) = \int_A \Psi(x, \xi')\mathfrak{G}(\xi, \xi')d\xi'$ soddisfa la tesi del teorema. Intanto, la $v(x, \xi)$, per ogni fissato ξ in $\bar{A}$, è continua al variare di x in I_{x_0} (infatti, la $\Psi(x, \xi')$ è continua al variare di x in I_{x_0} per ogni fissato ξ', ed inoltre la $\Psi(x, \xi')$ è limitata nel suo insieme di definizione). È poi evidente che $v(x, \xi)$ è continua rispetto a ξ in $\bar{A}$ uniformemente rispetto a x. In modo analogo si vede la continuità delle derivate prime di $v(x, \xi)$ rispetto ad x e ξ. La $v(x, \xi)$ si annulla per $\xi \in \mathfrak{F}A$, com'è ovvio. Si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j} v(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{F}\Gamma} \Psi(x, \xi')\frac{\partial}{\partial\xi'_i}\left(\frac{1}{|\xi - \xi'|}\right)\cos(\nu_i, x_j)d\sigma_{\xi'} -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\partial\Psi(x, \xi')}{\partial\xi'_j}\frac{\partial}{\partial\xi'_i}\left(\frac{1}{|\xi - \xi'|}\right)d\xi' + \int_\Gamma \Psi(x, \xi')\frac{\partial g(\xi, \xi')}{\partial\xi_i\partial\xi_j}d\xi'$$

per $\xi \in \Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$ oppure $\xi \in A - \Gamma$, $x \in I_{x_0}$ ove, con $g(\xi, \xi')$ si è indicata la parte regolare di $\mathfrak{G}(\xi, \xi')$: $g(\xi, \xi') = \mathfrak{G}(\xi, \xi') + \frac{1}{4\pi} \cdot \cdot \frac{1}{|\xi - \xi'|}$.

(35) Cfr. [4].

Da qui si deduce la continuità delle derivate seconde di $v(x, \xi)$ per $x \in I_{x_0}$, $\xi \in \overline{A}$; dalla precedente relazione si trae anche che $\Delta_\xi^2 v(x, \xi) = \Psi(x, \xi)$.

XVII. *Se $u(x, t)$ è soluzione debole del problema di Dirichlet per la* (1) *(con dato al contorno omogeneo), e se $v(x, \xi)$ è una funzione di $\mathfrak{B}'(x_0, \Gamma)$, la funzione*

$$\chi(x, t) = \int_0^t d\tau \int_A u(\xi, \tau) \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} \varphi_i(t, \tau) d\xi$$

è continua per $x \in I_{x_0}$ e $t \in T_0$.

La $\chi(x, t)$ è continua rispetto a t in T_0 uniformemente al variare di x in I_{x_0}. Infatti, indicato con M_0 un numero positivo tale che:

$$\left| \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} \varphi_i(t, \tau) \right| \leq M_0 \,, \quad \sum_1^3{}_i \left| \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} \right| \leq M_0 \,,$$

e detto δ_ϵ il modulo di continuità di $\varphi_i(t, \tau)$, si ha:

$$|\chi(x, t + \Delta t) - \chi(x, t)| \leq \left| \int_0^{t+\Delta t} d\tau \int_A u(\xi, \tau) \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{d\xi_i^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varphi_i(t + \Delta t, \tau) d\xi - \int_0^t d\tau \int_A u(\xi, \tau) \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} \varphi_i(t + t\Delta, \tau) d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t d\tau \int_A u(\xi, \tau) \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} [\varphi_i(t + \Delta t, \tau) - \varphi_i(t, \tau)] d\xi \right| \leq$$

$$\leq M_0 \left| \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_A |u(\xi, \tau)| d\xi \right| + \varepsilon M_0 \int_0^t d\tau \int_A |u(\xi, \tau)| d\xi \; |\Delta t| < \delta_\epsilon \,.$$

La continuità di $\chi(x, t)$ rispetto ad x in I_{x_0}, per ogni fissato t, è evidente. Dai teorr. XVI, XVI', XVII si trae che

XVIII. *Se $u(x, t)$ è soluzione debole del problema di Dirichlet per la* (1), *in corrispondenza ad ogni $\Psi(x, \xi) \in U(x_0, \Gamma)$, la funzione di (x, t):*

$$\int_\Gamma u(\xi, t) \Psi(x, \xi) d\xi \,,$$

pur di mutarne la definizione in un insieme di misura nulla, risulta continua per $t \in (0, t_0)$ ed $x \in I_{x_0}$, nell'ipotesi che $f(x, t)$ sia continua in $\overline{A} \times T_0$.

Infatti, detta $v(x, \xi)$ la funzione di cui si è provata l'esistenza, in relazione alla $\Psi(x, \xi)$, con il teorema XVI', per la (49), poichè: $v(x, \xi) \in \mathfrak{B}(x_0, \Gamma)$, si ha:

$$\int_A u(\xi, t)\Psi(x, \xi)d\xi = -\int_0^t d\tau \int_A u(\xi, \tau) \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 v(x, \xi)}{\partial \xi_i^2} \cdot$$

$$\cdot \varphi_i(t, \tau)d\xi + \int_A v(x, \xi)f(\xi, t)d\xi \qquad (x, t) \ q. \text{o. in } A \times T_0 .$$

La continuità del primo addendo del secondo membro è stata dimostrata con il teorema precedente. Quella del secondo addendo è di verifica immediata.

Possiamo ora dimostrare che:

XIX. *Se $f(x, t)$ è continua in $\bar{A} \times T_0$ ed uniformemente hölderiana rispetto ad x in ogni insieme chiuso contenuto in $A \times T_0$ e se u è soluzione debole del problema di Dirichlet per la* (1) *(con dato al contorno omogeneo), la $u(x, t)$ è continua assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3 in $A \times T_0$.*

Siano x_0 un punto di A, δ_{x_0} la distanza di x_0 da $\mathfrak{F}A$, r un numero positivo minore di $\frac{1}{5}\delta_{x_0}$, $C(x_0, \varrho)$ la sfera chiusa di centro x_0 e raggio ϱ ($\varrho > 0$), $g(\varrho)$ una funzione di classe C_∞ in $(0, \infty)$ tale che:

$$g(\varrho) \begin{cases} = 1 & 0 \leq \varrho \leq 3r \\ = 0 & \varrho \geq 4r . \end{cases}$$

In corrispondenza ad ogni funzione $\Psi(x)$ di classe C_∞ in S_3 ed avente supporto contenuto in $C(x_0, r) - [x_0 U \mathfrak{F}C(x_0, r)]$, poniamo:

$$(53) \quad v(x, t) \begin{cases} = \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi)g(|x - \xi|)V(x, \xi, t, t')d\xi & \text{per} \quad 0 \leq t \leq t' \\ = 0 & \text{»} \quad t' < t \leq t_0 . \end{cases}$$

Questa funzione, per $(x, t) \in [C(x_0, 2r)] \times (0, t')$, coincide con il potenziale (47) di densità $\Psi(\xi)$: $\int_{C(x, r)} \Psi(\xi)V(x, \xi, t, t')d\xi$ e in $[\mathfrak{C}C(x_0, 5r)] \times (0, t')$ è identicamente nulla. Tenendo conto del teor. XIV*, si vede che $v(x, t)$ appartiene a $\mathfrak{B}[\bar{A} \times (0, t')]$ e che inoltre riesce:

$$(54) \qquad E^*[v(x, t), t'] = -4\pi\, \Psi(x) \quad (x, t) \in [C(x_0, 2r)] \times (0, t') .$$

D'altra parte, se u è soluzione debole del nostro problema, per ogni $v \in \mathfrak{B}[\overline{A} \times (0, t')]$ riesce:

$$\int_{A \times T_0} u(x, t) E^*[v(x, t)] dxdt = \int_{A \times T_0} v(x, t) f(x, t) dxdt \tag{55}$$

come è stato provato nella dimostrazione del teor. XVI; pertanto, l'identità (55) è soddisfatta anche dalla $v(x, t)$ espressa da (53). Ne viene, in corrispondenza alla $v(x, t)$ data da (53):

$$\int_0^{t'} dt \int_A u(x, t) E^*[v(x, t), t'] dx = \int_0^{t'} dx \int_A v(x, t) f(x, t) dx .$$

Tenendo conto di (54), quest'ultima relazione può anche scriversi nella forma:

$$- 4\pi \int_{C(x_0, 2r)} \Psi(x) dx \int_0^{t'} u(x, t) dt + \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi) d\xi \int_0^{t'} dt \int_{A - C(x_0, 2r)} u(x, t) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \Delta_x^2 [g(|x - \xi|) V(x, \xi, t, t')] + \int_t^{t'} \sum_{1}^{3} {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(|x - \xi|) V(x, \xi, \tau, t') \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varphi_i(\tau, t) \, d\tau \right\} dx = \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi) d\xi \int_0^{t'} dt \int_A f(x, t) g(|x - \xi|) V(x, \xi, t, t') dx .$$

Ambo i membri di questa relazione sono derivabili q. o. rispetto a t' in T_0; derivando si ottiene [36].

$$- 4\pi \int_{C(x_0, 2r)} \Psi(x) u(x, t') dx + \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi) d\xi \int_{A - C(x_0, 2r)} u(x, t') \cdot \tag{56}$$

$$\cdot \Delta_x^2 \left(\frac{g(|x - \xi|)}{|x - \xi|} \right) dx + \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi) d\xi \int_0^{t'} dt \int_{A - C(x_0, 2r)} u(x, t) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \Delta_x^2 \left[g(|x - \xi|) \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t') \right] + \sum_{1}^{3} {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(g(|x - \xi|) \frac{1}{|x - \xi|} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \varphi_i(t' t) + \int_t^{t'} \sum_{1}^{3} {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[g(|x - \xi|) \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, \tau, t') \right] \cdot$$

---

[36] Cfr. nota [34].

$$\cdot\,\varphi_i(\tau, t)d\tau \Big\} dx = \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi)d\xi \int_A f(x, t')g(|x-\xi|)\frac{1}{|x-\xi|}\,dx +$$

$$+ \int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi)d\xi \int_0^{t'} dt \int_A f(x, t)g(|x-\xi|)\frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial t'}\,dx$$

$$t' \in T_0 - N, \quad \text{mis } N = 0\,.$$

La funzione di (ξ, t'):

$$\int_{A-C(x_0, 2r)} u(x, t')\Delta_x^2\left(\frac{g(|x-\xi|)}{|x-\xi|}\right)dx \equiv$$

$$\equiv \int_{C(x_0, 5r)-C(x_0, 2r)} u(x, t')\Delta_x^2\left(\frac{g(|x-\xi|)}{|x-\xi|}\right)dx$$

(pur di mutarne la definizione in un insieme di misura nulla) è continua in $C(x_0, r) \times T_0$ (teor. XVIII). Pertanto, la funzione di t':

$$\int_{C(x_0, r)} \Psi(\xi)d\xi \int_{A-C(x_0, 2r)} u(x, t')\Delta_x^2\left(\frac{g(|x-\xi|)}{|x-\xi|}\right)dx$$

è continua in T_0. Detto r' un numero positivo (dipendente da $\Psi(\xi)$) tale che: $\Psi(\xi) = 0$ per $\xi \in C(x_0, r')$ si ha:

$$\int_{C(x_0, 2r)} \Psi(x)u(x, t')dx = \int_{C(x_0, 2r')-C(x_0, r')} \Psi(x)u(x, t')dx$$

e quindi, per lo stesso teor. XVIII, la funzione di t':

$$\int_{C(x_0, 2r)} \Psi(x)u(x, t')dx$$

risulta continua in T_0. La continuità, rispetto a t', del secondo membro di (56), è evidente. Ne viene che la (56) sussiste per ogni $t' \in T_0$. Per l'arbitrarietà di Ψ nella classe delle funzioni di C_∞ aventi supporto contenuto in $C(x_0, r) - [x_0 \cup \mathfrak{F}C(x_0, r)]$ si ha allora:

$$4\pi u(x, t') = \int_{C(x_0, 5r)-C(x_0, 2r)} u(\xi, t')\Delta_\xi^2\left(\frac{g(|x-\xi|)}{|x-\xi|}\right)d\xi +$$

$$+ \int_0^{t'} dt \int_{A-C(x_0, 2r)} u(\xi, t) \Big\{ \Delta_\xi^2\left[g(|x-\xi|)\frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, t, t')\right] +$$

$$+ \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}\left(g(|x-\xi|)\frac{1}{|x-\xi|}\right)\varphi_i(t', t) + \int_t^{t'} \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,\cdot$$

$$\cdot \left[g(|x - \xi|) \frac{\partial}{\partial t'} V(x, \xi, \tau, t') \right] \varphi_i(\tau, t) d\tau \Bigg\} d\xi -$$

$$- \int_A f(\xi, t') g(|x - \xi|) \frac{1}{|x - \xi|} d\xi - \int_0^{t'} dt \int_A f(\xi, t) g(|x - \xi|) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial V(x, \xi, t, t')}{\partial t'} d\xi .$$

Per il teor. XVIII, il primo termine del secondo membro, pur di mutarne i valori in un insieme di misura nulla, è continuo assieme alle sue derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3 in $[C(x_0, r) - \mathfrak{F}C(x_0, r)] \times T_0$. Gli ultimi due termini del secondo membro sono continui in $A \times T_0$ assieme alle derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_2, x_3, come segue dal teor. XV. La regolarità degli altri termini del secondo membro, in $[C(x_0, r) - \mathfrak{F}C(x_0, r)] \times T_0$, è immediata. Così, il teor. XIX è dimostrato.

XX. *Se u è soluzione debole del problema di Dirichlet per la* (1) (*con dato al contorno omogeneo*), *nelle ipotesi del teorema precedente, la $u(x, t)$ verifica l'equazione* (1) *in ogni punto di $A \times T_0$.*

Sia C una arbitraria sfera contenuta in A e sia $\mathfrak{B}_c$ la sottoclasse di $\mathfrak{B}$ costituita dalle funzioni di $\mathfrak{B}$ che si annullano in $(A - C) \times T_0$. Per ogni v di $\mathfrak{B}_c$ riesce:

$$\int_{C \times T_0} [uE^*(v) - vE(u)] dxdt = 0 .$$

Ma si ha anche

$$\int_{C \times T_0} [uE^*(v) - vf] dxdt = 0 ,$$

donde, per ogni $v \in \mathfrak{B}_c$

$$\int_{C \times T_0} v[E(u) - f] dxdt = 0 .$$

Da qui segue l'asserto.

APPENDICE

Dimostriamo che:

XXI. *Se $f(\xi)$ è una funzione misurabile e sommabile in A ed hölderiana nel punto x_0 di A di coefficiente H ed esponente α, e se $\mathfrak{R}(x, \xi)$ è una funzione di classe C_2 rispetto a x_1, x_2, x_3 nell'insieme $A \times A$* (37) *privato dei punti (x, ξ) con $x = \xi$ e verificante la diseguaglianza:*

$$D^m \mathfrak{R}(x, \xi) | \leq L \frac{1}{|x - \xi|^{m+1}},$$

ove D^m indica una derivata di ordine $m \leq 2$ rispetto a x_1, x_2, x_3, la funzione di x:

$$\int_A [f(\xi) - f(x_0)] \mathfrak{R}(x, \xi) d\xi$$

è dotata di derivate prime e seconde in x_0, che si calcolano derivando sotto il segno d'integrale.

Per quanto riguarda le derivate prime l'asserto è evidente. Per dimostrare la tesi, basta allora far vedere che, indicata con $K(x, \xi)$ una qualsiasi derivata prima di $\mathfrak{R}(x, \xi)$ rispetto a x_1, x_2, x_3, le funzioni di ξ:

$$[f(\xi) - f(x_0)] \frac{K(x_0 + h_i, \xi) - K(x_0, \xi)}{h_i}$$

sono sommabili in A uniformemente rispetto ad h_i (ove si convenga di indicare con $x_0 + h_i$ il punto che si ottiene aggiungendo alla i-esima coordinata di x_0 il numero h_i $(\neq 0)$). Sia B un qualsiasi boreliano contenuto in A e sia $C(x_0, \varrho)$ la sfera di centro x_0 e raggio ϱ. Si ha:

$$\left| \int_B [f(\xi) - f(x_0)] \frac{K(x_0 + h_i, \xi) - K(x_0, \xi)}{h_i} d\xi \right| \leq$$

$$\leq HL \int_{B \cap C(x, 2|h_i|)} |\xi - x_0|^\alpha \frac{1}{|h_i|} \left(\frac{1}{|x_0 + h_i - \xi|^2} + \frac{1}{|x_0 - \xi|^2} \right) d\xi +$$

$$+ H \int_{B - C(x_0, 2|h_i|)} |\xi - x_0|^\alpha \left| \frac{K(x_0 + h_i, \xi) - K(x_0, \xi)}{h_i} \right| d\xi \leq$$

(37) Cioè continua con le derivate prime e seconde rispetto a x_1, x_3, x_2 in $A \times A$.

$$\leq 2HL\int_{B\cap C(x_0,2|h_i|)}\frac{1}{|x_0-\xi|^{3-\alpha}}d\xi\ (^{38}) + 2HL\int_{B\cap C(x_0,2|h_i|)}\frac{1}{|x_0-\xi|^{1-\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{|x_0+h_i-\xi|^2}d\xi + H\int_{B-C(x_0,2|h_i|)}|\xi-x_0|^\alpha\left|\frac{\partial K(x_0+\theta h_i,\xi}{\partial x_i}\right|\partial x,\ (^{39})$$

$$\int_{B\cap C(x_0,2|h_i|)}\frac{1}{|x_0-\xi|^{1-\alpha}}\frac{1}{|x_0+h_i-\xi|^2}d\xi\leq$$

$$\leq\left(\int_B\frac{1}{|x_0-\xi|^{3-\alpha}}d\xi\right)^{\frac{1-\alpha}{3-\alpha}}\left(\int_B\frac{1}{|x_0+h_i-\xi|^{3-\alpha}}d\xi\right)^{\frac{2}{3-\alpha}},$$

$$\int_{B-C(x_0,2|h_i|)}|\xi-x_0|^\alpha\left|\frac{\partial K(x_0+\theta h_i,\xi)}{\partial x_i}\right|d\xi\leq$$

$$\leq L\int_{B-C(x_0,2|h_i|)}|\xi-x_0|^\alpha\frac{1}{|x_0+\theta h_i-\xi|^3}d\xi\leq$$

$$\leq 2^3L\int_{B-C(x_0,2|h_i|)}\frac{1}{|x_0-\xi|^{3-\alpha}}d\xi\ .\ (^{40})$$

Ne viene

$$\left|\int_B[f(\xi)-f(x_0)]\frac{K(x_0+h_i,\xi)-K(x_0,\xi)}{h_i}d\xi\right|\leq$$

$$\leq 10\,HL\int_B\frac{1}{|x_0-\xi|^{3-\alpha}}d\xi + 2HL\left(\int_B\frac{1}{|x_0-\xi|^{\xi-\alpha}}d\xi\right)^{\frac{1-\alpha}{3-\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_B\frac{1}{|x_0+h_i-\xi|^{3-\alpha}}d\xi\right)^{\frac{2}{3-\alpha}}.$$

È così dimostrato l'asserto.

---

(38) Si tenga presente che, per $\xi\in B\cap C(x_0,2|h_i|)$ riesce:

$$\frac{1}{|h_i|}\leq\frac{2}{|x_0-\xi|}$$

(39) Ove θ è un numero tale che: $0<\theta<1$.

(40) Si osservi che, dalla $|h_i|\leq\frac{|x_0-\xi|}{2}$ si trae:

$$\frac{|x_0-\xi|}{2}\leq|x_0-\xi|-|h_i|\leq|x_0-\xi|-|h_i\theta|\leq|x_0+h_i\theta-\xi|.$$

SIMBOLI USATI NEL LAVORO

BIBLIOGRAFIA

[1] Fichera G., *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* « Ann. Sc. Norm. Sup. », Pisa 1950 s. III, v. IV, pubblicazione dell'I.N.A.C. n. 248, 1949.

[2] Fichera G., *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali*, « Atti del Convegno internazionale delle equazioni alle derivate parziali », Trieste 1954.

[3] Fichera G., *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari*, Nota I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei » 1956.

[4] Fichera G., *Sull'integrazione delle forme differenziali armoniche*, « Rendiconti Seminario matematico Univ. Padova » XXV, 1955.

[5] Fichera G., *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, « Corsi dell'I.N.A.C. », V. Veschi ed., Roma 1958.

[6] Fichera G., *On a United Theory of Boundary Value Problems for Elliptic Parabolic Equations of Second Order*, « The University of Wisconsin Press », Madison 1960.

[7] Fichera G., *Sul concetto di problema « ben pòsto » per una equazione differenziale* « Rend. di Matem. » v. 19, 1960.

[8] Friedrichs K. O., *The identity of weaak and strong extensions of differential equations*, « Trans. American Math. Society », v. 55, 1944.

[9] Gårding L., *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* « Math. Scandinavica », v. I, 1953.

[10] LAURICELLA G., *Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici per dati spostamenti in superficie*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » v. XXI, s. 55, 1912.
[11] LIONS J. L., *Problèmes aux limites en thèorie des distributions*, « Acta Math. », 1955.
[12] LIONS J. L., *Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique*, « Ann. of Math. », 1955.
[13] VOLTERRA V., *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, « Acta Math. », v. 35, 1912.
[14] VOLTERRA V., *Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations*, « Dover Publications », Inc. New York, 1959.

L'OPERA DI DANIELE ROSA E LA DOTTRINA DELL'EVOLUZIONE

(CON CENNI BIOGRAFICI E BIBLIOGRAFICI)

Memoria del Socio corrisp. GIUSEPPE COLOSI
presentata nell'adunanza del 3 Maggio 1961

Riassunto. — *Viene delineata la figura di Daniele Rosa e dato un cenno sulla sua vita, la sua carriera accademica e le sue opere. Queste riguardano la sistematica degli Oligocheti e dei Tomopteridi, la natura e il significato delle cellule cloragogene, dei linfociti e delle valvole dei vasi degli Oligocheti, la classificazione del Regno animale, i rapporti del blastoporo con l'apertura orale e quella anale, l'orientamento dell'embrione dei Cordati. Opera capitale di Rosa è l'Ologenesi, nuova teoria dell'evoluzione, che fu preceduta dalla formulazione della legge della riduzione progressiva della variabilità. Vengono brevemente esposti i capisaldi di tale teoria, ne viene indicato il posto nelle correnti del pensiero scientifico contemporaneo con cenni sulle principali conferme riscosse. In fine è fornito l'elenco completo delle pubblicazioni del grande zoologo italiano.*

Nessuna soddisfazione umana può certo uguagliare quella di colui che, giunto a tarda età, percorrendo con la mente gli anni trascorsi, sente, con serena valutazione di se medesimo, che non invano egli ha vissuto e che la propria opera è destinata a lasciare profonda e durevole traccia nella storia del pensiero. Tale sentimento — unico grande compenso che la sorte riserba a pochi eletti — non poteva non albergare nell'animo di Daniele Rosa, quando, ormai più che ottantenne e semicieco, trascorreva le lunghe ore a rievocare con mente sempre lucida gli anni trascorsi fra gli studi, a meditare sui problemi che gli avevano occupato la vita, a considerare l'edificio da Lui sapientemente costruito.

Nel suo ritiro solitario di Novi Ligure, con quella logica obbiettività che sempre era stata sua dote preclara e col non mai menomato interesse per la scienza, Egli, gettando uno sguardo sull'odierno orientamento del pensiero biologico, aveva netto il presentimento, che le sue

concezioni avrebbero in un non lontano avvenire, sia pur con lentezza e fatica, compenetrato profondamente il terreno scientifico, lasciandovi impronta durevole. Solo in ciò, del resto, Egli riteneva che consistesse la sopravvivenza dopo lo sfacelo della morte individuale.

Daniele Rosa nacque a Susa il 29 Ottobre del 1857 da Norberto e da Laura Valetti. Il padre, uomo di larga cultura letteraria e deputato al Parlamento subalpino, gli aveva imposto un nome che ricordasse quello del suo amico e compagno di fede Daniele Manin. Disgraziatamente egli morì ancor giovane: i figli rimasero affidati alle cure della madre, donna buona ed intelligente, ma di malferma salute.

Compiuti gli studi classici a Torino, nonostante fosse già stato deciso di farne un notaio ed Egli stesso avesse già incominciato gli studi di giurisprudenza, si iscrisse nella facoltà di Scienze di quella città, facendosi subito apprezzare da Michele Lessona che allora dirigeva il Museo Zoologico dell'Ateneo torinese. Si laureò nel 1880 con una tesi sui pesci d'acqua dolce del Piemonte. Il successivo semestre invernale fu da Lui trascorso a Gottinga, nell'Istituto zoologico diretto da Ehlers, insigne studioso di Policheti, che apprezzò molto il giovane Rosa e gli consigliò di porsi allo studio degli Oligocheti, la cui conoscenza era scarsa e lacunosa. Ciò infatti Egli fece non appena ritornato a Torino. Nominato assistente presso il Museo zoologico, vi rimase per molti anni; nel frattempo ottenne l'aggregazione alla facoltà di Scienze. (Il titolo di dottore aggregato era alquanto superiore a quello attuale di libero docente).

La vita scientifica del Museo zoologico di Torino era in quel periodo molto intensa. Michele Lessona, uomo di grande ingegno, appassionato naturalista e liberale stimolatore di giovani energie, si era circondato di un'eletta schiera di studiosi tra i quali ricordo Tomaso Salvadori, Lorenzo Camerano, Ermanno Giglio-Tos, Alfredo Borelli, Giuseppe Nobili, Achille Griffini, Giacinto Peracca, Mario Pollonera. Il Museo zoologico di Torino e la Stazione zoologica di Napoli rappresentavano allora in Italia i due grandi centri di studi zoologici; e ben si comprende come i vecchi locali di Palazzo Carignano costituissero un ambiente adatto allo svolgimento delle attività di chi a tali studi intendeva dedicarsi. In tale ambiente si plasmò la mente di Rosa.

La morte della madre, avvenuta mentre Egli frequentava l'Università, l'esaurimento delle non cospicue risorse familiari, un incurabile male della sorella, costrinsero ben presto il Rosa ad una vita modesta, e spesso di sacrificio, che Egli sopportò con signorile imperturbabilità, sopperendo ai bisogni della sorella e portando aiuto ad altri parenti. In una cameretta — gelida durante l'inverno — Egli occupava alcune ore della notte nella traduzione delle opere dello Haeckel; e così a cominciare dal 1891 comparvero successivamente in edizione italiana « La storia della creazione

naturale », « L'Antropogenia », « Le forme artistiche della natura » e « Le meraviglie della vita ».

Difficile fu anche per Rosa il raggiungimento della cattedra: antipatia tra scuole ed incomprensione nei suoi riguardi lo fecero più volte posporre a concorrenti di valore scientifico notevolmente inferiore al suo. I risultati dei suoi concorsi non furono mai brillanti; e — ciò che non ridonda certo ad onore delle commissioni giudicatrici, che pur erano composte di zoologi — il giudizio ufficiale dato sulla di Lui già imponente ed apprezzata produzione scientifica, non venne gran fatto modificato nemmeno dopo la comparsa di quel profondo e sagace saggio che è « La riduzione progressiva della variabilità nei suoi rapporti coll'estinzione e con l'origine delle specie ». « A consolazione dei concorrenti a cattedre universitarie — mi lasciò scritto — ricorderò che, avendo poco dopo la sua comparsa, presentato quel volumetto che mi aveva costato tanta fatica ad un concorso per non saprei che cattedra (mi pare Messina) esso (allora si davano i punti) non mi portò avanti che di 1/50 (dico un cinquantesimo) rispetto al concorso precedente ». In realtà la figura scientifica di Rosa procacciava un crescente fastidio a qualcuno che amava imperare incontrastato nella zoologia italiana.

Ad ogni modo, ottenuta l'eleggibilità, nel 1899 venne nominato professore titolare di Zoologia ed Anatomia Comparata presso l'Università di Sassari, dalla quale nel 1900 passò a quella di Modena. Nel 1905, chiamato dal R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento (oggi Università) di Firenze, vi occupò la cattedra di Zoologia ed Anatomia degli Invertebrati, rimanendovi 12 anni, consacrati in gran parte all'elaborazione della teoria dell'Ologenesi. Fece quindi ritorno all'Università di Modena; ma, cedendo all'invito rivoltogli dalla Facoltà di Scienze di Torino, nel 1919 ritornò in veste di direttore in quell'Istituto di Zoologia, dove aveva trascorso la sua vita d'assistente. Però dopo due anni si trasferì per la terza volta a Modena ed insegnò in questa Università finchè nel 1932, avendo raggiunto i limiti di età fissati dalla legge, non venne collocato a riposo. Aveva allora 75 anni.

Durante la sua lunga carriera il Rosa ebbe numerosi allievi, a nessuno dei quali impose il proprio indirizzo, lasciando loro piena libertà di dedicarsi a qualsiasi ricerca, purchè condotta con serietà scientifica. Suoi assistenti furono successivamente Cognetti de Martiis (oligochetologo), Issel (ecologo), Senna (carcinologo, entomologo e chirotterologo), Baldasseroni (oligochetologo), Granata (protistologo), Colosi (carcinologo, malacologo e biologo generale), Zavattari (entomologo, parassitologo e faunista), Sciacchitano (elmintologo).

La vita di Daniere Rosa fu quella dello studioso solitario. Ben poco si può narrare di essa, poichè non fu intercalata da nessuna vicenda che

fosse un po' diversa dalle consuete vicende quotidiane: salvo un viaggio giovanile in Corsica, gli svaghi della sua vita consistettero nella partecipazione a qualche congresso di Zoologia.

Di indole straordinariamente riservata, non parlava mai degli avvenimenti personali e nascondeva le amarezze e i dolori, che pure tormentavano spesso il suo animo, con una veste di taciturna apparente insensibilità. Si studiava di reprimere, forse per timore che potessero alterare l'obbiettività nella valutazione, perfino i sentimenti di simpatia verso l'uno o l'altro. Anche i suoi discepoli migliori sapevano di non poter chiedere nè ricevere da Rosa alcun particolare appoggio; e l'assoluta imparzialità di giudizio che Egli teneva a serbare si risolveva non di rado a svantaggio di coloro che Egli maggiormente stimava ed amava. Ma chi lo conosceva, sapeva vedere in tal comportamento una manifestazione della estrema probità del suo carattere.

La coscienza del proprio valore, la fermezza di volontà, il coraggio stoico di fronte a qualsivoglia evento erano in Lui uniti ad una sorta di timidezza invincibile che lo conduceva, geloso del proprio prestigio, ad evitare gli ostacoli della vita quotidiana. Intimamente Egli soffriva della sua inettitudine alle schermaglie e alle lotte, dell'incapacità a reagire adeguatamente ai torti che gli venivano o che avrebbero potuto essergli fatti e a cui non era disposto a sottostare. Ma, debole nel consorzio umano, aveva in sè la grande forza degli uomini solitari.

Amava intensamente la Patria nella forma più elevata e più ragionevole mista ad un indefinibile ideale di internazionalismo. Alieno dalla politica non aderì ad alcun partito. Non nutriva sentimenti religiosi, nemmeno sotto quella forma panteistica non infrequente tra i filosofi della natura. Sua costante norma fu l'austerità della vita.

Uomo di larga e varia cultura filosofica e letteraria, Rosa era anche fine intenditore di musica e buon disegnatore. Presto però un fastidioso tremito alle mani gli impedì di eseguire al piano pezzi musicali; mentre riuscì fino ad età matura a tracciare quei nitidi disegni che ornano le tavole dei suoi lavori scientifici.

Visse, come dicevo, in grande solitudine. Varie moleste fobie avevano potentemente contribuito al suo isolamento. Egli non si trovava a proprio agio che tra le pareti dell'Istituto, interrompendo ad ore quasi fisse il lavoro con qualche breve conversazione con gli assistenti.

Di gracile costituzione e di malferma salute rifiutava ostinatamente ogni cura: di solito, quando un'infermità lo affliggeva, si chiudeva ancor più in se stesso. Negli anni 1917 e 1918 le sue facoltà visive si erano talmente alterate e ridotte che si temeva dovesse perdere per sempre l'uso degli occhi. Contrariamente alle previsioni migliorò e potè ancora per una quindicina d'anni, salvo qualche intervallo, leggere e scrivere corrente-

mente; dopo, le condizioni della sua vista andarono progressivamente peggiorando e si ridusse semicieco. La vita estremamente metodica e morigerata che aveva sempre condotto, gli permise di giungere fino a tarda età, nonostante la grave forma di arteriosclerosi che lo afflisse negli ultimi anni.

Non andò mai alla ricerca di onori — e ben pochi invero gliene furono tributati —, sebbene non rimanesse insensibile ad essi quando li reputava frutto di spontanea e giusta deliberazione. Solo qualche Accademia lo accolse, tardivamente e quando era già all'apice della rinomanza, tra i suoi membri. Fu socio della Società degli Amici delle Scienze naturali di Mosca (1889), dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena (1903), dell'Accademia dei Georgofili di Firenze (1908), dell'Accademia delle Scienze di Torino (1918), dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna (1919), dell'Accademia di Agricoltura di Torino (1920), della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL (1922), dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (1923), dell'Accademia dei Fisiocritici di Siena (1928), dell'Accademia Gioemia di Catania. Le Università di Firenze e di Modena gli conferirono rispettivamente il titolo di Professore onorario e di Professore emerito.

In occasione del cinquantesimo anniversario della sua laurea, gli antichi allievi, volendo ricordare quella data, e trovandosi d'altra parte costretti ad eludere la sua tenace ritrosia, prepararono quasi clandestinamente un volume di scritti in suo onore (volume al quale collaborarono anche alcuni scienziati stranieri), e, dopo averci ben riflettuto, glielo spedirono per mezzo delle Poste: unica risoluzione possibile dinnanzi alla difficoltà di affrontare personalmente il Rosa in simile circostanza. Questo piccolo episodio chiarisce abbastanza bene l'indole dell'uomo. Rosa gradì molto l'omaggio ed apprezzò la maniera secondo cui si era svolta... — o meglio, non si era svolta — la cerimonia.

Gli ultimi anni della vita di Daniele Rosa furono tristi, anzi penosi. Poco prima del collocamento a riposo fu gravemente infermo e dovette essere ricoverato per qualche tempo all'Istituto Rizzoli di Bologna. Abbandonato l'insegnamento, sebbene Jucci, suo successore, lo sollecitasse a rimanere, ospite onorato, presso l'Istituto di Zoologia di Modena, Egli, date le condizioni di salute in cui versava, preferì trasferirsi a Pisa, città tranquilla e dal clima assai mite, nella cui Università insegnava Zoologia Granata, già suo assistente. Soggiornò a Pisa fino al 1936, frequentando per alcune ore al giorno l'Istituto di Zoologia e riuscendo ancora, benchè stentatamente, a leggere. Però le condizioni della sua salute erano spesso preoccupanti. Alla fine la dimora in albergo non gli fu più possibile e si decise di ritirarsi a Novi Ligure presso gli unici due parenti superstiti. Solo qualche visita di discepoli o di colleghi interrompeva la melanconica

monotonia dei suoi giorni. Egli gradiva molto quelle rare visite e si tratteneva lunghe ore a conversare con quella prontezza di memoria e limpidezza di pensiero che mai lo abbandonarono. Con qualche discepolo rimase in attiva corrispondenza epistolare fino a qualche mese prima della morte: scriveva quasi sempre di suo pugno sebbene ormai semicieco. Ma il numero di coloro con i quali manteneva rapporti si faceva sempre più esiguo; la maggior parte dei familiari, degli allievi e degli amici erano scomparsi prematuramente e spesso tragicamente.

Durante il 1943 soffrì molto, soprattutto nei mesi invernali, trascorsi a letto. Poi, nell'estate migliorò alquanto; ma il cuore era fiacco e si prevedeva non lontana la fine. Riuscì ancora a superare l'inverno successivo, ma nell'aprile cominciò a spegnersi lentamente. Il 26 aprile entrò in agonia e nel pomeriggio del 28 cessò di vivere. Invano, qualche giorno prima della morte chiese di rivedere qualcuno dei suoi discepoli. L'Italia si dibatteva nel più torturato periodo della guerra mondiale. Nessuno di coloro che più gli erano stati vicini durante la vita potè essergli presente negli ultimi istanti per raccogliere il suo saluto, nè accompagnarlo alla estrema dimora. La città di Novi Ligure gli tributò solenni onoranze.

La vita di Daniele Rosa consiste essenzialmente nella sua attività scientifica.

Dopo aver pubblicato alcune brevi note sui Gordiacei, Egli, appena ritornato da Gottinga, si dedicò allo studio degli Oligocheti e ben presto elaborò una importante monografia sui lombrichi del Piemonte. A questo seguirono molti altri lavori, tanto che ben presto acquistò fama di profondo conoscitore di questo gruppo e venne considerato con E. Perrier, F. E. Beddard e W. Michaelsen uno dei quattro maggiori oligochetologi. Molti anni dopo si rivolse anche ai Policheti e con una classica monografia sui Tomopteridi diede ordine a questo gruppo pelagico, mettendo in evidenza — come aveva già fatto per gli Oligocheti — i caratteri utili ed i criteri da usare per pervenire ad una classificazione naturale.

Non è il caso di soffermarsi a lungo su questa pur così importante serie di ricerche sistematiche che interessano soprattutto gli specialisti e che qui si risolverebbe in una troppo arida rassegna. Dirò solo che in esse si rivela la mente ordinata e coordinatrice dell'autore, l'estrema accuratezza che Egli poneva nell'analisi morfologica delle specie, l'acume con cui ne vagliava i caratteri e criticava i reperti propri ed altrui: per Rosa la sistematica non è soltanto la disciplina utile, che serve al riconoscimento delle forme viventi raggruppandole in maniera da renderle reperibili allo studioso, ma è soprattutto la scienza esatta, che esprime i reali rapporti di organizzazione tra i vari esseri viventi e ne stabilisce con la maggiore possibile precisione il grado di reciproca affinità. Concepita in tal guisa la sistematica costituisce la base necessaria ed indispensabile per

ogni ragionamento sulla genesi e le parentele degli organismi; e ben si comprende quanto siano giovate al Rosa le abitudini mentali contratte nel corso di tali studi.

Oltre alle ricerche anatomiche compiute a servizio della sistematica, il Rosa ne eseguì altre di indole morfologica ed istologica a fine di indagare la natura di certe strutture poco note, pervenendo a risultati che interessano tutto il gruppo degli Anellidi e talora investono un campo ancora più ampio. Modelli di compiutezza rimangono quelle sui linfociti, sul cloragogo e sulle valvole dei vasi sanguigni dei lombrichi.

Nel liquido contenuto entro la cavità del corpo di questi animali il Rosa, oltre ai linfociti tipici o linfociti ameboidi presenti in tutte le specie, trovò e studiò altre tre sorta di cellule libere: i linfociti mucosi, propri dell'*Allolobophora rosea*, che uscendo insieme col liquido celomico dai pori dorsali dell'animale, conferiscono ad esso liquido un colore bianchiccio; i linfociti oleosi, ai quali si deve il colore giallo del liquido celomico di varie specie, ben visibile anche dall'esterno quando questo fuoresce dai pori dorsali; ed i linfociti vacuolari, frequenti soprattutto nelle specie ove scarseggiano i linfociti oleosi.

D'altra parte era nota una striscia di cellule di colore giallo ocraceo che percorre l'intestino dei lombrichi, appoggiata alla parete dorsale di questo intorno a vasi sanguigni. S'era fatta largo l'opinione che si trattasse di una ghiandola digestiva, una sorta di fegato. Circa l'origine di tali cellule, dette cloragogene, ne era stata sostenuta la comunanza con quella dei linfociti. In realtà sulla struttura in questione si possedevano soltanto idee molto confuse e nettamente erronee. Rosa dimostrò che nessun elemento positivo autorizzava àd ammettere che le cellule cloragogene derivino dai linfociti o questi da quelle, ed in seguito a diligente esame — scartato che possa trattarsi di ghiandole intestinali — concluse che l'insieme delle cellule cloragogene costituiscono principalmente un organo di escrezione con natura di rene di accumulo ed accessoriamente un organo di riserva di materiali nutritivi: questi ultimi rappresentati da globuli di grasso, i primi da globuli semiliquidi (cloragosomi) elaborati nell'interno delle cellule a spese di prodotti del catabolismo proteico contenuti e forniti dal sangue della rete intestinale e destinati ad accumularsi nelle cellule cloragogene per tutta la vita dell'animale, non potendo essere eliminati all'esterno, ma nello stesso tempo rimanendo sottratti al circolo ed immobilizzati. Veniva così portato uno dei primi e più esaurienti contributi alla conoscenza dei reni di accumulo, l'importanza dei quali nella funzione escretoria fu in seguito meglio conosciuta anche negli altri tipi del regno animale.

Spetta anche al Rosa il merito di aver posto in evidenza la singolare natura delle valvole dei vasi sanguigni dei lombrichi e di altri Oligocheti.

Queste infatti non consistono come di regola, in pieghe della parete dei vasi, bensì si formano a partire da amebocidi del sangue che, da prima vaganti, si fissano in determinati punti delle pareti vasali, cambiano aspetto aggregandosi e danno luogo a strutture stabili di aspetto definito.

I ricercatori successivi confermarono fino ai più minuti particolari quanto Rosa aveva scoperto. Basta scorrere la recente grande monografia sugli Oligocheti dello Stephenson per rendersene conto.

Un breve cenno, prima di passare all'opera fondamentale di Rosa, meritano tre lavori di carattere generale, ai cui risultati corrispondono nuove concezioni.

Anche Rosa, come altri zoologi, si pose il problema dello smembramento in gruppi naturali dell'antico ed artificialissimo tipo dei cosidetti « Vermi ». Tale smembramento era reputato da tutti indispensabile per giungere ad una classificazione naturale del regno animale, ma i vari tentativi erano sempre pervenuti a risultati insoddisfacenti. Rosa, in seguito ad acuta discussione dei caratteri e dei piani di struttura, cominciò col distaccare i Nematelminti da tutti gli altri vermi, sostenendone l'affinità con gli Artropodi: solo questi due tipi di Metazoi infatti, sono assolutamente sforniti di ciglia vibratili. Posti poi gli Anellidi accanto ai Molluschi, incluse in un tipo dei Molluscoidi i Sipunculoidi, i Foronidei, i Briozoi (Ectoprocti) ed i Brachiopodi, ed in un tipo dei Pronefridiati, i Platelminti, gli Endoprocti, i Nemertini, i Gastrotrichi, i Kinorinchi ed i Rotiferi: venivano così decisamente allontanati l'uno dall'altro i due tipi degli Anellidi e degli Artropodi, che, non si comprende bene perchè, ancora parecchi trattatisti considerano affini. Gli Enteropneusti (compresi i Pterobranchi) venivano dal Rosa collocati accanto agli Echinodermi. È strano come la classificazione del Rosa, che pure offre indiscutibili vantaggi rispetto alle altre finora proposte, non abbia richiamato sufficientemente l'attenzione e riscosso il consenso che merita.

Un importante problema che interessa ad un tempo la morfologia filogenetica, l'embriologia e la sistematica è quello relativo al destino del blastoporo.

È regola generale che tutti gli animali pluricellulari (Metazoi) attraversino uno stadio embrionale di gastrula durante il quale sono costituiti da un ectoderma e da entoderma, che limita un intestino primitivo comunicante con l'esterno mediante una bocca primitiva o blastoporo. Questo blastoporo, salvo negli Onicofori, nei Nematodi, e negli Artropodi, ove è ventrale, si trova inizialmente situato al polo posteriore dell'embrione. La bocca definitiva dell'adulto nei più bassi Metazoi (Celenterati, Ctenofori) è posteriore, ma negli altri è situata anteriormente. D'altra parte l'intestino dell'adulto che nei Celenterati, nei Ctenofori e nei Platelminti (di poco superiori ai Ctenofori) comunica con l'esterno mediante la sola

bocca, nei Metazoi più complessi possiede una seconda apertura, l'ano, tipicamente posteriore, che viene ad aprirsi là dove nella gastrula si apriva il blastoporo. Ora, seguendo lo sviluppo embrionale (o larvale) si constata che, nei Metazoi con blastoporo posteriore e bocca definitiva anteriore, questa nei tipi meno elevati deriva direttamente dal blastoporo che gradatamente si sposta all'innanzi lungo la linea ventrale, mentre in quelli più elevati si forma *ex novo*, indipendentemente dal blastoporo: nei primi, se esiste l'apertura anale, questa si forma senz'altro là dove prima si trovava il blastoporo; nei secondi il blastoporo si chiude ed al suo posto subito dopo si apre l'ano, oppure rimane aperto trasformandosi direttamente in ano. Il fatto, in verità paradossale, di una medesima struttura, il blastoporo, che in alcuni animali si trasforma nella bocca definitiva e in altri nell'ano, meritava di essere sottoposto ad attento esame. Ciò fece Rosa, e concluse ricostruendo la storia dei fenomeni nel seguente modo:

Gli antenati comuni di tutti i Metazoi erano tutti natanti e sprovvisti di ano al pari degli attuali Celenterati liberi e dei Ctenofori e, come questi, tenevano la bocca rivolta in basso ed il polo opposto diretto verso l'alto. Successivamente il passaggio alla vita strisciante si accompagnò ad un orientamento col polo apicale all'innanzi ed il polo blastoporale all'indietro. Intanto si verificava una migrazione del blastoporo verso il polo anteriore, scorrendo lungo la faccia ventrale, e la sua trasformazione in bocca definitiva: nelle Planarie, ove la bocca occupa a un dipresso una posizione centrale sulla faccia ventrale, rimangono fissati alcuni stadi di tale spostamento. Dapprima la migrazione del blastoporo avvenuta nella serie dei tempi durante l'evoluzione del mondo animale, si ripetè ad ogni sviluppo individuale, come del resto avviene ancor oggi nella massima parte degli Anellidi e dei Molluschi, i quali perciò, avendo il blastoporo che si trasforma in bocca, son detti protostomi. Frattanto è supponibile — ciò che del resto avviene anche attualmente in vari Anellidi e Molluschi — che il blastoporo, giunto durante lo sviluppo individuale al limite anteriore della sua migrazione, non si trasformasse più nella bocca definitiva, ma si chiudesse, mentre mercè un affondamento dell'epitelio esterno si produceva una bocca definitiva nel punto stesso ove si era chiuso il blastoporo. Ma, dal momento che la posizione anteriore della bocca divenne un carattere fissato caratteristico della specie a quel dato stadio della sua storia, non ci fu più bisogno che la presenza di essa in quel determinato punto fosse durante la vita embrionale necessariamente preceduta in quel punto dal blastoporo: essa era determinata dalle correlazioni col resto dell'organismo. Non vi era più ragione perchè il blastoporo migrasse dalla sua prima sede di formazione: esso poteva rimanere nella sua posizione posteriore. Ma al polo posteriore, quando durante lo

sviluppo individuale il blastoporo migra in avanti, compare un affondamento dell'epitelio esterno che dà origine all'apertura anale. Ora negli animali di più elevata organizzazione, in cui il blastoporo non compie più durante la vita embrionale la sua migrazione all'innanzi, venne ad esservi coincidenza di luogo tra il blastoporo rimasto nella sua sede posteriore e l'ano che vi si doveva aprire; donde quella apparente trasformazione, diretta o dopo temporanea chiusura, del blastoporo in ano, nonostante la fondamentale indipendenza originaria delle due strutture, che si riscontra nei Chetognati, negli Echinodermi, negli Enteropneusti, nei Cordati (e in qualche Mollusco).

Nei Cordati il fenomeno dà luogo ad una complicazione. Quivi lungo il dorso dell'embrione si forma una placca neurale, che presto, saldando i suoi margini laterali, viene a formare il tubo neurale, destinato a dar luogo al midollo spinale e al cervello. Orbene, la placca neurale nei primitivi Cordati poteva estendersi all'indietro senza incontrare il blastoporo (perchè questo migrava in avanti); ma lo incontrò poi, quando nel corso dell'evoluzione il blastoporo non migrò più. Allora questo si trovò a sboccare nell'area della placca neurale. In conseguenza di ciò nello sviluppo individuale degli attuali Cordati il lume del tubo neurale a livello del blastoporo viene ad essere in continuazione della cavità dell'intestino primitivo: continuità transitoria, poichè presto il tubo midollare si rende indipendente chiudendosi sia anteriormente che posteriormente, e si forma una apertura anale comunicante con l'esterno. Ecco il significato di quell'enigmatico canale neurenterico tipico dei Cordati, che consiste appunto nel breve tratto tubolare — altrimenti inesplicabile — che congiunge l'intestino primitivo col tubo neurale.

Infine non si può a meno di ricordare un lavoro critico sull'orientamento dei primi stadi embrionali dei Cordati, lavoro in cui Rosa dimostrò come — contrariamente a quanto di solito fanno gli autori — si possa benissimo orientare l'asse principale dell'ovo dell'Anfiosso, dei Tunicati e dei Vertebrati allo stesso modo di quello degli Echinodermi e degli Enteropneusti e tuttavia giungere ad embrioni o a larve con asse principale orizzontale e ventre in basso, mentre negli Echinodermi e negli Enteropneusti (come del resto negli Anellidi e nei Molluschi) l'asse principale della larva rimane verticale e coincide con quello dell'ovo.

Veniamo ora a quella che è l'opera capitale di Daniele Rosa: la teoria dell'« Ologenesi », grandioso edificio destinato a rendere imperituro il suo nome.

« Spesso è accaduto — Egli, già ottantaduenne, mi confidava per iscritto — che qualche opera composta in età matura ripetesse la sua prima origine da qualche impressione giovanile od anche infantile. Così credo che sia accaduto a me.

« La piccola biblioteca di mio padre, morto quando io non avevo che cinque anni, era costituita quasi esclusivamente da libri letterari italiani e francesi. Unica eccezione un volume paleontologico, opera di Zimmermann, intitolato, se ben ricordo, ' Il mondo prima della creazione dell'uomo, ossia la culla dell'universo '. Era lì per una pura combinazione, cioè perchè era stata edita dalla ' Gazzetta del Popolo ', della quale mio padre era collaboratore.

« Gradatamente mi ero messo a frugare in quella biblioteca, e quel libro mi aveva molto colpito perchè c'erano molte figure di scheletri di bestioni antidiluviani in bianco su fondo nero.

« Quell'impressione infantile riemerse nella mia mente quando in liceo ebbi come libri di testo i manuali non ricordo bene se del Sismonda o del Bellardi (erano entrambi paleontologi) nei quali era pure dato un buon posto alla parte paleontologica; e mi par bene che fin d'allora mi si fosse affacciata la domanda perchè mai quei bestioni erano scomparsi. E la domanda mi venne più insistente quando lessi il libro di Figuier intitolato, mi pare, ' La terre avant le deluge ' e quando vidi nel Museo geologico di Torino i magnifici scheletri del *Glyptodon* e del *Megatherium*. All'Università seguii poi anche il corso libero di Paleontologia del Portis, ma questi borbottava le sue lezioni con un tono così monotono e riduceva il suo corso ad una così arida serie di diagnosi da fare scappare a chiunque la voglia di studiare Paleontologia.

« Ma all'Università avevo trovato Michele Lessona.

« Michele Lessona era un parlatore estremamente simpatico. Egli insegnava Zoologia e, per incarico, Anatomia comparata. I suoi cavalli di battaglia erano nella prima la teoria dell'evoluzione e nella seconda la teoria vertebrale del cranio. La teoria dell'evoluzione, naturalmente, sotto le specie del lamarckismo e del darwinismo. Essa mi produsse una profonda impressione, la quale mi fu ancora rafforzata dalla lettura che feci subito dopo, del libro di Canestrini ' La teoria dell'evoluzione '.

« Devo però confessare che nello stesso tempo mi riuscì doloroso il trovar spiegato in modo naturale quei meravigliosi adattamenti che mi erano stati presentati come opera diretta di una Provvidenza da tanti libri da me letti in precedenza, a cominciare da quelli di Bernardin de Saint Pierre, lettura prediletta di mia madre.

« Entrai al Museo Zoologico di Torino dove già era assistente Camerano, ardente evoluzionista; ed era proprio quello l'ambiente adatto a far germogliare i miei futuri lavori teorici.

« Si era allora nel periodo che fu anche chiamato eroico, di Haeckel e di Gegenbaur. Darwin ci aveva dato, o sembrava averci dato, la spiegazione del grande enigma; ma la sua spiegazione era di natura tale da precludere a chi l'accettava ogni prospettiva di poter indagare più oltre

il meccanismo dell'evoluzione. Darwin non aveva forse egli stesso dichiarato che il cercare le cause delle variazioni sulle quali egli si basava era come il voler cercare le cause della forma dei singoli sassi di una frana? Ma, in compenso, col far definitivamente trionfare la teoria dell'evoluzione Egli aveva dato alla biologia un compito nuovo ed affascinante, quello di scrivere, per quanto la riguardava, la storia della creazione naturale, di rintracciare le vie per le quali si era giunti da una macchia oculare all'occhio dell'aquila, da una protameba all'uomo. Questo compito diede alla morfologia sistematica un nuovo impulso ed a questa rinnovata morfologia mi dedicai io pure, incominciando con lo studio degli Oligocheti, al quale ero stato avviato nell'Istituto zoologico-zootomico di Gottinga dal Prof. Ernst Ehlers. Naturalmente io seguivo con vivo interesse quanto si faceva nel campo dell'evoluzionismo: ricordo, per esempio, la gioia che mi fu data dall'inattesa scoperta fatta da Kowalevsky della stretta parentela del Branchiostoma (*Amphioxus*) colle Ascidie.

« Ma non mi era uscita dalla mente quella certa questione della scomparsa di tante forme superiori ed anzi mi ero convinto che la spiegazione che di tale estinzione era stata data da Darwin era del tutto insufficiente.

« Ora avvenne che, leggendo nella speranza di trovarvi qualche luce, l'opera del Gandry, ' Les enchainements du monde animal ' vol. I, io vi trovassi una frase la quale mi colpì. Non la ricordo più bene; ma diceva riferendosi ai fossili primarii, presso a poco così: quelli del tal terreno o del tal altro erano arrivati al più alto grado a cui la loro organizzazione doveva giungere e, siccome è necessario modificarsi o sparire, essi sono scomparsi.

« Era una frase un po' vaga, eppure essa produsse in me lo stesso effetto (*si licet*) che produsse su Darwin la lettura del libro di Malthus. Poco tempo dopo (1885), concorrendo per ottenere il titolo di dottore aggregato alla Facoltà di Scienze, fra le quindici tesi che io dovevo essere preparato a sostenere mettevo la seguente alquanto paradossale: ' Le forme fossili che sono scomparse senza modificarsi sono generalmente le più perfette ', la quale, in fondo, era farina del sacco di Gandry. Ricordo che a suffragio di quella tesi citai il collasso della civiltà romana davanti alla barbarie.

« Da quell'epoca impresi a studiare più a fondo il problema, dapprima col più modesto scopo di ricavarne un lavoro che chiarisse meglio la questione dell'estinzione delle specie; ma poi l'argomento mi crebbe tra le mani, tanto che esso mi occupò, mentre attendevo a molteplici altri lavori, per quattordici anni, finchè sfociò, quando già ero professore all'Università di Sassari, in un lavoro di più ampio respiro, cioè in quel mio volumetto sopra ' la riduzione progressiva della variabilità ', il quale fu, per così dire, l'anticamera della mia Ologenesi. In esso ero giunto per via empirica

alla constatazione dei fatti generali ed anche delle leggi che si mostrarono poi derivare logicamente dalle proposizioni fondamentali teoriche dell'ologenesi, fatti e leggi il cui accordo con quelle proposizioni costituiva la dimostrazione che queste erano conformi alla verità ».

Conviene perciò discorrere un po' del contenuto di tal « volumetto ». « In questi quarant'anni che sono trascorsi dal giorno in cui Darwin pubblicò la sua opera capitale — dice Egli nella prefazione — il problema dell'origine ha fatto versare molto inchiostro. E io credo che le seppie ed i calamai ci invidierebbero il risultato ottenuto che è stato indubbiamente quello di fare il buio fino a considerevole distanza.

« In questo buio sentiamo che sta come masso irremovibile la teoria generale dell'evoluzione organica; ma quante teorie sulle modalità e sulle cause stesse di quest'evoluzione non ci apparvero splendenti di tutta l'evidenza del vero ed ora son forme incerte diliguantesi nella tenebra !

« Vero apostolo della prima fede trapassante incorrotto fra i dubbi dei tempi nuovi ci appare Ernesto Haeckel. Rileggendo quella geniale opera che è la sua ' Storia della Creazione ', noi invidiamo quell'Eden in cui vivevano i primi darwinisti, dal quale siamo ormai così lontani.

« Di che non si dubita ora ?

« Il paragone fra la scelta artificiale e la scelta naturale si trova sempre più inesatto e l'importanza di quest'ultima per spiegare l'origine delle specie vien sempre più acerbamente negata, e il Driesch è stato così irriverente da citare il darwinismo come un esempio del come si possa ' menar pel naso ' un'intera generazione. Della scelta sessuale non parliamo, chè ha mostrato sin dal principio tutta la sua debolezza. Cresce di giorno in giorno il numero di quelli che negano l'eredità dei caratteri acquisiti. Dell'albero genealogico che prometteva di crescere così rigoglioso, non ci è rimasto che un incomposto fascio di rami. La legge biogenetica perde sempre più ogni pratica utilità per l'inaspettato soverchiare della cenogenesi sulla palingenesi, e di un rapporto causale fra filogenesi ed ontogenesi la moderna meccanica evolutiva non vuol più sapere. Che più ? l'importanza stessa dell'embriologia per stabilire le omologie degli organi cade al disotto di quella dell'anatomia comparata; oramai un identico organo può nascere filogeneticamente dall'entoderma ed ontogeneticamente dall'ectoderma, dimodochè nemmeno i due foglietti primarii sfuggono del tutto alle argomentazioni che condussero il Kleinenberg alla famosa dichiarazione: es giebt gar kein mittleres Keimblatt.

« Eppure tutto ciò è bene; oh come questi dubbi che ora travagliano, dividono gli evoluzionisti sono migliori di quella sicurezza incosciente colla quale credevamo un giorno che, invocando la scelta naturale, l'eredità, l'adattamento, si avessero a risolvere tutti i problemi ! Tuttociò era troppo chiaro e soprattutto in materie biologiche bisogna diffidare della

chiarezza; troppo spesso i problemi sembrano chiari perchè non si sono studiati abbastanza, e non se ne sono viste le difficoltà.

« Tale è il caso pel problema dell'estinzione della specie che forma il punto di partenza di questo lavoro; a molti esso pare semplice, e non è. Me ne sono occupato per molto tempo, ed ho visto che offriva uno studio rimunerativo, tanto che dall'esame delle leggi che governano l'estinzione delle specie si è condotti a comprendere più cose relative alla loro origine, a potersi aggirare meno smarriti fra i problemi cui dianzi abbiamo accennato ».

Ciò premesso, il Rosa comincia con l'affrontare il problema dell'estinzione delle specie. Come mai nella storia della vita è accaduto che tanti gruppi di organismi si siano completamente estinti senza nemmeno lasciare discendenti trasformati?

Allorchè si tratta di gruppi sufficientemente ampi e con larga area di distribuzione, una simile totale estinzione non può essere certo imputata ad una troppo rapida trasformazione dell'ambiente inorganico od organico. Per di più, per la maggior parte dei più importanti gruppi scomparsi, il tempo intercorso dall'epoca in cui manifestarono la loro più lussureggiante prosperità al momento dell'estinzione si misura ad interi periodi geologici; se poi prendiamo in considerazione anche i gruppi di cui sopravvive anche oggi qualche isolato epigone, s'accresce di molto il numero degli esempi che dimostrano la lentezza con cui procede il loro decadimento.

Bisogna appunto spiegare perchè i vari rappresentanti del mondo vivente non abbiano potuto continuare la loro evoluzione gli uni accanto agli altri, senza sostituzione totale di gruppi sistematici di nuova fioritura, a gruppi che precedentemente si sono potentemente affermati. In verità, non basta invocare, per spiegare l'estinzione totale di interi gruppi sistematici, le fortuite circostanze sfavorevoli: bisogna soprattutto ammettere che essi fossero incapaci di variare adeguatamente (come variazioni bisogna qui intendere le trasformazioni caratteristiche dell'evoluzione, e non quelle con carattere fluttuante che intercedono tra gli individui di una medesima specie ma che non hanno valore filogenetico).

Orbene: le forme molto specializzate o unilateralmente differenziate sono quelle ove è più evidente l'insufficienza delle variazioni evolutive; e precisamente alla loro scarsa adattabilità, al loro scarso potere di dar luogo a discendenti dotati di strutture funzionanti notevolmente diverse e più idonee all'ambiente, è, secondo il Rosa, dovuta la causa fondamentale delle estinzioni. Ma queste forme estreme non rappresentano che i casi più appariscenti di un fenomeno generale, poichè in tutte le forme organiche, di pari passo che procede la loro evoluzione verso stadi di maggiore complicazione strutturale, si manifesta una sempre più accentuata

riduzione progressiva di ulteriori variazioni. Più una forma si è complicata e differenziata nel corso dell'evoluzione, meno è capace di ulteriori complicazioni e differenziazioni e quelle che avvengono in seguito son sempre meno profonde, finchè si riducono a modificazioni d'importanza addirittura trascurabile.

La causa principale che determina l'estinzione delle specie e soprattutto quella dei grandi gruppi sistematici deve ricercarsi, secondo il Rosa, proprio nel fenomeno generale della riduzione progressiva della variabilità. A questa è da attribuire il fatto constatato che nello svolgimento storico del mondo vivente si assiste ad un continuo processo di sostituzione, per cui i diversi gruppi dopo un periodo di massima produzione di forme e per così dire di dominio, finiscono per essere gradatamente vinti nella concorrenza vitale da forme di altri gruppi, che fino allora si erano mantenuti di organizzazione meno progredita e meno differenziata, e che intanto evolvevano manifestando in seguito variazioni più profonde e perciò potendo meglio riuscire adatte alle differenze ed ai cambiamenti ambientali di quanto non lo potessero forme ormai più o meno irrigidite nella loro organizzazione.

Una volta stabilita, come generalizzazione empirica, la riduzione progressiva della variazione filogenetica, il Rosa si propose di ricercare le cause.

Può sostenersi che essa sia esclusivamente dovuta alla selezione naturale, la quale, favorendo determinate variazioni adatte all'ambiente tra le numerosissime e dirette comunque che, secondo i darwinisti, compaiono in seno ad un gruppo sistematico, farebbe sì che da una intrinseca capacità multilaterale di variazione, sortisse effetto e si realizzasse una variazione unidirezionale? Non sembra al Rosa che tale possa essere la soluzione del problema, e dimostra che, se la selezione naturale conduce praticamente ad una riduzione progressiva della variazione, essa non fa altro che favorire lo svolgimento di un fenomeno che si verificherebbe anche senza il suo intervento, di un fenomeno che ha per causa la natura degli organismi stessi e la condizione da essi già conseguita nel corso dell'evoluzione, durante la quale si verifica una riduzione progressiva della loro variabilità. Da questo ridursi della intrinseca capacità di ulteriori variazioni dipende l'effettiva riduzione delle variazioni stesse.

Un primo caso che indica una legge della riduzione progressiva della variabilità il Rosa trova negli organi che nel corso dell'evoluzione subiscono una degradazione fino a divenire rudimentali o scomparire. Ebbene non si conosce un solo esempio in cui tali strutture abbiano successivamente ripreso a svilupparsi nel medesimo o secondo altro indirizzo: alle forme in cui una struttura ha subito una degradazione, rimane preclusa automaticamente ogni possibilità di dare, mediante variazioni progressive di quell'organo, origine ad altre forme.

Un secondo caso che parla ancor più esplicitamente in favore di tale legge consiste nella fissazione numerica di organi che nell'organismo sono da considerarsi come ripetuti. Si constata che, mentre nelle forme inferiori di un gruppo il numero degli organi che si ripetono può variare considerevolmente dall'una all'altra specie, in quelle che raggiungono un più alto livello si fissa; e a partire da questo momento rimane costante come numero massimo (cioè può diminuire nei discendenti, ma non aumentare, salvo illusoriamente per frammentazione). Il numero delle vertebre cervicali dei Mammiferi è di sette, abbiano essi un collo lunghissimo come la giraffa o cortissimo come la balena, mentre nelle altre classi di Vertebrati esso può essere superiore; i Vertebrati dai Pesci ai Mammiferi posseggono non più di due paia di membri pari, le zampe degli Anfibi, dei Rettili, degli Uccelli e dei Mammiferi posseggono non più di cinque dita. Analogamente i Crostacei superiori (Eumalacostrachi) presentano il corpo formato da venti (o ventuno) segmenti, di cui cinque (o sei) per il capo, otto per il torace e sette per l'addome, mentre nei Crostacei inferiori (Fillopodi) il numero dei segmenti non è fisso e può essere molto maggiore. Ebbene: il numero di venti (o ventuno) non assicura certo particolari vantaggi nella lotta per l'esistenza, tanto che molto spesso vari di questi segmenti sono del tutto rudimentali, e d'altra parte in tante forme allungatissime non compare alcun nuovo segmento oltre i tipici. « Il fatto che tutti questi numeri non sono fissi in modo assoluto, ma fissi solo come *maximum*, è difficilmente spiegabile coll'utilità e colla scelta naturale. In secondo luogo non si vede come possa dipendere dall'utilità questo numero fisso, visto che esso si ritrova in animali che vivono in condizioni di vita così diverse ».

I due casi segnalati non rappresentano, secondo il Rosa, che gli esempi più evidenti di un fenomeno generale. Del resto, da tutta la sistematica si deduce che a mano a mano che l'evoluzione progredisce, le diverse modalità di struttura si stabilizzano le une dopo le altre, rimanendo poi costanti (salvo degradazione possibile delle parti) in tutti i discendenti delle forme in cui è avvenuta la fissazione. Secondo che nelle forme che han dato origine ad un intero tipo, o ad una classe, un ordine, ecc. si sia fissata l'una o l'altra modalità, questa modalità rimane caratteristica per tutto il tipo, per la classe, per l'ordine e così via.

Le ragioni della riduzione progressiva delle variazioni che si attuano nel corso dell'evoluzione riposano quindi su una riduzione progressiva della variabilità.

L'evoluzione procede per ortogenesi, cioè secondo determinati indirizzi, con produzione di nuove variazioni comprese in ambito sempre più ristretto rispetto a quelle che si sono precedentemente verificate cosicchè tutte le forme tendono verso uno stadio di fissità finale. La legge dell'adat-

tamento illimitato di Haeckel non può perciò esser considerata come valida. Del resto la legge della riduzione progressiva delle variabilità non può conciliarsi nè col darwinismo nè col lamarckismo, i quali, ponendo l'origine delle nuove specie e quindi l'evoluzione in balia delle cause esterne e degli avvenimenti fortuiti, ammettendo che da una specie possono derivarne altre per variazioni in qualsiasi senso, sono dottrine che postulano un'evoluzione in cui i nuovi caratteri si conseguono per eventuale accumulo, senza alcuna predeterminazione e senza nessun ordinato e necessario svolgimento del processo evolutivo, senza una direzione di esso.

Vi sono invece alcuni principi espressi anteriormente alla enunziazione della legge di Rosa ed ottenuti per via empirica che concordano con questa e che oggi riscuotono il generale consenso. Uno di essi è il principio dell'ortogenesi di Haacke, secondo cui l'evoluzione segue direzioni definite. Un altro è quello dell'irreversibilità di Dollo, secondo il quale il cammino che una specie ha seguito nella sua evoluzione non può essere ripercorso a ritroso. Il terzo è quello della specializzazione dal non specializzato (*law of the unspecialized*) di Cope, secondo cui un gruppo di forme è tanto meno capace di nuovi adattamenti per quanto più particolari sono quelli a cui è già pervenuto.

La legge della riduzione progressiva della variabilità secondo cui la capacità di differenziazione nel corso della filogenesi si riduce tanto più per quanto maggiormente si è proceduto nel differenziamento ha un valore più generale, perchè comprende e coordina i tre precedenti principi, mentre, eliminando gli elementi fallaci già contenuti nella dimostrazione di essi, o aggiungendo nuovi elementi dimostrativi, o rispondendo a gravi obbiezioni, viene a costituire una definitiva acquisizione in materia di evoluzione. Karny ed Abel, tra gli altri, l'hanno considerata come una delle poche leggi sicure, della quale ci si deve servire come guida nelle ricerche filogenetiche.

La formulazione della legge della riduzione progressiva della variabilità rappresenta il primo grande passo verso la concezione dell'Ologenesi: ricavata dai fatti per via induttiva, essa poi doveva scaturire dai postulati fondamentali della teoria ologenetica e prender posto tra i corollari di questa.

La teoria dell'Ologenesi, brevemente ma chiaramente enunziata dal Rosa fin dal 1909 e definitivamente redatta come opera compiuta nel 1918, venne concepita e maturata in un periodo singolarmente difficile: periodo definito, più male che bene, come quello della crisi dell'evoluzionismo.

In verità la crisi dell'evoluzionismo era già da qualche tempo superata, poichè la quasi totalità dei naturalisti ammetteva e riteneva sufficientemente dimostrata la tesi (che costituisce il vero nucleo della dottrina

evoluzionistica) secondo la quale la vita si originò sulla terra con organismi semplicissimi, dai quali successivamente derivarono organismi sempre più complessi e più variamente differenziati. Era pure definitivamente acquisito un secondo principio: quello dell'esistenza di intimi rapporti di parentela tra specie diverse, quello dell'esistenza, cioè, di antenati comuni a forme differenziatesi successivamente in senso divergente.

Venne chiamata crisi dell'evoluzionismo quella determinata dai contrasti circa l'estensione ed i rapporti della parentela tra le specie viventi, circa l'estensione spaziale di una nuova specie al suo momento d'origine e circa il meccanismo secondo cui da una specie-madre si producevano specie-figlie. Sarebbe stato più esatto parlare di crisi di singole teorie esplicative, confuse, spesso anche dai non profani, con la dottrina evoluzionistica. Nel periodo in cui Rosa elaborò i suoi studi sulla riduzione progressiva della variabilità e in quello susseguente in cui maturò l'Ologenesi, le teorie monofiletiche prevalevano sulle polifiletiche, le monogenetiche sulle poligenetiche, le anfigenetiche sulle nomogenetiche.

I teorici dell'evoluzione furono in generale indirizzati verso il monofiletismo, ritennero, cioè, che la genealogia dei viventi fosse rappresentata da un solo grande albero riccamente ramificato, di cui il ceppo basale rappresenti l'antenato primitivo comune a tutte le specie animali e vegetali, i grossi rami principali gli antenati comuni alle forme contenute nei grandi gruppi sistematici e così via via fino ai ramuscoli terminali corrispondenti alle specie attuali ed a quelle estintesi senza discendenza. Però non mancarono mai e non mancano tuttora i sostenitori di un più o meno esteso polifiletismo, secondo i quali le specie iniziali sarebbero state parecchie, contemporanee o successive, e da ciascuna di esse sarebbero derivate solo quelle appartenenti ad un determinato gruppo sistematico; convenzionalmente l'evoluzione del mondo vivente verrebbe allora rappresentata da tanti alberi indipendenti per quante sono le specie primigenie e quindi tanto più numerosi e meno ramificati per quanto più ristretto si ritiene essere il numero delle diverse forme derivate per filiazione dallo stesso ceppo.

Altro argomento di dissenso è stato quello se una nuova specie si originasse in un solo punto della terra e da uno o pochi individui o in varii punti e contemporaneamente con molti individui. La maggior parte dei teorici erano fondamentalmente darwinisti e quindi sostenevano la monogenesi, pur non escludendo eventuali fenomeni di poligenesi. Essi, cioè, ammettevano un centro di origine per ciascuna specie che via via si formava ed un successivo dilagamento degli individui che ne discendevano. D'altra parte, dato che essi ritenevano che ogni nuova specie insorgesse per azione di fattori esterni diversi dai consueti su individui di una specie preesistente e che agli individui di una specie davano la facoltà di variare

una quantità indeterminata di volte e secondo i più disparati sensi, è chiaro che con simili presupposti si doveva per forza concludere che normalmente ogni specie di animale o di pianta non fosse nata che una sola volta nel corso dei tempi ed in un solo punto del globo. Il poligenismo, come veniva e viene comunemente inteso, nel senso, cioè, di produzione indipendente di una stessa specie in due o più luoghi lontani per fortuito analogo concorso di condizioni e di cause efficienti, non potrebbe mai costituire una regola. Eppure un gran numero di fatti relativi alla distribuzione geografica degli animali e delle piante militano per un esteso poligenismo e la frequenza ed imponenza di tali fenomeni, che pur non si riusciva a inquadrare nelle rappresentazioni che le diverse teorie davano dell'evoluzione, costringevano non pochi scienziati a dichiararsi poligenisti. Nessuno però si era mai pronunziato per una poligenesi necessaria e globale: l'affermarla avrebbe richiesto una radicale revisione dei concetti circa i processi evolutivi.

Secondo i lamarckisti ed i darwinisti una nuova specie si produce per azione di fattori esterni diversi dai consueti, essa è il risultato fortuito di avvenimenti grandiosi o di momentanee accidentalità ambientali: si ha una ticogenesi (genesi fortuita) e, dato che l'azione esercitata dai fattori esterni può provocare questa o quella variazione e quindi l'insorgenza di specie diversificate rispetto alla specie-madre nelle maniere più disparate si può parlare di anfigenesi. Ben pochi si erano opposti a tali concezioni ed in ogni caso in modo parziale: ne erano così nati il principio dell'ortogenesi di Haacke, opposto a quello dell'anfigenesi, in cui veniva riconosciuto che il processo evolutivo segue direzioni fisse e determinate, la legge del non specializzato di Cope, in cui già si sostiene una riduzione progressiva della variazione, la legge dell'irreversibilità dell'evoluzione di Dollo in cui veniva negato ogni processo retrogrado nella storia delle specie. Per quanto fondate sui fatti, tali affermazioni contrarie alle idee dominanti non potevano conseguire il meritato successo, perchè rimanevano a costituire semplici generalizzazioni empiriche, spesso in contraddizione con altre affermazioni ammesse come valide nella teoria dell'evoluzione.

Nel periodo precedente all'opera del Rosa, nessuno dubitava che l'evoluzione o, per lo meno, la diversificazione delle specie, la produzione di nuove specie a partire da una specie-madre, avvenisse per opera di fattori esterni. Vero è che Lamarck e poi Naegeli avevano sostenuto che le cause dell'evoluzione risiedono anzitutto nell'intima natura dei viventi ed in secondo luogo nei fattori esterni che determinano le particolari maniere di variazione; ma, secondo essi, perchè l'evoluzione sia ramificata, perchè da una specie se ne formino più altre, occorrono agenti esterni ai quali gli organismi reagirebbero in maniera conforme, manifestando

variazioni ereditarie. In mancanza di fattori esterni diversi da quelli fino allora consueti, in ambiente costante, le specie sarebbero evolute ugualmente per cause intrinseche trasformandosi gradatamente da più semplici in più complesse, ma rettilineamente, senza dare origine a specie-figlie divergenti. Si comprende come Lamarck, dando gran peso alle azioni ambientali, si indirizzasse verso un moderato polifiletismo, mentre Naegeli, concedendo a questi un assai limitato valore, propugnasse un estremo polifiletismo. Ma quella sorta di potenza organizzatrice, proprietà delle materie viventi, che Lamarck aveva intuita e posta alla base di ogni processo evolutivo, era stata rifiutata e dimenticata dagli stessi lamarckisti, e la teoria di Naegeli, la cui legge della progressione trovava giustificazione nella meccanica, non aveva riscosso credito per l'inconcepibile preadattamento che costringeva a presupporre nelle innumerevoli forme primordiali di vita, che l'autore riteneva di dovere ammettere per coerenza con i suoi presupposti. E similmente era stata scartata fin dal nascere la teoria dell'eterogenesi di Kölliker, nella quale veniva affermato che l'evoluzione procede non già per azione di cause accidentali ma, obbedendo ad una legge di natura, per cause intrinseche del medesimo ordine di quelle che determinano lo sviluppo dell'individuo dall'ovo, ed era sostenuto che le nuove specie insorgono bruscamente, saltuariamente, e con gran numero di individui. Trascurate, sebbene solidamente poggiate sui fatti, erano state pure le opinioni di Waagen sulle graduali e progressive variazioni che una specie con tutta la massa dei suoi individui subisce nel corso dei tempi indipendentemente dalle diverse condizioni ambientali e la cui ragione veniva da lui attribuita a leggi inerenti alla natura degli organismi.

Queste ed altre concezioni che parlassero in favore di fattori intrinseci dell'evoluzione, rimanevano voci isolate e inascoltate; perfino Delage, mente lucida e biologo profondo, ancora nel primo scorcio di questo secolo ripeteva che « le teorie le quali cercano il fattore dominante dell'evoluzione e la causa dell'ortogenesi in una tendenza interna degli organismi verso il perfezionamento, nel principio dello sviluppo progressivo... non giovano per nulla alla scienza e quindi non è il caso di occuparsene ».

In breve: nonostante le obbiezioni e le voci discordi, nel pensiero scientifico della fine dello scorso secolo e del principio di questo, si era potentemente affermata e dominava l'idea che l'evoluzione fosse esclusivamente dovuta a cause ambientali, procedendo senza un predeterminato e definito orientamento, che tutte le forme viventi derivassero da un unico ceppo primitivo e che ciascuna specie insorgesse con uno o pochissimi individui in un solo centro di origine in seno alla specie-madre.

In tal periodo ed in atmosfera che doveva essergli necessariamente poco propizia, Daniele Rosa maturava la sua Ologenesi, quella che è per

eccellenza la teoria dei fattori intrinseci. Soffermiamoci brevemente su di essa.

Per Rosa le cause dell'evoluzione sono tutt'uno con le cause della vita: il mondo organizzato ha presentato il fenomeno dell'evoluzione perchè tali sono le proprietà dei corpi viventi. I fattori dell'evoluzione sono quindi impliciti negli organismi e l'azione dei fattori esterni non la provoca nè la dirige. L'ambiente offre solo le condizioni generali di vita, soddisfatte le quali lo svolgimento filogenetico si compie automaticamente. Rosa quindi accetta solo il primo postulato lamarckiano (mentre Naegeli aveva accettato, sia pur limitatamente, anche il secondo), affermando che, non soltanto le specie evolverebbero ugualmente anche se rimanessero costanti i fattori esterni, ma che la varietà degli ambienti particolari o i cambiamenti che vi si verificano non esercitano alcuna influenza sul decorso e sull'orientamento dell'evoluzione.

Le condizioni ambientali in cui si trovano gli individui di una specie possono esser tali da consentire la vita in tutte le sue varie manifestazioni, o da non consentirla. Nel primo caso le diversità dei singoli fattori, per quanta azione entro determinati limiti essi possano esercitare sulle manifestazioni della vita, non turbano nè fanno in alcun modo deviare il processo filogenetico: l'idioplasma specifico, quel substrato materiale che trasmette dall'una all'altra generazione i caratteri propri della specie, svolge le proprie attività ed, essendo uguale in tutti gli individui di ciascuna specie, in tutti evolve sempre nel medesimo modo, nonostante le differenze di fattori esterni che possono esistere nello spazio da questi occupato.

Negare che l'evoluzione delle specie avvenga per opera dei fattori interni non è in contrasto nè con le leggi della meccanica — e lo aveva già chiaramente fatto notare Naegeli — nè con un altro fenomeno biologico che presenta grandi analogie con quello dell'evoluzione delle specie, anzi ne è un episodio, cioè l'evoluzione dell'individuo. È infatti risaputo che nell'interno del proprio guscio, rimanendo costanti i fattori esterni, un ovo di gallina si trasforma gradatamente in pulcino; e ciò per le capacità inerenti al grumo di protoplasma contenuto nell'ovo. Similmente un embrione umano si sviluppa nell'utero materno, ove è mantenuto a temperatura costante ed è nutrito del medesimo sangue; ed il neonato è destinato a divenire adulto e poi vecchio, anche se le condizioni esterne rimangono invariate. Queste considerazioni valgono, se non altro, a mostrare che le variazioni filogenetiche possono dipendere da cause interne senza che a queste venga attribuito il carattere di comoda ipotesi esplicativa. Come nell'ovo di un animale è implicito lo svolgimento che condurrà all'individuo adulto e a tutte le diverse sorta di cellule che lo compon-

gono, così si può benissimo concepire e sostenere che in una specie primitiva fossero impliciti, predeterminati, gli ulteriori sviluppi, la sua evoluzione filogenetica.

Ma, negare ai fattori esterni il significato di cause determinatrici dell'evoluzione, affidata alle sole cause intrinseche, non significa che questa debba procedere obbligatoriamente in senso rettilineo e che non possa dare origine a più specie. Tale era l'opinione di Lamarck e di Naegeli, per cui il primo faceva originare e diversificare le specie per azione diretta o indiretta dell'ambiente, il secondo, meno disposto a ciò, era costretto ad ammettere quell'esteso polifiletismo a cui ho già accennato, limitando l'azione dell'ambiente alla produzione di poche nuove specie per ciascun ceppo originario. Ma se, come postula Rosa, le cause esterne non determinano nè dirigono l'evoluzione e se le cause interne non potessero produrre la filiazione di nuove specie, si cadrebbe addirittura nel polifiletismo assoluto, poichè bisognerebbe allora ammettere che tutte le specie oggi esistenti e quelle estintesi senza discendenza nel corso delle epoche geologiche si fossero sviluppate parallelamente ed indipendentemente da altrettante forme primigenie. Invece, secondo Rosa, anche rimanendo affidata alle sole cause interne, l'evoluzione del mondo vivente può benissimo risultar tale da venir rappresentata come un solo grande albero ricchissimamente ramificato: anche una teoria che ammette le sole cause interne può condurre a quel monofiletismo assoluto per cui militano tanti e tanti fatti concreti e che, del resto, i più accettano e riconoscono.

Tutte le specie — e in ciò consiste il postulato fondamentale della teoria dell'Ologenesi — si sarebbero formate da un'unica specie primigenia per scissioni successive, come da un tronco che si ramifichi dicotomicamente, biforcandosi. Ad ogni scissione, ad ogni biforcazione filogenetica, da una specie prendevano origine due specie diverse. Con le prime biforcazioni si producevano le specie capostipiti dei grandi gruppi sistematici, con le successive quelle capostipiti di gruppi via via minori. A ciascuna dicotomia corrispondeva una maggiore specializzazione ed una riduzione delle possibilità di ulteriori variazioni. Il cerchio delle possibilità di variare diveniva così progressivamente tanto più angusto quanto più le specie si erano differenziate e complicate. Perciò l'arborescenza non prosegue all'infinito: l'evoluzione, provocando la formazione di nuove specie, conduce nello stesso tempo le forme viventi gradatamente verso uno stato di fissità finale. Tra una scissione filogenetica e la successiva le specie percorrono una via evolutiva rettilinea modificandosi e trasformandosi lentamente ma rimanendo sempre le medesime specie (così come il medesimo individuo è un giovane che poi diventa vecchio); giunto il momento in cui esse sono, per così dire, mature, ciascuna si scinde automaticamente in due specie-figlie, cessando nel medesimo tempo di esistere. Le specie-

figlie in un primo tempo si presenteranno d'aspetto molto simili fra di loro e parimenti molto simili alla specie-madre, ma col trascorrer del tempo le differenze tra le due specie gemelle, e, meglio ancora, tra i due gruppi sistematici che ne derivano, si andranno vieppiù accentuando.

La teoria del Rosa, mentre da un lato è strettamente monofiletica, dall'altro è estesamente poligenetica, necessariamente globalmente poligenetica, quindi ologenetica (donde appunto il nome della teoria). Infatti, una volta ammesso che l'evoluzione dipende esclusivamente da fattori intrinseci è evidente che la discendenza di tutti gli individui di una specie, possedendo questi la medesima costituzione, deve presentare i medesimi fenomeni evolutivi: al momento in cui una specie è matura per scindersi in due specie-figlie, questa scissione avverrà a partire da tutti gli individui di quella specie, i quali entro un lasso di tempo più o meno breve saranno atti a dar prole di due costituzioni genetiche differenti. Tali scissioni filogenetiche sarebbero avvenute prevalentemente nelle prime epoche della vita sul nostro pianeta, ripetendosi ad intervalli di tempo sempre più rallentati.

Un simile modo di rappresentare l'evoluzione dei viventi è in gran parte basato sull'analogia con quanto è possibile constatare nel corso dell'evoluzione dell'individuo. I due fenomeni dell'ontogenesi o sviluppo individuale e della filogenesi o sviluppo delle specie presenterebbero un impressionante parallelismo. Un ovo di gallina dentro il suo guscio si divide e suddivide mediante bipartizioni successive dando luogo a quella innumere moltitudine di cellule che costituiscono col loro insieme il pulcino. Ma tali cellule, molto simili fra di loro all'inizio dello sviluppo, a mano a mano che diventano più numerose diventano anche sempre più differenti, finchè alla fine dello sviluppo, nel pulcino, si trovano tanti e tanti diversi tipi di cellule che differiscono per struttura e funzioni. Ciò significa che, soprattutto nei primi periodi della vita embrionale non sempre ciascuna cellula si divide dando luogo a due cellule uguali fra di loro e praticamente uguali alla genitrice, ma si verificano anche scissioni di tal sorta che da una cellula se ne producono due diverse fra di loro e diverse dalla genitrice. Cioè tra le divisioni omogenee si intercalano divisioni eterogenee e a ciascuna di queste divisioni eterogenee corrispondono due diverse serie cellulari.

Si può così stabilire — come effettivamente è stato fatto per parecchie specie — un vero e proprio albero genealogico delle diverse sorta di cellule del corpo dell'individuo; e la caratteristica di siffatto albero genealogico è proprio la sua ramificazione dicotomica differenziatrice verificatasi indipendentemente dai fattori ambientali. Per di più tutte le ova di una specie, sviluppandosi, sono iniziatrici di altrettanti alberi genealogici uguali, ove le estreme ramificazioni differenziate in una determinata

maniera dell'uno corrispondono a ramificazioni differenziate nella medesima maniera degli altri. Ciò aiuta a comprendere come si possa concepire che ciascun individuo di un'unica specie primigenia, fosse potenzialmente destinato a dare una discendenza comprendente tutte le diverse specie conosciute.

La selezione naturale, che per i darwinisti ha un'azione di primissimo ordine presiedendo fin dal loro sorgere allo sviluppo dei nuovi rami dell'albero genealogico delle specie, per Rosa ha solo una funzione eliminatrice rispetto a quei rami in cui prima o dopo si fossero verificate strutture incompatibili con l'ambiente. La selezione sarebbe extraspecifica e non intraspecifica o personale; essa, cioè, si eserciterebbe su tutti gli individui della specie quando questi hanno lentamente raggiunto i caratteri su cui la scelta naturale può aver presa, consentendo la perpetuazione delle une e troncando le altre, mentre secondo il darwinismo avrebbe la possibilità di far presa sulle minime variazioni intercedenti tra gli individui della medesima specie. Le conseguenze della selezione naturale nella teoria di Rosa sono assai diverse di quanto non si presentino nel darwinismo. Secondo Darwin, infatti, le variazioni avvengono a caso, in maniera adattiva o, assai più spesso, non adattiva, e son presentate da un numero esiguo di individui di regola in una ristretta località; e quindi sarebbe frequentissimo il caso, in cui i pochi individui ove si presenta la variazione vengano soppressi solo perchè questa non era utile in quel momento e in quella località, mentre sarebbero stati prescelti in altro momento o in altre località. Nella teoria di Rosa, invece le nuove specie si originano su tutta l'area occupata dalla specie-madre e a partire da tutti i suoi individui, e solo dopo lungo tempo differiranno manifestamente da quella e fra di loro. Ma allora esse per altrettanto lungo tempo saranno adatte al medesimo ambiente a cui era adatta la specie-madre; e quando poi i loro caratteri specifici si saranno sufficientemente manifestati e si saranno così anche manifestate particolari esigenze e particolari deficienze rispetto all'ambiente, dati il gran numero di individui e la vasta area da questi occupata, è assai probabile che dentro quest'area vi siano aree più ristrette ove i nuovi caratteri riescano utili. Per di più nella teoria di Rosa tali nuovi caratteri non sono qualsiasi, nè introducono una modificazione qualunque rispetto alla specie-madre, ma dipendono dai caratteri di questa, essendone una ulteriore differenziazione e specializzazione in modo che l'armonia tra le diverse parti dell'individuo, la reciproca congruenza degli organi e delle loro funzioni, cioè quello che vien chiamato l'adattamento interno, rimangono automaticamente rispettati. Ed è evidente che tale interna armonia dell'organismo è una ragione fondamentale perchè questo abbia la possibilità e una relativa facilità di trovarsi in armonia con l'ambiente esterno.

L'idea della formazione di nuovi gruppi sistematici sempre più subordinati per via di un regolare processo di scissione filogenetica di singole specie concorda con vari fatti generali.

Anzitutto, avendo ammessa l'evoluzione del mondo vivente e la sua origine monofiletica, è ovvio che, una volta stabilite le effettive rassomiglianze strutturali e la loro importanza relativa, una volta pervenuti ad una classificazione naturale delle forme organizzate, questa deve rispecchiare la filogenesi ed indicarci il processo secondo cui si è attuata la loro differenziazione. Ebbene: considerando un gruppo naturale di qualsiasi categoria che sia stato possibile ordinare tassonomicamente in maniera soddisfacente, emerge in maniera sufficientemente chiara che esso rimane suddiviso in due gruppi collaterali contrapponibili. Ciò significa che in una classificazione naturale l'ordinamento delle forme in categorie sistematiche via via subordinate può compiersi solo per mezzo di dicotomie. L'importanza sistematica delle dicotomie, già messe in rilievo da Seidlitz, da Rosa, da Lameere, da Colosi, da Caporiacco, da Salfi, da Sciacchitano, da Säve-Söderberg, da Hennig, da Kiriakoff, risulta anche dai lavori di numerosi autori esenti da preoccupazioni filogenetiche; e, passando in rassegna i risultati di un quindicennio di recenti indagini sistematiche, Günther ne ha fornito la più evidente dimostrazione; mentre le classificazioni filogenetiche di Jarvik, di Siewing la confermano pienamente. Non senza ragione quindi Rosa e più recentemente Remane ed Hennig hanno recisamente affermato che la filogenesi deve essere rappresentata da un albero dicotomicamente ramificato.

La constatazione delle dicotomie filogenetiche spiega il fatto che non esistono forme connettenti note nè fra le attualmente viventi, nè tra quelle che han lasciato tracce fossili. Le specie-madri di un gruppo, infatti, secondo Rosa, scompaiono al momento in cui, scindendosi, dan luogo alle specie-figlie capostipiti dei due sottogruppi collaterali; e siccome le specie capostipiti dei tipi, delle classi, e perfino degli ordini debbono essersi scisse in periodi precocissimi della storia della vita, quando ormai erano ben lontane dal presentare i futuri caratteri dei gruppi a cui in quel momento davano pur origine, così, anche se per avventura fossero state fossilizzabili — cosa da escludersi — i loro fossili sarebbero certamente irriconoscibili.

Viene così spiegato quell'apparente polifiletismo, dovuto al deciso e profondo distacco reciproco dei gruppi sistematici quali a noi son noti, in considerazione del quale alcuni biologi e paleontologi si erano pronunziati contro il monofiletismo dei viventi.

Con la legge delle dicotomie filogenetiche concordano i fenomeni costanti di divergenza fra rami collaterali: divergenza dovuta non a fortuito risultato di competizioni tra specie-madre, specie-figlie e specie-sorelle, come vuole il darwinismo, bensì come unica conseguenza possibile

nella produzione di un albero dicotomicamente ramificato. D'altra parte, dato che la divergenza si manifesta con caratteri di organizzazione, deve logicamente avvenire che in ciascuno dei due rami collaterali devono presentarsi ed accentuarsi caratteristiche assenti nell'altro, donde col succedersi delle biforcazioni una riduzione progressiva della variabilità e per conseguenza un'ortogenesi vera (non ortoselezione) e la irreversibilità del processo evolutivo.

Certo è che la divisione dicotomica non costituisce un fenomeno eccezionale nei processi biologici. Tutte le cellule si moltiplicano per scissione in due cellule, tutti i nuclei per scissione in due nuclei, ciascun cromosoma si divide in due cromosomi, ciascun centriolo in due centrioli. D'altra parte sappiamo che tutti i processi di diversificazione fra due cellule-figlie dipendono da ineguale ripartizione dei materiali citoplasmatici contenuti nella cellula-madre e che nel corso dello sviluppo individuale le diversificazioni istologiche si compiono come conseguenza di divisioni cellulari eterogenee intercalate fra le divisioni omogenee.

Il fenomeno della dicotomia e della disuguaglianza fra i due derivati non può nè deve essere sottovalutato. « La dicotomia ineguale — affermava Chiarugi — domina la morfologia dell'organizzazione ». Se ciò, come pare, corrisponde a realtà, bisogna riconoscere che ci troviamo dinnanzi ad una proprietà fondamentale della materia vivente: proprietà che, in ultima analisi deve dipendere dalla natura chimica delle sue molecole, e in virtù della quale i processi moltiplicativi avvengono per scissioni più o meno ineguali. Non è quindi nè ingiustificata nè arrischiata la tesi secondo la quale, durante lo svolgimento del mondo organizzato, quel substrato materiale da cui dipendono le manifestazioni morfologiche, strutturali e funzionali degli individui, abbia subito ad intervalli più o meno lunghi divisioni binarie eterogenee, mediante le quali un determinato idioplasma specifico veniva scisso in due idioplasmi più o meno diversi l'uno dall'altro, dando così origine alle specie capostipiti di due gruppi sistematici collaterali, gemelli, ma costituzionalmente divergenti. Che certe regole fondamentali debbano essere valevoli sia per l'ontogenesi che per la filogenesi è da ritenersi quasi ovvio, perchè entrambe fan parte di un unico grandioso fenomeno. Sarebbe veramente strano che il processo di moltiplicazione e di diversificazione del corredo idioplasmatico si fosse compiuto in maniera totalmente diversa da come si compiono tutti gli altri processi di moltiplicazione diversificatrice ai quali ci è possibile assistere ai vari livelli della morfogenesi degli organismi.

Questa ineguaglianza dei due derivati da ciascuna dicotomia dà luogo, secondo Rosa, ad una caratteristica manifestazione.

Con la legge della dicotomia infatti s'ingrana nella concezione ologenetica la legge della dissimmetria evolutiva dei gruppi collaterali. Tale

legge non venne desunta dalla legge della dicotomia, bensì da una generalizzazione empirica basata sulla sistematica. Di due gruppi sistematici collaterali, infatti, uno si presenta con forme fossili prima dell'altro, arriva più presto al suo apogeo, ma rimane di organizzazione meno complessa e dà luogo ad un minor numero di specie. Secondo Rosa i due gruppi si sono originati contemporaneamente da una scissione filogenetica; ma l'uno è precoce e l'altro tardivo, l'uno si sviluppa più rapidamente e l'altro più lentamente ma in compenso subisce un maggior numero di successive scissioni filogenetiche dando così luogo ad un più elevato numero di gruppi subordinati e di specie. Così Rosa spiega la ragione della persistenza di forme di organizzazione inferiore, le quali non sarebbero altro che specie appartenenti al ramo precoce, le quali perciò si fermerebbero ad un livello che viene oltrepassato da quelle del ramo tardivo collaterale, e che perciò rassomigliano maggiormente a stadi attraversati da questo in epoche anteriori, ma che non sono affatto le progenitrici delle forme che ad esso appartengono.

La teoria dell'Ologenesi infine rende conto dei fenomeni della distribuzione geografica degli esseri viventi in maniera assai più soddisfacente che qualsiasi altra teoria, tanto da trovare in questi una delle più solide prove.

Di solito, applicando i tradizionali concetti monogenetici, si ammette che ciascuna specie abbia avuto origine in un centro limitatissimo e che, quando specie del medesimo genere o generi di una stessa famiglia presentano una distribuzione discontinua, si ha l'abitudine di chiedersi quale ne sia stato il primitivo centro di dispersione. Nel caso di animali o di piante terrestri, che occupino luoghi assai lontani e separati da larghe distese di mari, l'abitudine invalsa vuole che si presupponga l'esistenza di ponti di connessione e perfino di continenti transoceanici atti alle migrazioni da un continente all'altro, da un'isola all'altra. Ogni specie esige tutta una costruzione paleogeografica che le convenga; e moltissimi zoologi sistematici, con la condiscendenza di non meno numerosi geologi, hanno costruito un numero quasi infinito di ponti che si sollevano e si sommergono a tempo opportuno per il transito dell'una o dell'altra forma in tale o tal altro periodo della storia della terra. Questo modo di concepire il processo della distribuzione dei viventi è ancora così generale che non vi si trova nulla di audace.

Eppure la geofisica ha tutt'altro che confermata la legittimità dell'ipotesi dei ponti continentali; la geologia non ha mai trovato seri argomenti che parlino in favore di emersioni del suolo di mari profondi e di estesi inabissamenti di terraferma; la paleontologia non solo non ha fornito appoggio effettivo all'idea monogenetica dei centri di origine, ma spesso l'ha patentemente contradetta. La teoria dell'Ologenesi, invece,

opponendosi al monogenismo e postulando quel poligenismo necessario di cui abbiamo già detto, dà una spiegazione dei fenomeni biogeografici più logica e più concorde coi fatti, senza alcuna necessità di ricorrere ad ipotesi sussidiarie. Secondo l'Ologenesi, infatti, tutti gli individui di una specie hanno la medesima prospettiva filogenetica determinata dalla natura intima della specie, e perciò quando questa si scinde (dicotomicamente in due specie e cessando di esistere), la scissione nelle specie-figlie avviene, entro limiti di tempo più o meno ampi, egualmente in tutti gli individui che la compongono e su tutta l'area da essa occupata. In tal modo ogni nuovo carattere che si manifesterà nelle specie-figlie, avrà maggiori probabilità di trovare, nel seno dell'area precedentemente occupata dalla specie-madre, un ambiente nel quale esso riesca utile. Dove mancano le condizioni adatte le nuove specie vengono soppresse dalla selezione naturale; e, se l'area occupata dalla specie-madre non era già discontinua può benissimo risultare discontinua quella delle specie-figlie.

Non già, quindi, una biogeografia essenzialmente basata su successivi e continui spostamenti di specie a partire da centri di origine; ma una biogeografia che, a partire da un cosmopolitismo primitivo, riconosce un successivo processo riduzionale delle aree occupate a mano a mano che le specie crescevano in numero e si differenziavano. E Rosa rilevò di quanta importanza per la sua tesi è il fatto che quanto più si risale nell'antichità dei tempi, tanto più le aree di distribuzione dei gruppi animali e vegetali erano estese e tanto più uniformemente erano miste le faune e le flore, e che nel corso dei periodi geologici si è assistito ad una segregazione biogeografica piuttosto che al raggiungimento di una promiscuità. Fraipont e Leclercq a fine di verificare la teoria di Rosa, analizzarono piante e animali di periodi geologici antichi e recenti appartenenti a svariati gruppi e domini ecologici diversi e, concludendo in favore della biogeografia ologenetica, confermarono che « le forme sembrano avere occupato primitivamente aree assai vaste e che solo tardivamente la loro distribuzione si restringe ad una o poche località » e si pronunziarono nettamente contro i centri d'origine delle specie e contro le teorie delle migrazioni e dei ponti di connessione fra i continenti. Altri studiosi, e tra questi Janssens, convengono che certi fatti della biogeografia non possono spiegarsi che ammettendo l'ologenesi. Ma soprattutto da segnalare sono le affermazioni a cui recentemente è giunto Croizat in una poderosa e riccamente documentata opera biogeografica, contenente un'acuta analisi dei fatti concernenti la tassonomia, la paleogeografia e la paleontologia, il loro confronto con i fatti della distribuzione geografica degli esseri viventi, e le deduzioni obbiettive che si è autorizzati a trarne. Ed è interessante notare come, indipendentemente da ogni preconcetto ologenetico, anzi libero da ogni

presupposto teorico che potesse inquinare la linea logica dei suoi ragionamenti, Croizat sia pervenuto a conclusioni che concordano con la teoria di Rosa molto più che con qualsiasi altra teoria evoluzionistica.

Ci si può ora chiedere se vi sia accordo fra i risultati sperimentali della genetica ed il contenuto della dottrina evoluzionistica, se ed in qual misura la genetica sia in grado di esercitare un controllo sulle costruzioni teoriche di carattere filogenetico.

L'accordo a prima vista non si presenta agevole. Però trasmissione ereditaria dei caratteri di una specie da una parte e variazione evolutiva con origine di nuove specie dall'altra non debbono essere fenomeni inconciliabili. Ad ogni modo non si deve dimenticare che gli studi sperimentali controllano una specie per un tempo straordinariamente breve in confronto dei periodi geologici e che per giunta le sue analisi sono condotte su gruppetti di forme legate da reciproca strettissima affinità, le quali, nella migliore delle ipotesi rappresentano il risultato di un'evoluzione straordinariamente inoltrata, ed offrono il duplice carattere di aver raggiunto o quasi uno stadio di fissità finale e di possedere nel medesimo tempo una così grande rassomiglianza costituzionale da rendere possibili gli incroci nel cerchio di una parentela relativamente larga.

Ciò premesso, constatiamo subito che la genetica non offre alcuna solida base a sostegno delle teorie delle cause esterne, che sono proprio quelle che ne avrebbero potuto maggiormente beneficiare. L'azione dei fattori ambientali nel maggior numero dei casi non provoca che polimorfismi e fluttuazioni, cioè variazioni dei caratteri corporei individuali, senza ripercussione sulla costituzione intima della specie e perciò non ereditabili. In quanto alla selezione, fulcro del darwinismo, si è visto che essa, se esercitata dall'uomo con particolari cure, è solo in grado di separare specie elementari già esistenti in natura; se esercitata dalla natura, distrugge le variazioni individuali estreme e fissa la fisionomia generale di una popolazione mista favorendo or le une or le altre specie elementari a seconda dei luoghi.

Però gli studi di genetica dimostrarono che l'idioplasma specifico non è del tutto impassibile di fronte agli agenti esterni. Si è infatti constatato che questi possono determinare bruscamente l'insorgenza di variazioni ereditarie talora abbastanza accentuate — le cosidette mutazioni —, le quali a molti sembrò potessero fornire la chiave dell'evoluzione del mondo organizzato. Ma tutto il comportamento delle mutazioni ci induce a ritenere che le stirpi ottenute per questa via posseggono un idioplasma il cui complesso primitivamente armonico è stato turbato; e non è certo per l'insorgere di disarmonie — sia pur parziali e tali da non riuscire subito nefaste — che può spiegarsi l'origine di nuove specie, e peggio ancora, di nuovi gruppi sistematici.

Le alterazioni casuali compatibili con la vita a cui va soggetto l'idioplasma delle unità sistematiche son dunque capaci di dar luogo solo — come ben si esprime Jucci in un acuto esame delle teorie evoluzionistiche alla luce della genetica — « a variazioni ereditarie, le mutazioni, che si potrebbero anche considerare, forse, come fluttuazioni genotipiche destituite di valore evolutivo tanto quanto le fluttuazioni fenotipiche indotte dalle cause ambientali ». E lo stesso Jucci riconosce che « tutto sommato, le difficoltà di spiegare l'evoluzione degli organismi semplicemente per cause estrinseche risultano addirittura insormontabili e spingono necessariamente a riconoscere l'esistenza di cause interne », che « lo stesso carattere ortogenetico dell'evoluzione biologica mostra che le cause interne sono le vere cause » e, dopo aver criticato il darwinismo, il lamarckismo ed il mutazionismo, dichiara che « una teoria come quella dell'Ologenesi può armonizzarsi anche con le conclusioni sperimentali della scienza genetica ».

Certo è che, contrariamente a quanto era accaduto nel secolo scorso e nei primi anni di questo secolo, l'idea che l'evoluzione del mondo vivente dipende, almeno in gran parte da fattori intrinseci ha guadagnato terreno ed è probabile che, se non la teoria dell'Ologenesi, almeno la legge della riduzione progressiva della variabilità (che del resto forma parte integrante dell'Ologenesi) abbia esercitato un potente impulso nel determinare questo diverso orientamento del pensiero scientifico.

Già O. Hertwig si chiedeva se le cause dello sviluppo delle specie non fossero della medesima natura di quelle da cui dipende lo sviluppo dell'individuo e se i fatti non dessero ragione a pensare che la filogenesi a somiglianza dell'ontogenesi consiste in una evoluzione secondo un processo continuo, progressivo e regolato, dovuto a necessità interne piuttosto che ad effetto di fortuite variazioni; e K. C. Schneider affermava che la forma di partenza o specie primitiva, contiene in partenza la forma più complessa che se ne sviluppa nel corso dell'ontogenesi o della filogenesi, e che deve essere esistita qualche forma primitiva nella quale erano implicite tutte le forme, nella quale erano contenute tutte le potenzialità morfologiche.

Più recentemente Driesch si esprimeva in maniera molto significativa in favore dei fattori intrinseci. A priori — egli dice — possiamo ammettere due basi su cui è possibile stabilire la filogenesi: o l'accumulo dipendente vuoi dal fortuito ricorrere di cause esterne, vuoi dall'azione reciproca delle parti; o la vera e propria evoluzione dipendente da cause interne per via di una onnipossente causalità. Orbene, quanto se ammettiamo le variazioni nel senso di Darwin, tanto se le sostituiamo con le mutazioni di De Vries, è impossibile spiegare la filogenesi con le trasformazioni dovute al caso, poichè la selezione naturale (dogmaticamente ammessa) è un semplice fattore negativo, nè può essere concepita come

causa efficiente. Nè d'altra parte può venire accettato il fattore lamarckiano e il principio della trasmissione dei caratteri acquisiti come reazione côn l'ambiente esterno. Le teorie che postulano l'accumulo, le teorie delle variazioni fortuite — conclude quindi Driesch — sono da scartarsi completamente: la filogenesi deve procedere per vera e propria evoluzione; essa è, al pari dell'ontogenesi, uno sviluppo dovuto a cause interne.

Parteggiando per le medesime idee, Woltereck dichiara che, dovendosi pur ammettere che le innumerevoli forme organiche si siano prodotte per derivazione di specie da altre specie, ogni cambiamento specifico deve corrispondere ad un cambiamento costituzionale che segua leggi interiori, con l'esclusione dell'azione diretta o indiretta dell'ambiente e di ogni altro meccanismo mosso dal caso. È evidentemente insensato — egli aggiunge — pretendere che la genesi di una forma terminale, come ad esempio l'uomo, sia dovuta a tutto un susseguirsi di mutazioni fortuite e dirette comunque, ovvero a casuali incroci; nè l'influenza della selezione naturale e l'azione dell'ambiente esterno aiutano a passar sopra all'insensatezza di tali concezioni. Nessuno può infatti disconoscere che nel susseguirsi delle forme viventi durante il corso della storia della terra siano chiaramente riconoscibili delle direzioni evolutive, delle linee ortogenetiche di svolgimento, le quali non di rado han condotto a forme di esagerazione strutturale e funzionale, contrariamente ad ogni previsione possibile di efficacia della selezione naturale, ad ogni supposizione di azione diretta o indiretta del mondo esterno: linee ortogenetiche che costituiscono un fenomeno concepibile solo come diretto da cause interne.

Anche Enriques metteva in particolare rilievo alcune delle più importanti acquisizioni fatte in materia evoluzionistica durante questo scorcio di secolo; acquisizioni che parlano tutte schiettamente in favore di agenti intrinseci del processo evolutivo. E si fermava soprattutto a considerare quella regolare ripetizione delle strutture che produce l'intreccio dei caratteri in sistematica e i vari fatti della biogeografia che contraddicono l'origine casuale delle specie. Nè mancava di aderire all'ortogenesi, vera espressione del predeterminismo in filogenesi: « La teoria dell'ortogenesi — egli dice — è stata accusata da alcuni vivacemente come quella teoria molto comoda che toglie le difficoltà di spiegazione dell'evoluzione attribuendo questa ad una meravigliosa forza interna. Tale accusa è ridicola... Si tratta di avvicinarsi alla verità per quanto è possibile e se in questo avvicinamento ci troviamo di fronte a forze interne evolutive, queste ammetteremo pur senza conoscerne l'intima natura ». « L'obbiezione che con ciò venga presentata un'interpretazione teleologica e non scientifica dell'evoluzione e venga introdotta nei processi dell'evoluzione una forza vitale inesplorabile è falsa ed ingiusta. Ciò significa non accorgersi che gli esseri viventi sono sottoposti a leggi biologiche — che sono qualcosa

di più che le comuni leggi fisiche e chimiche — e non riconoscere che anche la loro evoluzione si compie secondo leggi corrispondenti alla propria fondamentale struttura » (Stammer).

E Caullery, pur non rinunziando all'ipotesi dei fattori lamarckiani, che respinge però in un remoto passato, sostiene fermamente che bisogna ormai venire alla « conclusione capitale » che i fenomeni fondamentali dell'evoluzione non risultano, almeno in maniera diretta e preponderante dall'azione dei fattori esterni, poichè, se così fosse stato, tutti i gruppi sarebbero evoluti contemporaneamente, mentre al contrario ciascuno si è sviluppato cronologicamente in modo diverso dall'altro, arrivando più o meno presto ad una fase di stabilità e financo di fissità.

Più recentemente Brough, dopo un acuto esame dei dati paleontologici è venuto alla conclusione che nè le mutazioni constatate sperimentalmente, nè la selezione naturale possono essere ritenuti i fattori dell'evoluzione, che questa è un processo gradatamente rallentato con effetti di significato nettamente decrescenti (riduzione progressiva della variabilità) fino al raggiungimento di una fissità finale. I fattori esterni — secondo Brough — non possono venir in alcun modo considerati come agenti principali delle modificazioni evolutive, le quali si verificano direzionalmente, ortogeneticamente, e si deve convenire che le modificazioni genotipiche non avvengono comunque e che esiste qualche causa di realizzazione delle successive forme organiche molto più efficace che non la selezione naturale. L'attitudine di parecchi biologi darwinisti è dovuta — dice Brough — alla scarsa familiarità con le testimonianze paleontologiche, alla utilizzazione di queste senza rendersi conto del loro significato o senza fornirne un'adeguata spiegazione e all'avere pacificamente accettata la spiegazione in funzione della selezione naturale.

A prescindere dalle teorie di Lamarck e di Naegeli, che tanta parte attribuiscono ai fattori intrinseci dell'evoluzione, non possono essere passate sotto silenzio le teorie di Berg e di Przibran. La teoria della « nomogenesi » di Berg, riccamente documentata da fatti offerti dalla paleontologia, dalla sistematica e dalla biogeografia costituisce uno sviluppo della teoria di Lamarck: ciò che ci interessa rilevare è che, dopo una serrata critica alla teoria della selezione naturale, Berg mette in chiara evidenza le linee direzionali dell'evoluzione e la non fortuità delle strutture conseguite: egli peraltro al pari di Naegeli ponendo le ramificazioni dell'albero genealogico dei viventi in balia dei fattori esterni come dovute all'adattabilità diretta, nè sentendosi di sostenere la realizzazione dei piani di organizzazione per azione dell'ambiente, è costretto a ricorrere all'idea di un esteso polifiletismo. Anche Przibran con la sua « apogenesi » presenta l'evoluzione dei presenti come il risultato di un processo di complicazione e di diversificazione compiutosi per cause intrinseche.

Ma lo studioso che maggiormente si avvicina a Rosa nella concezione dell'evoluzione è certamente Hennig, il quale, in una sua recente teoria che ha vari sostenitori tra cui Kiriakoff, e a documentare la cui validità ha contribuito Günther, ha formulato dei principi che concordano con quelli posti a base dell'Ologenesi.

Hennig infatti sostiene: 1) che l'evoluzione procede per dicotomie successive e che, quando una specie capostipite di un gruppo sistematico dà origine a specie capostipiti di gruppi immediatamente subordinati, essa si scinde in due specie ed i gruppi sistematici che ne derivano sono collaterali; 2) che i due gruppi collaterali continuano ad evolvere secondo linee divergenti, ma uno di essi (plesiomorfo) devia meno dell'altro (apomorfo) rispetto ad una condizione intermedia concepibile supponendo che la specie-madre avesse proseguito la sua evoluzione rettilinea; 3) che il gruppo plesiomorfo (ramo precoce di Rosa) presenta caratteri di maggiore primitività rispetto al gruppo apomorfo (ramo tardivo di Rosa); 4) che la specie-madre cessa di esistere non appena si scinde per dare origine a due specie-figlie; 5) che il processo della filogenesi si svolge sempre in maniera analoga e le ramificazioni dell'albero genealogico dei viventi presentano sempre le medesime caratteristiche a cominciare dal tronco basale per terminare ai ramuscoli che raffigurano le ultime unità sistematiche raggiunte.

La concordanza tra la teoria di Hennig e la teoria di Rosa è completa e, mentre mette in evidenza quali conclusioni sono autorizzate dall'esame attento e ragionato dei fatti offerti dalla sistematica, costituisce, sebbene formulata indipendentemente da ogni presupposto ologenetico, la più chiara conferma della validità della teoria dell'Ologenesi. D'altra parte la legge dei parallelismi morfologici enunziata da Colosi ed empiricamente desunta dai fatti, la legge delle variazioni analoghe di Vavilov e gli studi di Novikoff sulla presenza di strutture analoghe nei diversi rappresentanti del mondo vivente, suffragano i concetti svolti da Rosa nell'Ologenesi e dimostrano che la realizzazione delle forme organizzate deve essere interpretata come la regolare attuazione di tendenze o proprietà potenziali possedute dalla materia vivente fin dai suoi primordi. Infine l'applicazione dei principi ologenetici all'antropologia fece concludere a Montandon che fra le varie teorie evoluzionistiche « quella dell'Ologenesi è la sola che permetta di risolvere i problemi altrimenti insolubili inerenti allo studio delle razze umane e soprattutto a quello della loro distribuzione geografica ».

« In conclusione — così si esprimeva Manquat — alle teorie che sostengono i fenomeni di specializzazione esser d'origine esterna (effetto dell'uso e del non uso, selezione naturale), dovuti a fattori che agiscono per così dire a fior di pelle degli organismi, alla teoria che pretende siano il

risultato raramente fortunato di una teratologia germinale che agisce alla cieca (mutazionismo) con circa la medesima probabilità di produrre una specie effettiva che ha una montagna di partorire un topo, l'Ologenesi oppone una concezione che si sostiene validamente senza fare appello per lo sviluppo degli esseri viventi altro che alle energie normali della stessa materia vivente. E quell'albero genealogico che schematicamente simboleggia il trasformismo, per opera di Daniele Rosa è diventato una realtà ».

Nel giudicare la teoria dell'Ologenesi vari studiosi sono stati tratti a diffidarne per l'abituale e non ingiustificata avversione al procedimento deduttivo, poichè di regola le scienze positive usano pervenire a conclusioni generali solo per via d'induzione. Ma in questo caso la diffidenza scaturisce da un malinteso: vero è, infatti, che il Rosa, poste alcune premesse sotto forma di postulati, non fece che svilupparle con rigore logico in tutte le loro conseguenze e che in tale sviluppo coerente consiste l'edificio della sua teoria. Ma bisogna ben considerare, anzitutto che le sue premesse non sono arbitrarie come quelle di tanti sistemi filosofici, ma rappresentano il risultato di una intuizione a partire da un'enorme massa di fatti disparatissimi offerti dalla natura vivente e dalla legittima presumibile analogia esistente fra ontogenesi e filogenesi, costituendo perciò un processo induttivo abbreviato; e in secondo luogo che la concordanza di tutte le deduzioni possibili dalle premesse con altrettante leggi di constatazione solidamente stabilite e con tutte le categorie di fatti reali noti dimostra il buon fondamento di quei postulati e fa sì che la teoria rivesta un carattere di netta positività. Insomma ai postulati fondamentali dell'Ologenesi si sarebbe potuto benissimo giungere risalendo sistematicamente tutti i gradi dell'induzione: al Rosa sembrò opportuno seguire l'opposto metodo logico. Circa il meccanismo secondo cui si svolge il processo evolutivo dell'idioplasma, esso è presentato come ipotetico. Lo si potrà discutere; ma certamente, fino ad oggi, esso è l'unico che si accordi in maniera plausibile con le leggi di constatazione secondo cui si compie la filogenesi.

Rosa non fu scienziato dai rapidi e facili successi. Ma visse abbastanza a lungo, sì da veder cambiare l'orientamento del pensiero biologico e da potere con ragione sperare che in un non lontano futuro quella teoria a cui aveva consacrato il proprio ingegno sarebbe stata più generalmente e integralmente accettata. Certo, anch'Egli avrà pensato, come già il grande suo predecessore G. B. Lamarck, che è più facile scoprire una verità che assisterne al trionfo.

NOTA CRONOLOGICA

1857 (29 ottobre): Nascita a Susa.
1862 (17 giugno): Morte del padre Norberto Rosa a Susa.
1862 (fine anno): Trasferimento della famiglia ad Avigliana. Entra nelle scuole elementari pubbliche, ma prosegue privatamente nel 1863 e 1864.
1865 (ottobre): Trasferimento della famiglia a Torino. Frequenta le Scuole elementari pubbliche.
1867 (novembre): Entra nel Ginnasio.
1872 (novembre): Entra in Liceo. Ripete la 3ª classe liceale perchè respinto in matematica ed ottiene la licenza nell'ottobre del 1876.
1876: Comincia a studiare Giurisprudenza.
1876 (novembre): Si iscrive alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Università di Torino. Comincia subito a frequentare il Museo Zoologico.
1878 (aprile): Morte della madre.
1879 (estate): Viaggio in Corsica.
1880 (30 giugno): Laurea in Scienze Naturali.
1880 (ottobre): Frequenta durante il semestre invernale 1880-81 i corsi tenuti nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Gottinga.
1881 (31 dicembre): È nominato assistente aggiunto presso il Museo Zoologico dell'Università di Torino. Confermato negli anni successivi.
1884 (17 dicembre): Conseguimento del titolo di Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze della R. Università di Torino.
1889 (13 dicembre): Concorre alla cattedra in Zoologia e Anatomia comparata della Università di Sassari.
1889 (13 dicembre): Assistente effettivo presso il Museo zoologico di Torino. Confermato negli anni successivi.
1892-94: Supplisce il Prof. Lessona nelle lezioni di Zoologia. (Morte di Lessona il 22 luglio 1894).
1895 (novembre): Inizia il corso libero di Embriologia comparata che impartisce durante gli anni 1895-96, 1896-97, 1897-98 con sospensione nell'intervallo di tempo in cui è incaricato a Perugia.
1896: Concorre alla cattedra di Zoologia dell'Università di Catania.
1897 (1º gennaio): Professore incaricato di Zoologia ed Anatomia comparata presso la libera Università di Perugia fino al 31 agosto 1897.
1897 (3 giugno): Riassunzione come assistente effettivo presso il Museo zoologico di Torino. Confermato negli anni seguenti.
1898: Concorre alla cattedra di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università di Parma. Riesce eleggibile.
1898 (23 dicembre): È nominato Professore incaricato; indi Prof. straordinario di Zoologia ed Anatomia comparata presso la R. Università di Sassari.
1899: Concorre alla cattedra di Zoologia di Napoli.
1900 (10 gennaio): Professore straordinario di Zoologia e Anat. comp. presso la R. Università di Modena. Confermato negli anni successivi.
1900: Concorre alla cattedra di Zoologia e Anat. comp. di Messina.
1902 (30 novembre): Nomina a Prof. ordinario presso l'Università di Modena, ove continua ad occupare la cattedra di Zoologia e Anatomia comparata fino al 1905.

1905 (19 novembre): Chiamato alla cattedra di Zoologia ed Anatomia degli Invertebrati presso il R. Istituto di Studi superiori di Firenze, ove rimane fino al 1927.
1917 (11 novembre): Ritorna alla cattedra di Modena, rimanendovi fino al 1919.
1919 (10 ottobre): Chiamato alla cattedra di Zoologia presso la R. Università di Torino, ove rimane fino al 1921.
1921 (16 ottobre): Ritorna per la seconda volta alla cattedra di Modena, ove rimane fino al 1932.
1932 (1° maggio): Collocamento a riposo per limiti di età.
1932: Si trasferisce a Pisa, ove frequenta l'Istituto di Zoologia.
1936: Si trasferisce a Novi Ligure.
1944 (2 aprile): Morte a Novi Ligure.

PUBBLICAZIONI DI DANIELE ROSA

Nota intorno ad una nuova specie di Gordius *proveniente da Tiflis,* « Atti R. Accad. Scienze Torino », XVI, 1881.

Un caso di parassitismo di Gordius *nell'uomo*(in collab.), « Atti R. Accad. Medicina Torino », 1881.

Nota intorno al Gordius Villoti *ed al* G. tolosanus, « Atti R. Accad. Scienze Torino », XVII, 1882.

Descrizione di due nuovi Lombrichi, « Atti R. Accad. Scienze Torino », XIX, 1883.

I Lumbrichi del Piemonte, Torino 1884.

Note sui Lombrichi del Veneto, « Atti R. Istituto Veneto » (6) VI, 1886.

Allolobophora celtica, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », I, 1886.

Nota preliminare sul Criodrilus lacuum, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », I, 1886.

I Lumbrichi anteclitelliani in Australia, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », I, 1886.

Sul Criodrilus lacuum, *studio zoologico ed anatomico,* « Mem. R. Accad. Scienze Torino », (2), XXXVII, 1887.

Microscolex modestus, n. gen., n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », II, 1887.

Il Lumbricus Eiseni Lev. *in Italia,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », II, 1887.

Il Neoenchytraeus bulbosus, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », II, 1887.

La distribuzione verticale dei Lombrichi sulle Alpi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », II, 1887.

Sui generi Pontodrilus, Microscolex *e* Photodrilus, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », II, 1888.

Sul Geoscolex maximus *Leuc.,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », III, 1888.

Nuova classificazione dei Terricoli, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », III, 1888.

Di un Lumbrico Italiano (Allolobophora Tellinii, n. sp.), « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », III, 1888.

Viaggio di L. Fea in Birmania. 5. Perichetidi, « Ann. Mus. Civico Storia Nat. Genova », (2) VI, 1888.

I Lombrichi dello Scioa, « Ann. Mus. Civico Storia Nat. Genova », (2) VI, 1888.

*Descrizione dell'*Allolobophora mima, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IV, 1889.

Note sui Lombrichi Iberici, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IV, 1889.

Il Ctenodrilus pardalis *Clap., a Rapallo,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », 4, IV, 1889.

Il laboratorio privato di Zoologia marina a Rapallo, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IV, 1889.

Sull'assenza dei Receptacula seminis *in alcuni Lumbricidi,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IV, 1889.

*Sulla struttura dell'*Hormogaster Redii, n. sp., « Mem R. Accad. Scienze Torino », XXXIX, 1889.

I Lumbrichi raccolti nell'Isola Nias da E. Modigliani, « Ann. Mus. Civico Storia Nat. Genova, (2), VII, 1890.

Le Nov latin, international scientific lingua super natural bases, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », V, 1890.

Terricoles ex Birmania et ex austral America, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », V, 1890.

I Lombrichi della Spedizione Antartica Italiana nel 1882, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), VII, 1890.

I Terricoli Argentini raccolti dal Dr. E. Spegazzini, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), IX, 1890.

Viaggio di L. Fea in Birmania, 25, Moniligastridi, Geoscolicidi ed Eudrilidi, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), IX, 1890.

La « Zoogenia » di F. C. Marmocchi (1853), « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IV, 1891.

Die exotischen Terricolen des k.k. naturhist. Hofmuseum, « Ann. des k.k. nat. Hofmuseum Wien », 1891.

Kynotus Michaelsenii, *contributo alla morfologia dei Geoscolicidi,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VII, 1892.

*Descrizione dell'*Allolobophora Festae, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VII, 1892.

I terricoli esotici dell'I. R. Museo di Storia naturale di Vienna, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VII, 1892.

*Descrizione dell'*Allolobophora smaragdina, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VII, 1892.

Megascolex templetonianus, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VII, 1892.

Viaggio di L. Fea in Birmania, 26, Perichetidi, 2ª parte, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), X, 1892.

I Lombrichi raccolti nell'Isola Engano dal Dr. E. Modigliani, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), XII, 1892.

Revisione dei Lombrichi, « Mem. R. Accad. Scienze Torino », (2), XLII, 1893.

Catalogo e distribuzione geografica dei Lumbrichi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VIII, 1893.

Viaggio Festa in Palestina. II. *Lumbricidi,* con appendice 1ª (*I Lumbricidi e la Fauna della Palestina*) e app. 2ª (*Gli spermatofori dei Lumbricidi*), « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », VIII, 1893.

Allolobophora Ganglbaueri *ed* A. Oliveirae, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », IX, 1894.

Perichetini nuovi o meno noti, « Atti R. Accad. Scienze Torino », XXIX, 1894.

Contributo allo studio dei Terricoli neotropicali, « Mem. R. Accad. Scienze Torino », (2), XLV, 1895.

Allolobophora Dugesii, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », X, 1895.

Nuovi Lombrichi dell'Europa Orientale, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », X, 1895.

I Linfociti degli Oligocheti, ricerche istologiche, « Mem. R. Accad. Scienze Torino », (2), XLV, 1896.

I Lombrichi raccolti a Sumatra da E. Modigliani, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), XVI, 1896.

Les lymphocytes des Oligochètes, « Arch. ital. Biol. », XXV, 1896.

I Lombrichi raccolti nelle Is. Mentawei da E. Modigliani, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), XVI, 1896.

Allolobophora tigrina *ed* A. exacystis, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XI, 1896.

Nuovi Lombrichi dell'Europa Orientale (2ª serie), « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XII, 1897.

Descrizione di una n. sp. di Acanthodrilus *delle Is. del Capo Verde,* « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XII, 1897.

Osservazioni su due nuove Microchete, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XI, 1897.

Un nuovo Moniligastride di Sumatra (Desmogaster Schildi), « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), XVII, 1897.

I pretesi rapporti genetici fra i Linfociti ed il Cloragogeno, « Atti R. Accad. Scienze Torino », XXXIII, 1898.

Sur les prétendus rapports génétiques entre les lymphocytes et le chloragogène, « Arch. ital. Biol. », XXX, 1898.

Viaggio di L. Loria nella Papuasia. 21, Terricoli, « Ann. Mus. Civ. Storia Nat. Genova », (2), XIX, 1898.

On some new Earthworms in the British Museum, « Ann. Mag. Nat. Hist. » (7), II, 1898.

Descrizione della Microchaeta Pentheri, n. sp., « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XIII, 1898.

La Riduzione progressiva della Variabilità e i suoi rapporti coll'estinzione e coll'origine delle specie, Torino, 1899.

Faune de la Roumanie: Lombriciens, « Boll. Soc. Scientif. Bukarest », VIII, 1899.

Geoscolex Bergi, n. sp., « Comunic. Mus. Nacion. Buenos Aires », I, 1900.

La réduction progressive de la variabilité et ses rapports avec l'extintion et avec l'origine des espèces, « Arch. ital. Biol. », XXXIII, 1900.

Oligochètes de l'Archipel Malais, « Rev. Suisse Zoologie », IX, 1901.

Un Lombrico cavernicolo (Allolobophora spelaea, n. sp.), « Atti Soc. Naturalisti Modena », (4), IV, 1901.

Gli Oligocheti raccolti in Patagonia da F. Silvestri, « Atti Soc. Nat. Modena », (4), IV, 1901.

Il Cloragogo tipico degli Oligocheti, « Mem. R. Accad. Scienze Torino », (2), LII, 1902.

Il Rev. Padre Kircher trasformista, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XVII, 1902.

Nefridii di Rotifero in giovani Lombrichi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XVIII, 1903.

Il canale neurenterico ed il blastoporo anale, contributo alla teoria della Gastrea, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XVIII, 1903.

Le valvole dei vasi dei Lombrichi, « Arch. Zool. Ital. », I, 1903.

*L'*Allolobophora nematogena, n. sp., *e i suoi speciali linfociti,* « Atti Soc. Nat. Modena », (4), V, 1903.

Die progressive Reduktion der Variabilität und ihre Beziehungen zum Aussterhen und zur Entstehung der Arten (ubersetz. H. Bosshard), Jena, 1903.
Le valvole dei vasi dei Lombrichi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XVIII, 1903.
*L'*Allolobophora minuscula, n. sp., « Atti Soc. Natur. Mat. Modena », (4), VII, 1905.
Es gibt ein Gesetz der progressiven Reduktion der Variabilität, Erwiderung an Hern Professor L. Plate, « Biol. Centralbl. », XXV, 1905.
Vi è una legge della riduzione progressiva della variabilità, « Biologica », I, 1906.
Pio Mingazzini, « Annuar. R. Ist. Studi prat. e perfez. Firenze », 1906.
Descrizione della Neumaniella Andreini, *nuovo megascolicide dell'Eritrea*, « Mon. Zool. ital. », XVIII, 1906.
Nota sui Lombrichi ricordati da Stefano Delle Chiaie, « Annuar. Mus. Zool. Napoli », (n. s.), 2, 1906.
*Sui nefridi con sbocco intestinale comune dell'*Allolobophora Antipae *Mich.*, « Arch. Zool. ital. », III, 1906.
Diagnosi preliminari di nuovi Tomopteridi raccolti dalla R. N. « Liguria », « Monit. Zool. ital. », XVIII, 1907.
Nuove specie di Tomopteridi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XXIII, 1908.
Delle leggi che reggono la variabilità filogenetica, « Scientia », IV, 1908.
Tomopteridi, *raccolte planctoniche fatte dalla R. Nave « Liguria » nel viaggio di circumnavigazione del 1903-05*, V, 1908.
Saggio di una nuova spiegazione dell'origine e della distribuzione geografica delle specie (Ipotesi dell'Ologenesi), « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XXIV, 1909.
Il valore filogenetico della neotenia, « Biologica », II, 1909.
Il Lamarckismo e le farfalle, « Bull. Soc. entom. ital. », XLII, 1910.
L'opera zoologica di E. N. Giglioli, « Bull. Soc. entom. ital. », XLI, 1910.
I dilemmi fondamentali circa il metodo dell'evoluzione, « Atti Soc. ital. Progr. Sc., », 1911, e « Scientia », XI, 1912.
A proposito di « Ologenesi ». Risposta al Prof. Federico Raffaele, « Monit. Zool. ital. », XXIII, 1912.
Nota sui Tomopteridi dell'Adriatico raccolti dalle RR. NN. « Montebello » e « Ciclope », « Mem. R. Comit. talass. ital. », XX, 1912.
L'Arca di Noè e l'Evoluzione, « Annuar. R. Ist. Studi Sup. Firenze », 1913 e « Confeferenze e Prolusioni », VIII, 1913.
La dissimmetria dei Phyla *gemelli*, « Monit. Zool. ital. », XXVI, 1915.
Sulla classificazione dei Vermi, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XXXI, 1916.
Ologenesi. Nuova teoria dell'evoluzione e della distribuzione geografica dei viventi, Firenze, 1918.
Annotazioni alla « Ologenesi ». I. La selezione fra specie affini e la Biogeografia, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino », XXXIV, 1919.
Un'obbiezione di Carlo Emery contro l'Ologenesi, « Riv. Biol. », II, 1920.
Lorenzo Camerano, « Annuar. R. Univers. Torino », 1919-1920.
Lista di Oligocheti del Modenese, « Atti Soc. Natur. Matem. Modena », (5), V, 1920.
Qu'est ce que l'Hologénèse?, « Scientia », 1923.
Sulla necessità di carte anadiomeniche e catabatiche in sussidio della biogeografia, « Atti R. Accad. Scienze Torino », LIX, 1924.
La teoria dell'evoluzione, « Annuar. R. Univers. Modena », 1925.
Sull'orientamento dei primi stadii nei Cordati, « Atti R. Accad. Scienze Torino », LX, 1925.

Tommaso Salvadori, « Atti R. Accad. Scienze Torino », LXI, 1926.
Una possibile variante dell'Ologenesi, « Rend. R. Accad. naz. Lincei », Ce. Sc. fis. mat. nat., (6), V, 1927.
Il valore della legge biogenetica, « Scientia », 1928.
L'Antropologia ologenetica. (A proposito di un libro di G. Montandon), « Riv. Biol. », XI, 1929.
Biogenetica, Legge, « Enciclopedia italiana », VII, 1930.
L'Ologénèse. Nouvelle théorie de l'evolution et de la distribution géographique des êtres vivants, Paris, 1931.
Evoluzione, « Enciclopedia italiana », XIV, 1932.
Les endémismes et l'ologénèse. À propos d'une objection de M. Caullery, « Rev. scient. », Paris, 1933.
Le due strade della biologia pura, « Riv. Biol. », XV, 1933.
Chiosa scientifica alla rappresentazione dei Campi Elisi di Virgilio, « Convivium », 1940.
[Colosi, G., *Una postilla all'Ologenesi*, « Atti Accad. Scienze Torino », LXXIX, 1944. (Contiene un brano inedito di D. Rosa, ove è chiarito il possibile processo di formazione di caratteri contrapponibili al momento delle dicotomie filogenetiche)].

INTERFERENZA DI UN GETTO FLUIDO LATERALE CON UNA CORRENTE IPERSONICA (*)

Memoria del Socio nazionale residente CARLO FERRARI
presentata nell'adunanza del 3 Maggio 1961

Riassunto. — *L'A. studia l'influenza che un getto gassoso uscente da un ugello posto entro un corpo cilindrico circolare investito da una corrente uniforme ipersonica ha sul campo di moto attorno al corpo stesso, collo scopo di determinare la* penetrazione *del getto nella corrente esterna, e la forza indotta sul solido cilindrico. Nella ricerca il fluido è considerato come* perfetto; *si è poi assunto che la forma della sezione trasversale del getto vari in modo affine lungo l'asse mentre per la determinazione dell'onda d'urto che si forma a monte del getto si è fatto ricorso alle ipotesi di Lighthill. Le ipotesi fatte consentono di soddisfare alla condizione che le pressioni delle correnti esterna ed interna al getto in corrispondenza di questo siano uguali solo per quanto si riferisce ai* valori medi *delle pressioni sul contorno. In vicinanza dell'orificio dell'ugello, che è supposto semplicemente convergente, è possibile però con mezzi semplici determinare in base appunto alla condizione relativa della pressione, la legge effettiva di variazione della sezione trasversale del getto.*

Sono posti infine a raffronto i risultati ottenuti colla presente teoria con quelli ottenuti sperimentalmente all'Università del Michigan ed indicate le ragioni che spiegano il divario quantitativo tra i risultati stessi.

1. - Introduzione.

Il problema qui considerato è relativo ad un getto gassoso che esce da un ugello posto entro un corpo cilindrico circolare investito da una corrente uniforme ad alto numero di Mach (corrente ipersonica) di velocità U_∞ parallela all'asse del cilindro; l'asse dell'ugello è supposto per-

(*) Comunicazione presentata al Convegno Internazionale di Meccanica Applicata (Stresa 1960).

La presente ricerca è stata fatta per conto dello «Applied Physics Laboratory» della «Johns Hopkins University», sotto il patrocinio dello «U. S. Navy Bureau of Weapons - Contract Nord 7386».

pendicolare a $\boldsymbol{U}_\infty$. Scopo della ricerca è quello di determinare la *penetrazione* del getto nella corrente esterna, e pertanto la linea secondo cui si dispone l'asse del getto stesso, e la forza normale a $\boldsymbol{U}_\infty$ indotta da questo sul corpo cilindrico: la conoscenza di detta penetrazione è indispensabile, perché potendo i gas eiettati essere ad alta temperatura è necessario assicurarsi che essi non vengano a contatto colle pareti di corpi solidi (come quelle di eventuali piani stabilizzatori, o dello stesso corpo cilindrico portante l'ugello), mentre il calcolo della forza su detto corpo è necessario per determinare l'efficacia del getto come mezzo atto a produrre forze di controllo e di comando sopra aerei o missili volanti a quote così elevate che gli ordinari piani di controllo non possono produrre azioni sufficienti. La soluzione esatta del problema presenta difficoltà enormi: per ottenere risultati che siano sufficientemente informativi senza che questo richieda calcoli eccessivamente laboriosi, è necessario ridurre il fenomeno reale a uno schema più semplice; così in questa ricerca si è supposto il fluido *perfetto*. In conseguenza di questa ipotesi, la parte del corpo influenzata dal getto, a monte di questo, si riduce alla regione compresa tra l'onda d'urto *staccata* e la superficie delimitante il getto, che se la corrente esterna è ipersonica ha una piccola estensione: la legge di distribuzione della pressione sul corpo è perciò alquanto diversa da quella che si deve verificare nel fluido reale, poiché in questo, per effetto della trasmissione dell'incremento di pressione dovuto all'onda d'urto lungo lo strato limite, la regione influenzata risulta di area alquanto più grande, specialmente se il deflusso è laminare. Per contro, producendosi distacco della vena per effetto di questo incremento di pressione, la pressione che il fluido è capace di acquistare entro lo strato limite a monte del getto è alquanto minore di quella che si calcola nell'ipotesi di fluido perfetto, di guisa che per quanto si riferisce al calcolo della forza totale indotta sul corpo sembra probabile che quella qui ottenuta non debba essere molto in disaccordo con quella data dagli esperimenti: in effetto anche gli esperimenti in corrente supersonica [1] sembrano mostrare una certa compensazione tra i due effetti corrispondenti alla grandezza dell'area influenzata e alla grandezza della pressione in essa, in quanto i risultati per deflusso laminare e deflusso turbolento sembrano assai poco diversi tra loro.

L'ipotesi di fluido perfetto porta poi a non considerare alcun fenomeno di rimescolamento tra la corrente esterna e quella del getto, fenomeno che indubbiamente influenza anche la pressione nella zona del corpo a valle del getto; se però l'ugello è posto, come spesso avviene, molto vicino all'estremità di poppa del corpo stesso, la regione così influenzata risulta di limitatissima estensione e pertanto l'effetto corrispondente minimo.

Pure nell'ipotesi di fluido perfetto la determinazione dell'onda d'urto staccata è problema che presenta difficoltà gravissime; si è pertanto qui

fatto ricorso alle ipotesi di Lighthill [2] in problema analogo, se pure meno complesso, e già utilizzate da Whitham [3].

Altre semplificazioni sono state apportate per ottenere la forma che assume la linea d'asse del getto: in questo studio non è stato determinato il flusso in tutta la regione racchiusa dalla superficie che delimita il getto, ma ci si è limitati a calcolare i *valori medi* delle varie grandezze che presentano interesse nel problema; si è poi supposto che la *forma* della sezione normale del getto si conservi *affine* lungo il getto stesso.

Le ipotesi fatte consentono di soddisfare alla condizione che le pressioni delle correnti esterna ed interna al getto in corrispondenza di questo siano uguali solo per quanto si riferisce ai *valori medi* delle pressioni sul contorno. In vicinanza dell'orificio dell'ugello, che è supposto semplicemente convergente, è possibile però con mezzi semplici determinare, in base appunto alla condizione relativa alla pressione, come si modifica la forma della sezione trasversale del getto.

2. - Elenco dei principali simboli usati.

a lunghezza tipica introdotta nella definizione delle coordinate toroidali [equazione (85) - parte II].

a' lunghezza tipica introdotta nella definizione delle coordinate toroidali [equaz. (107) - parte II].

$-a_0$ ascissa del punto intersezione del semiasse negativo delle X col contorno di una generica sezione trasversale del getto.

A_0, A_1, A_2 costanti definite dalle equaz. (22).

b $= \tau/l^2$.

c'_f, c''_f coefficienti definiti dalle equaz. (16).

f funzione che definisce il contorno della sezione trasversale del getto.

f_1, f_2, f_3 funzioni che dànno le componenti u_α; u_β; u_Φ, della velocità definite dalle equaz. (96).

f_4, f_5, f_6 funzioni che dànno le componenti della velocità u_α; u_β; u_Φ, definite dalla equaz. (96').

F_1 funzione di ζ usata nell'equaz. (67) per rappresentare la funzione di corrente.

$F_{g,e}$ forza di reazione diretta del getto sul fuso.

F_y forza indotta dal getto sulla superficie rigida (da cui effluisce il getto) supposto piana.

F_y^* forza indotta da un getto toroidale sul fuso cilindrico.

F_y^{**} forza indotta da un getto toroidale sopra una parete piana.

$h_\alpha, h_\beta, h_\Phi$ fattori di scala definiti dalle equaz. (88').

$h'_\alpha, h'_\beta, h'_\Phi$ grandezze collegate coi fattori di scala definiti dalle equaz. (88).

l lunghezza caratteristica di riferimento nella direzione x per una sezione trasversale del getto.

l_0 semiasse minore dell'ellisse $\mathfrak{E}_1$, che è assunta come sezione rappresentativa del getto.

m portata massica del getto.

M_∞ numero di Mach della corrente esterna indisturbata.

p pressione.

$\bar{p}$ pressione media in una sezione trasversale del getto.

$(\bar{p})_0$ pressione media calcolata colla (40).

p_∞ pressione della corrente esterna indisturbata.

P funzione della pressione definita dalla equaz. (36).

r_0 raggio dell'orificio circolare da cui il getto fluisce.

R lunghezza caratteristica di riferimento per una sezione trasversale del getto nella direzione dell'asse z; coincide col semiasse maggiore dell'ellisse assunta come sezione del getto stesso.

R_b raggio del corpo cilindrico da cui il getto esce.

R_c raggio di curvatura della ellisse $\mathfrak{E}_1$ nel punto O^* dell'asse minore $\left(R_c = \dfrac{R^2}{l_0}\right)$.

R_u raggio del cerchio sezione della superficie torica $(\mathfrak{T}_c^*)$ che è superficie dell'onda d'urto per getto torico circolare.

R_0 raggio di curvatura della sezione effettiva del getto a piccola distanza dall'orificio nel punto corrispondente a $\varphi = \pi$.

R_1^* raggio di curvatura della linea media L in corrispondenza del suo punto iniziale.

R_α, R_β, R_Φ raggi di curvatura delle linee (β = cost.; Φ = cost.); (α = cost.; Φ = cost.); e (α = cost.; β = cost.) nel sistema di coordinate toroidali.

R_μ, R_ζ raggi di curvatura delle linee coordinate nel sistema di coordinate ellittiche.

s ascissa curvilinea sulla linea media L.

T temperatura assoluta.

$T_{0,g}$ temperatura d'arresto della corrente interna al getto.

$\bar{T}$ temperatura media nella sezione trasversale del getto.

u_α, u_β, u_Φ componenti della velocità nelle direzioni delle linee coordinate nel sistema di coordinate toroidali (α, β, Φ).

$u_{\alpha'}$, $u_{\beta'}$, $u_{\Phi'}$ componenti della velocità nelle direzioni delle linee coordinate nel sistema di coordinate toroidali (α', β', Φ').

u_μ, u_ζ componenti della velocità nelle direzioni delle linee coordinate nel sistema di coordinate ellittiche.

$\boldsymbol{U}_\infty$ velocità della corrente esterna indisturbata.

x	asse coordinato nella direzione e nel senso di $\boldsymbol{U}_\infty$.
y	asse coordinato normale a $\boldsymbol{U}_\infty$ nel piano a cui appartiene la linea L media del getto.
z	asse coordinato normale al piano (x, y): l'origine delle coordinate è assunta in punti diversi nelle parti I e II.
x_0, y_0	coordinate di un punto generico della L.
X	asse coordinato nel piano (x, y) normale alla z in un suo punto generico;
$\boldsymbol{W}$	velocità della corrente interna al getto.
α_1	valore della coordinata toroidale α sulla superficie del getto.
α_u	valore della coordinata toroidale α sulla superficie d'urto.
α, β, Φ	coordinate toroidali definite dall'equazione (85).
α', β', Φ'	coordinate toroidali definite dall'equazione (107).
γ	rapporto dei calori specifici a pressione e a volume costante per la corrente esterna.
γ'	rapporto dei calori specifici per la corrente interna al getto.
δ	distanza (sull'asse x) tra le sezioni trasversali dell'onda d'urto e del getto.
θ	angolo che la tangente alla linea media L forma coll'asse x.
μ_1, μ_2	linee coordinate intersecate sulla superficie del getto rispettivamente per $s =$ cost. e $X =$ cost.
μ, ζ	coordinate ellittiche per il flusso bidimensionale attorno al getto cilindrico.
ν	angolo di deviazione dall'asse y delle linee di corrente delimitanti la superficie del getto in corrispondenza dell'orificio.
ξ_0, η_0	rispettivamente uguali a x_0/l; y_0/l.
ϱ	densità.
$\bar{\varrho}$	densità media della sezione trasversale generica del getto.
ϱ_∞	densità della corrente esterna indisturbata.
$d\sigma$	uguale a ds/l.
τ	area della sezione trasversale del getto.
φ	anomalia di un punto generico del cerchio costituente l'orificio da cui esce il getto.
$\boldsymbol{\Phi}$	forza, per unità di lunghezza lungo l'asse del getto, esercitata dalla corrente esterna sulla superficie del getto.
Φ_t, Φ_n	componenti della $\boldsymbol{\Phi}$ rispettivamente secondo la tangente e secondo la normale [nel piano (x, y)] alla linea L.
ψ	funzione di corrente.
ω	vorticità.

PARTE PRIMA

DETERMINAZIONE DELLA FORMA DELLA LINEA D'ASSE DEL GETTO E DELLA SUA PENETRAZIONE NELLA CORRENTE ESTERNA

3. - Equazioni generali.

Si definisce la configurazione geometrica del getto assegnando una linea L e associando a ciascun punto G di L un'area τ, che è l'area della sezione Σ del getto normale alla L stessa, mentre G è il baricentro di detta sezione. Indicando con $\bar{p}$ la *pressione media* del gas in una sezione generica Σ, ovviamente data dalla

$$(1) \qquad \bar{p} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} p d\Sigma$$

se $d\Sigma$ è un elemento superficiale di τ, con $\mathbf{\Phi}$ la *forza unitaria risultante* sulla superficie che delimita il getto, corrispondente alla pressione che la corrente esterna esercita in ogni punto di detta superficie, (di guisa che $\mathbf{\Phi} ds$ è la forza esercitata sopra l'elemento fluido $d\mathfrak{D}$ compreso tra due sezioni normali a L che staccano su L un elemento di lunghezza ds), l'equazione della quantità di moto per detto elemento $d\mathfrak{D}$ si può scrivere nella forma

$$(2) \qquad -\frac{d}{ds} [(\bar{p}\tau + \tau\overline{\varrho W^2})\boldsymbol{t}] + \mathbf{\Phi} = 0$$

essendo ϱ la densità, W la velocità del gas in un punto generico di Σ, e $\overline{\varrho W^2}$ il valor medio di ϱW^2 in Σ (definito da una relazione analoga alla (1)), mentre $\boldsymbol{t}$ è il versore della tangente alla L. Si fa l'ipotesi, in questa come nelle altre equazioni, che la velocità $\boldsymbol{W}$ in ogni punto della sezione Σ formi colla tangente alla L nel punto G di Σ un angolo δ così piccolo, che sia lecito porre, *generalmente*, $\cos \delta \cong 1$.

È appena il caso poi di osservare [4] come la (2) coincida coll'equazione che definisce l'equilibrio statico di un filo flessibile e inestensibile soggetto a una forza unitaria $\boldsymbol{\Phi}$ e a una tensione

$$\boldsymbol{T} = \tau(\bar{p} + \overline{\varrho W^2})\boldsymbol{t} .$$

Se poi si indica con γ' il rapporto dei calori specifici $\frac{c_p}{c_v}$ per il gas fluente nel getto, l'equazione dell'energia risulta

$$(3) \qquad \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \bar{p} + \frac{1}{2} \overline{\varrho W^2} = \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \frac{p_{0,g}}{\varrho_{0,g}} \bar{\varrho}$$

se $p_{0,g}$ e $\varrho_{0,g}$ sono rispettivamente la pressione d'arresto e la densità di arresto del gas nel getto, e $\bar{\varrho}$ il valor medio di ϱ in Σ. Si ha infine l'equazione che esprime la costanza della portata di massa fluente attraverso ad una sezione trasversale generica

$$(4) \qquad \tau\overline{\varrho W} = \text{costante} = m .$$

Assunto nel piano contenente la L un sistema di assi x e y (x nella direzione e nel senso della $\boldsymbol{U}_\infty$) e poste le equazioni parametriche della L nella forma

$$(5) \qquad x = x_0(s) ; \qquad y = y_0(s)$$

in cui s è l'ascissa curvilinea sulla L, si fa l'ipotesi che la forma della sezione trasversale del getto si conservi *affine* lungo la L, e si assume perciò l'equazione della linea $\mathfrak{C}$ contorno di detta sezione data dalla

$$(6) \qquad z = Rf\left(\frac{X}{l}\right)$$

in cui $l = l(s)$ è la lunghezza del segmento intercettato da detto contorno sulla retta normale a L nel piano (x, y), mentre X è l'ascissa misurata lungo questa retta orientata verso l'*interno* della regione delimitata dalla L stessa, rispetto a G come origine; ed infine R è la dimensione caratteristica secondo z della sezione trasversale. Le equazioni parametriche della superficie che limita il getto risultano così:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_0 + X\dot{y}_0 ; \qquad y = y_0 - X\dot{x}_0 ; \\ z = Rf(X/l) \qquad [-a_0 \leq X \leq l - a_0 ; \quad 0 \leq s \leq \infty] \end{cases}$$

in cui $\dot{x}_0 = \frac{dx_0}{ds}$; $\dot{y}_0 = \frac{dy_0}{ds}$, mentre $-a_0$ è l'ascissa intercettata sul semiasse negativo delle X dal contorno di Σ.

Si ammette che siano verificate le condizioni per le quali ad ogni terna di valori di s ($0 \leq s \leq \infty$), di $X(-a_0 \leq X \leq l - a_0)$, e di z ($-Rf \leq \leq z \leq Rf$) corrisponde uno ed un solo punto della regione tubolare delimitata dalla superficie (7); questo impone che in ogni punto G della L, il raggio di curvatura sia maggiore del valore $l - a_0$ di X, corrispondente alla sezione Σ per detto punto G. Si assume poi R costante lungo tutto il getto.

La superficie (7) è una *superficie di corrente* nel campo della corrente esterna $\boldsymbol{U}_\infty$, e mentre essa è una *superficie di discontinuità* della velocità (*superficie vorticosa*) la pressione è invece attraverso ad essa *continua*. L'ipotesi fatta però circa alla forma della sezione trasversale, corrispondente alla (6), non permette di soddisfare detta condizione che in media, come già indicato nella introduzione.

4. - Determinazione della forza unitaria $\boldsymbol{\Phi}$: corrente esterna ipersonica.

Per la determinazione della L dalle equazioni sopra scritte è innanzi tutto necessario ottenere l'espressione generale della forza unitaria $\boldsymbol{\Phi}$: questo è particolarmente semplice se si considera il caso della corrente esterna ipersonica, e si ammette di poter applicare la teoria del *flusso Newtoniano* per il calcolo delle pressioni: dai risultati sperimentali di J. A. Penland [5] appare che tale ipotesi conduce a risultati abbastanza soddisfacenti già per numeri di Mach di poco superiori a 5, specialmente se si corregge il coefficiente del coseno quadrato dell'angolo di deviazione della velocità in modo da riportare il valore della pressione d'arresto al valore corrispondente alla corrente ipersonica con γ uguale al valore effettivo. Si assume di conseguenza:

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\varrho_\infty U_\infty^2} \cong \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\left(1 - \frac{2}{\gamma+3}\frac{1}{M_\infty^2}\right)\cos^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) \cong \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\cos^2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) \tag{8}$$

se $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie del getto, e $\boldsymbol{i}$ il versore dell'asse x. Ora, dalle equazioni (7) della superficie che limita il getto appare che i parametri direttori della tangente ad una generica linea $X = cost.$ della superficie stessa sono dati dalle

$$\begin{gathered} x_s = \dot{x}_0 + X\ddot{y}_0; \qquad y_s = \dot{y}_0 - X\ddot{x}_0; \\ z_s = -\frac{R}{l}\frac{X}{l}\dot{l}\cdot f = -\dot{l}F(X/l) \end{gathered} \tag{9}$$

in cui si è posto

$$\dot{l} = \frac{dl}{ds}\,; \qquad \dot{f} = \frac{df}{d(X/l)}\,; \qquad x_s = \frac{\partial x}{\partial s}\,; \qquad y_s = \frac{\partial y}{\partial s}\,;$$

$$z_s = \frac{\partial z}{\partial s}\,; \qquad \ddot{x}_0 = \frac{d^2 x_0}{ds^2}\,; \qquad \ddot{y}_0 = \frac{d^2 y_0}{ds^2}\,;$$

mentre è

$$F = \frac{R}{l}\frac{X}{l}\dot{f}\,. \tag{10}$$

Appare pure dalle (7) che i parametri direttori della tangente ad una generica linea $s = cost.$ della superficie (7) sono dati dalle

$$x_X = \frac{\partial x}{\partial X} = \dot{y}_0; \qquad y_X = \frac{\partial y}{\partial X} = -\,\dot{x}_0; \qquad z_X = \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{R}{l}\dot{f}\,. \tag{11}$$

I parametri direttori di $\boldsymbol{n}$ risultano di conseguenza:

$$\frac{R}{l}(\dot{y}_0 - X\ddot{x}_0)\dot{f} - \dot{x}_0\dot{l}F; \; -\dot{y}_0\dot{l}F - \dot{f}(\dot{x}_0 + X\ddot{y}_0)\frac{R}{l}\,; \tag{12}$$
$$-\,\dot{x}_0(\dot{x}_0 + X\ddot{y}_0) - \dot{y}_0(\dot{y}_0 - X\ddot{x}_0)$$

e perciò si ha:

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}) = \frac{\dfrac{R}{l}\dot{f}\left(1 + X\dfrac{d\theta}{ds}\right)\sin\theta - F\dot{l}\cos\theta}{\sqrt{F^2\dot{l}^2 + \left(1 + X\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2\left(1 - \dfrac{R^2}{l^2}\dot{f}^2\right)}} \tag{13}$$

in cui si è posto $\dot{x}_0 = \cos\theta$; $\dot{y}_0 = \sin\theta$; si ha:

$$\frac{p - p_\infty}{1/2\varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1}\,\frac{\left[\dfrac{R}{l}\dot{f}\left(1 + X\dfrac{d\theta}{ds}\right)\sin\theta - F\dot{l}\cos\theta\right]^2}{\left(1 + X\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2\left(1 + \dfrac{R^2}{l^2}\dot{f}^2\right) + F^2\dot{l}^2}\,. \tag{14}$$

5. - Calcolo della forza unitaria $\boldsymbol{\Phi}$: caso di l costante.

La determinazione della $\boldsymbol{\Phi}$ è semplice, e il calcolo della L pure risulta particolarmente facile, nel caso di l costante, nel caso cioè in cui si possa

considerare la sezione trasversale del getto *costante*. In queste condizioni infatti la (14) si riduce alla

$$\frac{p - p_\infty}{1/2\varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{R^2}{l^2} \frac{\dot{f}^2}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \sin^2\theta \tag{14'}$$

mentre risulta dalle (12), per $\dot{l} = 0$,

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} = 0$$

ossia, la normale alla superficie delimitante il getto giace nel piano perpendicolare all'asse di questo, e di conseguenza la *forza unitaria* $\boldsymbol{\Phi}$, *per ogni sezione trasversale, è diretta normalmente alla* L.

Se ora si considera il tratto Λ di getto compreso tra due sezioni normali a L e corrispondenti ai valori s e $s + ds$ della ascissa curvilinea sulla L stessa, la forza che agisce sopra l'elemento di superficie $d\mu_1\, d\mu_2$ (essendo $d\mu_1$ un elemento di linea $s = cost.$ appartenente al tratto Λ sopra indicato e $d\mu_2$ un elemento di linea $X = cost.$ pure appartenente a Λ), dovuta alla variazione di pressione $p - p_\infty$, ha una componente secondo la retta normale alla L nel piano (x, y) data dalla

$$(p - p_\infty) d\mu_1 d\mu_2 \frac{dz}{d\mu_1} = (p - p_\infty) dz ds \left(1 + X \frac{d\theta}{ds}\right)$$

essendo $d\mu_2 = ds\left(1 + X \frac{d\theta}{ds}\right)$. Ne risulta perciò:

$$\Phi = 2 \int_{-a_0}^{X_0} (p - p_\infty)\left(1 + X \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{dz}{dX} dX \tag{15}$$

indicando con X_0 il valore di X per il quale si ha $\dot{f} = 0$. In grazia della (14') risulta

$$\Phi = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \varrho_\infty U_\infty^2 l \frac{R^3}{l^3} \left[\int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{\dot{f}^3}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2} d(X/l) + \right. \tag{15'}$$

$$\left. + \frac{d\theta}{ds} l \int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{\dot{f}^3}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2} \frac{X}{l} d(X/l) \right] \sin^2\theta =$$

$$= \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \varrho_\infty U_\infty^2 l \left(c_f' + l \frac{d\theta}{ds} c_f''\right) \sin^2\theta$$

avendo posto

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} c_f' &= \frac{R^3}{l^3}\int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{\dot{f}^3}{1+\dfrac{R^2}{l^2}\dot{f}^2}\, d(X/l) \\ c_f'' &= \frac{R^3}{l^3}\int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{\dot{f}^3}{1+\dfrac{R^2}{l^2}\dot{f}^2}\,\frac{X}{l}\, d(X/l) \end{aligned}\right.$$

6. - Determinazione della configurazione del getto nell'ipotesi $l = \text{cost.}$

In grazia dei risultati ottenuti nel n. precedente dalla (2) si deduce:

$$(17)\qquad \frac{d}{ds}\left(\bar{p}\tau + \overline{\varrho W^2 \tau}\right) = 0$$

e quindi

$$(17')\qquad \bar{p}\tau + \overline{\varrho W^2}\tau = \text{costante} = \frac{m}{\overline{\varrho W}}\left(\bar{p} + \overline{\varrho W^2}\right)$$

tenendo conto della (4). Ma è pure per la (3)

$$\overline{\varrho W^2} = \frac{2\gamma'}{\gamma' - 1}\left(\frac{p_{0,g}}{\varrho_{0,g}}\bar{\varrho} - \bar{p}\right)$$

che sostituita nella (17′) dà

$$(18)\qquad \frac{m}{\overline{\varrho W}}\left[\bar{p} + \frac{2\gamma'}{\gamma' - 1}\left(\frac{p_{0,g}}{\varrho_{0,g}}\bar{\varrho} - \bar{p}\right)\right] = \textit{costante}$$

ed anche, essendo $\tau = \textit{cost.}$ nelle condizioni $l = \textit{cost.}$,

$$(18')\qquad \frac{\gamma' p_{0,g}}{\varrho_{0,g}}\bar{\varrho} - \frac{1+\gamma'}{2}\bar{p} = \textit{costante}.$$

Poiché si ha in ogni punto $p = \textit{cost.}\ \varrho^{\gamma'}$, si può, se γ' non differisce molto dall'unità, ritenere $\bar{p} = \bar{\varrho}\cdot\textit{cost.}$, di guisa che dalla (18′) discende

$$(19)\qquad \bar{p} = \textit{cost.}\,; \qquad \bar{\varrho} = \textit{cost.}\,; \qquad \overline{\varrho W^2} = \textit{cost.}\,.$$

Dalla (2) si ha perciò:

$$-\left[\tau(\bar{p} + \overline{\varrho W^2})\right]\frac{d\theta}{ds} - \Phi = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\left(c_f' + l\frac{d\theta}{ds}c_f''\right)\sin^2\theta$$

od anche

$$- \frac{1 + \gamma'}{\gamma' - 1} \frac{\tau \bar{p}}{\varrho_\infty U_\infty^2 l} \frac{\gamma + 1}{\gamma + 3} \left(\frac{2\gamma'}{\gamma' + 1} \frac{T_{0,g}}{\bar{T}_\infty} - 1 \right) \frac{d\theta}{ds} = \tag{20}$$

$$= \left(c_f' + l \frac{d\theta}{ds} c_f'' \right) \sin^2 \theta \, .$$

Nella approssimazione corrispondente all'ipotesi fatta di $l = cost.$ si può ritenere $\bar{p} \cong p_\infty$, di guisa che la (20), posto

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\gamma + 1}{\gamma + 3} \frac{1 + \gamma'}{\gamma' - 1} \frac{\tau p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2 l^2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 3} \frac{1 + \gamma'}{\gamma' - 1} \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\tau}{l^2} = \mathfrak{A}_0 \\ & \frac{2\gamma'}{\gamma' + 1} \frac{T_{0,g}}{\bar{T}_\infty} - 1 = \mathfrak{A}_1 ; \qquad \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 \\ & l d\sigma = ds \end{aligned} \right. \tag{21}$$

si ha:

$$- \mathfrak{A}_2 \frac{d\theta}{ds} = \left(c_f' + c_f'' \frac{d\theta}{ds} \right) \sin^2 \theta \tag{22}$$

od anche

$$- \frac{d\theta}{d\sigma} (\mathfrak{A}_2 + c_f'' \sin^2 \theta) = c_f' \sin^2 \theta \tag{23}$$

che integrata colla condizione $\theta = \pi/2$ per $\sigma = 0$ dà

$$\mathfrak{A}_2 \operatorname{cotg} \theta + c_f''(\pi/2 - \theta) = c_f' \sigma \tag{24}$$

che definisce la configurazione cercata. Per ottenere l'equazione esplicita della L nelle coordinate cartesiane x_0 e y_0 sopra definite basta ricordare che

$$\frac{dx_0}{ds} = \frac{d\xi_0}{d\sigma} = \cos \theta \, , \qquad \text{se} \qquad \xi_0 = \frac{x_0}{l}$$

$$\frac{dy_0}{ds} = \frac{d\eta_0}{d\sigma} = \sin \theta \, , \qquad \text{se} \qquad \eta_0 = \frac{y_0}{l}$$

così che ponendo per $d\sigma$ l'espressione deducibile dalla (23) si ricava:

$$\left| \begin{aligned} & \xi_0 = \frac{1 - \sin \theta}{c_f'} \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\sin \theta} + c_f'' \right) \\ & \eta_0 = \frac{\mathfrak{A}_2}{2 c_f'} \log \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{c_f''}{c_f'} \cos \theta \end{aligned} \right. \tag{25}$$

che dànno le equazioni parametriche della L.

Certamente le ipotesi fatte per ricavare le (25) appaiono molto lontane dalla realtà per un getto uscente da un ugello semplicemente convergente; d'altra parte i risultati corrispondenti alle (25) rappresentano indubbiamente il fenomeno reale, se l'ugello è tale da determinare in esso l'espansione del fluido dalla pressione d'arresto $p_{0,g}$ alla pressione p_∞, e se la corrente esterna non ha un numero di Mach M_∞ molto elevato. Si deve poi osservare che nel caso in cui l'espansione del getto si produce *fuori* dell'ugello in un ambiente in quiete, la sezione del getto varia in modo *quasi periodico*, per viscosità nulla, da un valore minimo, corrispondente all'area dell'orificio, ad un valore massimo, superiore a quello corrispondente all'espansione fino alla pressione ambiente nell'interno dell'ugello; di guisa che l'assunzione prima fatta sembra equivalere a quella di sostituire ad un valore di τ variabile, un valore costante di τ, corrispondente «grosso modo» al suo valore medio.

7. - Penetrazione del getto nella corrente esterna.

Dalle (25) si possono dedurre alcune interessanti proprietà: così, se $\frac{c_f'}{\mathfrak{A}_2} \ll 1$, sia per $\frac{\xi_0 c_f'}{\mathfrak{A}_2} \ll 1$, sia per $\frac{\xi_0 c_f'}{\mathfrak{A}_2} \gg 1$, l'equazione della L può essere posta sotto la forma

$$\frac{y_0}{r_0} = \frac{l}{r_0}\frac{\mathfrak{A}_2}{c_f'} \operatorname{Cosh}\left(1 + \frac{x_0/r_0}{\frac{\mathfrak{A}_2 l}{c_f' r_0}}\right) \tag{26}$$

se r_0 è il raggio dell'orificio da cui esce il getto, e pertanto la linea media risulta essere una *catenaria omogenea* ad asse orizzontale: ricordando l'analogia della equazione del getto con quella di un filo, appare che la tensione del filo corrisponde alla $\mathfrak{A}_2$, mentre il peso per unità di lunghezza corrisponde a $c_f' \frac{r_0}{l}$.

Se si assume la sezione del getto *circolare*, ed il raggio di essa uguale al valore medio tra il raggio *iniziale* r_0 ed il raggio *finale* R_∞, che corrisponde alla espansione completa da $p_{0,g}$ a p_∞, l'equazione della linea media, con una approssimazione entro il 6% per $p_{0,g}/p_\infty \geqq 10$, può essere scritta nella forma, per $\gamma = \gamma' = 1{,}4$

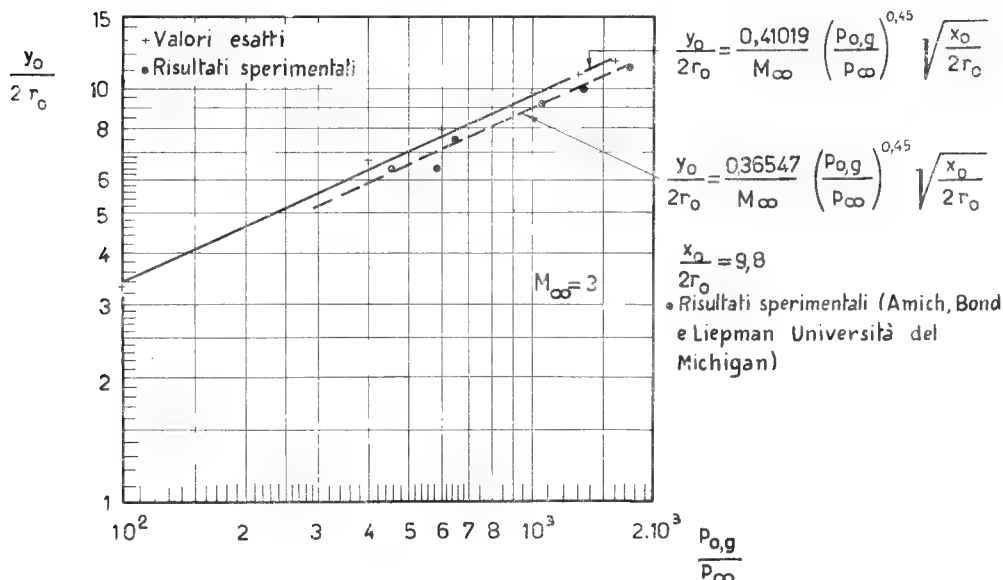
$$\frac{y_0}{2r_0} = \frac{1{,}269}{M_\infty}\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{0{,}32148}\left(1 - \frac{1{,}178}{\mathfrak{A}_2}\right)\sqrt{\frac{x_0}{2r_0}} \tag{26'}$$

od anche, per $p_{0,g}/p_\infty \geqq 100$:

$$\frac{y_0}{2r_0} = \frac{0{,}410191}{M_\infty}\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{0{,}45}\sqrt{\frac{x_0}{2r_0}} \tag{26''}$$

che dà la dipendenza della *penetrazione* del getto dalle tre grandezze caratteristiche M_∞, $p_{0,g}/p_\infty$, $\dfrac{x_0}{r_0}$.

Fig. 1.

« Penetrazione » del getto ad una distanza $\dfrac{x_0}{2r_0} = 9{,}8$ dall'orificio.

Nel diagramma logaritmico riportato in fig. 1 sono indicati con *crocette* (+) i risultati che si ottengono colle (26), non distinguibili da quelli dati dalla (26'), per $\dfrac{x_0}{r_0} = 19{,}6$; $M_\infty = 3$. Nella stessa figura è pure tracciata la linea di equazione (26'') e sono riportati i risultati che si ottengono da quelli sperimentali di Amick, Bond e Liepman [8]: appare da essa che i risultati sperimentali stanno sopra la linea

$$\frac{y}{2r_0} = \frac{0{,}36547}{M_\infty}\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{0{,}45}\sqrt{\frac{x_0}{2r_0}}$$

e pertanto la dipendenza da $p_{0,g}/p_\infty$ dedotta teoricamente risulta confermata, mentre è solo la costante che è leggermente modificata.

Nella fig. 2 è poi mostrata la forma della linea d'asse L calcolata per $\frac{p_{0,g}}{p_\infty} = 400$; $M_\infty = 3$, sempre nell'ipotesi di sezione circolare costante di raggio uguale a quello sopra definito: da essa appare come detta linea si scosti assai poco dalla parabola (26'').

Fig. 2.
Configurazione della linea media del getto.

8. - Caso di l variabile. Calcolo della forza unitaria Φ.

L'ipotesi fatta di l costante, se è molto comoda perché porta facilmente a risultati semplici per quanto si riferisce al calcolo della forma e della penetrazione del getto, ha come conseguenza le (19), che possono essere accettate solo in una prima approssimazione: in effetto, la legge di variazione della pressione sulla superficie del getto lungo l'asse, data dalle (14') (nell'ipotesi $\tau = cost.$) difficilmente sembra conciliabile colla condizione $\overline{p} = costante$. Una ipotesi più aderente alla realtà sembra essere quella corrispondente all'assunzione [1]

$$\overline{p - p_\infty} = \overline{p_c - p_\infty} \tag{27}$$

se p_c è la pressione sul contorno $\mathfrak{C}$ di una generica sezione trasversale, di guisa che la (27) esprime la condizione che il valor medio della pressione nell'interno del getto coincide col valor medio della pressione sul suo contorno. Per riconoscere a quali condizioni la (27) è equivalente si può osservare che dalla (1) deriva la

$$\frac{d}{ds}\left[\int_\Sigma (p - p_\infty) d\Sigma\right] = \frac{d}{ds}\left[\tau(\overline{p - p_\infty})\right] = \left[\frac{d}{ds}\,(\overline{p - p_\infty})\right]\tau + (\overline{p - p_\infty})\cdot \tag{27'}$$

$$\cdot\frac{d\tau}{ds} = \int_\Sigma \frac{d}{ds}\,(p - p_\infty)d\Sigma + \frac{1}{ds}\int_{\mathfrak{C}} (p_c - p_\infty)\,dv\,d\mu$$

[1] Detta assunzione mi è stata suggerita da una osservazione di A. Signorini contenuta in una Nota a piede di pagina in [4].

se $d\mu$ è un elemento del contorno $\mathfrak{C}$ della sezione Σ, p_c la pressione su detto contorno, $d\nu$ lo spostamento normale a $\mathfrak{C}$ in detta sezione per passare dal contorno di questa al contorno della sezione di ascissa $s + ds$. Ora nell'ipotesi che la distribuzione delle pressioni all'interno del getto soddisfi alla

$$\int_\Sigma \frac{d}{ds}(p - p_\infty)d\Sigma = \tau\left[\frac{d}{ds}(\overline{p - p_\infty})\right]$$

essendo

$$\int_{\mathfrak{C}}(p_c - p_\infty)d\nu d\mu = (\overline{p_c^* - p_\infty})\int_{\mathfrak{C}} d\nu d\mu = (\overline{p_c^* - p_\infty})d\tau$$

se $(\overline{p_c^* - p_\infty})$ è un conveniente valore di $p_c - p_\infty$, mentre è $\int_{\mathfrak{C}} d\nu d\mu = d\tau$ si ha

$$\frac{d}{ds}\left[\int_\Sigma (p - p_\infty)d\tau\right] = \tau\frac{d}{ds}(\overline{p - p_\infty}) + (\overline{p_c^* - p_\infty})\frac{d\tau}{ds}$$

che per confronto colla (27') dà $\overline{p - p_\infty} = \overline{p_c^* - p_\infty}$.

Se si fa ora l'ulteriore assunzione che $d\nu$ sia indipendente dalla posizione del punto del contorno $\mathfrak{C}$ nel cui intorno si considera l'elemento $d\mu$; si ha $\overline{p_c^* - p_\infty} = \overline{p_c - p_\infty}$, e quindi la (27).

Nelle condizioni ora indicate, essendo $p_c - p_\infty$ variabile con s secondo la (14), τ (e quindi l) deve pure variare con s: la forza che si esercita sopra un elemento $d\mu_1\, d\mu_2$ di superficie ha di conseguenza una componente secondo $\boldsymbol{t}$ data da

$$d\Phi_t = (\overline{p_c - p_\infty})\frac{d\mu_1}{ds}d\mu_2 \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}) \sin\delta \tag{28}$$

se δ è l'angolo che l'elemento $d\mu_1$, di linea $X = cost.$ forma coll'elemento $d\mu_2$ di linea $s = cost.$

Ora dalle (7) risulta:

$$d\mu_1 = \left[\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + l^2F^2\right]^{1/2} ds\,; \qquad d\mu_2 = \left(1 + \frac{R^2}{l^2}f^2\right)^{1/2} dX\,; \tag{29}$$

$$\sin\delta = \left\{\frac{\left(1 + \frac{R^2}{l^2}f^2\right)\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + l^2F^2}{\left(1 + \frac{R^2}{l^2}f^2\right)\left[\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + l^2 + F^2\right]}\right\}^{1/2}$$

da cui

$$d\mu_1 d\mu_2 \sin\delta = ds dX\left[\left(1 + \frac{R^2}{l^2}f^2\right)\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + l^2F^2\right]^{1/2}$$

mentre è

$$(30)\qquad \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}) = \frac{-\dot{l}F}{\left[\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2\left(1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2\right) + F^2\dot{l}^2\right]^{1/2}}$$

di guisa che risulta

$$(28')\qquad d\Phi_t = -\frac{1}{2}\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{\left[\frac{R}{l}\dot{f}\sin\theta\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right) - F\dot{l}\cos\theta\right]^2}{\left(1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2\right)\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + F^2\dot{l}^2}\dot{l}F\,dX$$

da cui si ha

$$(31)\qquad \Phi_t = -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 \dot{l}\int_{-a_0}^{X_0} \frac{\left[\frac{R}{l}\dot{f}\sin\theta\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right) - F\dot{l}\cos\theta\right]^2}{\left(1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2\right)\left(1 + X\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + F^2\dot{l}^2} F\,dX$$

se X_0 è il valore di X per cui $p_c - p_\infty$ [dato dalla (14)] si annulla. Ci si limita ora all'approssimazione corrispondente ad assumere $\dot{l}$ abbastanza piccolo perché i termini quadratici in $\dot{l}$ siano trascurabili a fronte dell'unità. La (31) si riduce allora alla

$$(32)\qquad \Phi_t = -\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\dot{l}\frac{R^2}{l^2}\left[\int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{\dot{f}^2 F}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2} d(X/l)\right]\sin^2\theta$$

Nella stessa approssimazione si può porre sen $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}) = 1$, di guisa che la componente Φ_n risulta data dalla

$$(33)\qquad \Phi_n = \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\frac{R^3}{l^3}\left[\sin^2\theta\int_{-a_0/l}^{X_0/l}\frac{\dot{f}^3}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2} d(X/l) + \right.$$

$$+ \sin^2\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}l\int_{-a_0/l}^{X_0/l}\frac{\dot{f}^3}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2}(X/l)d(X/l) - \sin 2\theta\,\cdot$$

$$\left.\cdot\, l\int_{-a_0/l}^{X_0/l}\frac{\dot{f}^3 X/l}{1 + \frac{R^2}{l^2}\dot{f}^2}d(X/l)\right| = \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\cdot$$

$$\cdot\left|\sin^2\theta\left(c_f' + l\frac{d\theta}{ds}c_f''\right) - \dot{l}c_f''\sin 2\theta\right]$$

9. - Determinazione della linea d'asse del getto per l variabile.

Per le espressioni sopra determinate di Φ_t e di Φ_n si ottiene ora dalla (2)

$$\frac{d}{ds}\left[(\bar{p}+\overline{\varrho W^2})\tau\right] = \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\dot{l}c_f'' \sin^2\theta \tag{34}$$

od anche, tenendo conto dell'equazione dell'energia,

$$\frac{2\gamma'}{\gamma'-1}\frac{d}{ds}\left\{l^2\bar{p}\frac{\tau}{l^2}\left[\left(\frac{p_{0,g}}{\bar{p}}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}} - \frac{\gamma'+1}{2\gamma'}\right]\right\} = \tag{34'}$$

$$= \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\varrho_\infty U_\infty^2 l\dot{l}c_f'' \sin^2\theta\,.$$

La τ/l^2 è, per l'ipotesi fatta sulla legge di variazione della forma della sezione trasversale del getto, una *caratteristica* di forma, e si pone

$$b = \frac{\tau}{l^2}\,. \tag{35}$$

Eseguendo la derivazione indicata a primo membro e raggruppando opportunamente i vari termini si ottiene

$$\dot{l}\left[2bP - \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\frac{\gamma'-1}{2\gamma'}\gamma M_\infty^2 c_f'' \sin^2\theta\right] = -\,lb\frac{dP}{ds} - lP\frac{db}{ds} \tag{35}$$

avendo posto

$$P = \frac{\bar{p}}{p_\infty}\left[\left(\frac{p_{0,g}}{\bar{p}}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}} - \frac{\gamma'+1}{2\gamma'}\right]. \tag{36}$$

Si ha poi, invece della (20), la

$$-\,bl\frac{\gamma'}{\gamma'-1}\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\frac{2}{\gamma M_\infty^2}P\frac{d\theta}{ds} = \left(c_f' + l\frac{d\theta}{ds}c_f''\right)\sin^2\theta - \dot{l}c_f''\sin 2\theta$$

od anche

$$-\left[b\frac{\gamma'}{\gamma'-1}\frac{\gamma+1}{\gamma+3}\frac{2P}{\gamma M_\infty^2} + c_f''\sin^2\theta\right]l\frac{d\theta}{ds} = \tag{37}$$

$$c_f'\sin^2\theta - \dot{l}c_f''\sin 2\theta\,.$$

Infine dalla (14), tenuto conto della (27) e nella approssimazione sopra indicata relativa all'ordine di grandezza di $\dot{l}$ si ha

$$(38) \qquad \frac{\bar{p}}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma M_\infty^2}{2S} \frac{\gamma+3}{\gamma+1} \frac{R^2}{l^2} \left[\sin^2\theta \int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{j^2}{\left(1+\frac{R^2}{2} j^2\right)^{1/2}} d(X/l) - \right.$$

$$\left. - \dot{l} \sin 2\theta \int_{-a_0/l}^{X_0/l} \frac{j^2}{\left(1+\frac{R^2}{l^2} j^2\right)^{1/2}} \frac{X/l}{1+X\frac{d\theta}{ds}} d(X/l) \right]$$

in cui

$$S = \int_{-a_0/l}^{a_1/l} \sqrt{1+\frac{R^2}{l^2} j^2}\, d(X/l)$$

essendo $-a_0/l \div a_1/l$ l'intervallo di variazione della (X/l) lungo il contorno $\mathfrak{C}$.

Le condizioni ai limiti, che insieme al sistema differenziale sopra indicato, determinano le funzioni incognite $\theta(s)$, $l(s)$, $\bar{p}(s)$ sono poi:

$$(39) \qquad \text{per } s=0: \qquad \theta = \pi/2\,; \qquad \frac{dl}{ds} = 0\,; \qquad l = l_0$$

essendo l_0 il valore di l per una sezione Σ_0, corrispondente ad una espansione dalla pressione $p_{0,g}$ alla pressione $(\bar{p})_{s=0} = (\bar{p})_0$ data, per la (38), dalla

$$(40) \qquad \frac{(\bar{p})_0}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)} \frac{\gamma M_\infty^2}{S} \frac{R^2}{l_0^2} \int_{-a_0/l}^{X_0/l_0} \frac{j^2}{\left(1+\frac{R^2}{l_0^2} j^2\right)^{1/2}} d(X/l_0)\,.$$

Le (35), (36), (37) e (38), colle (39) e (40) permettono di ottenere la linea L e le leggi di variazione di l, e di $\bar{p}/p_\infty$ con procedimento « passo per passo »: supposto infatti di conoscere i valori di l, e di $\bar{p}/p_\infty$ per un certo valore θ_0 di θ, e di avere tracciato l'arco della linea L per il tratto corrispondente all'intervallo $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0$, la (37) consente di calcolare il valore di $d\theta/ds$, e quindi del raggio di curvatura della L per $\theta = \theta_0$, e questo permette pure di ottenere l'arco della L per $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, se θ_1 è un valore di θ abbastanza prossimo a θ_0 perché l'arco corrispondente della L si possa confondere con quello del suo cerchio osculatore; dalla (38) si ottiene

quindi il valore di $\dot{l}$ per $\theta = \theta_0$, ed infine dalla (35) quello di $\frac{dP}{ds}$. Si possono così ricavare i nuovi dati per $\theta = \theta_1$, necessari per continuare il tracciamento della L per $\theta > \theta_1$, e così via.

10. - Determinazione della forma della sezione trasversale del getto.

Sulla superficie Ω delimitante il getto la pressione della corrente esterna e quella della corrente interna hanno necessariamente il medesimo valore, e la condizione di continuità della pressione attraverso Ω determina la forma della sezione trasversale del getto stesso. Questo richiede però il calcolo *completo* della corrente entro Ω, problema che anche colla semplificazione ipersonica per la corrente esterna non può avere che una soluzione numerica e calcoli estremamente laboriosi. È per questo che è stata fatta l'ipotesi corrispondente all'assunzione (6); in conseguenza di essa non è possibile soddisfare alla condizione sopra indicata su tutta la Ω, e ci si deve limitare a richiedere che la condizione stessa sia soddisfatta *in media* sul contorno $\mathfrak{C}$ di ogni sezione trasversale della Ω.

Se ci si limita però a considerare il flusso nelle vicinanze dell'orificio Σ_0 è possibile determinare in modo semplice, in base alla condizione sopra indicata per la pressione, come si modifica, rispetto alla forma di Σ_0, la sezione trasversale del getto.

La velocità in corrispondenza di ogni punto di Σ_0 (pensato appartenente all'ugello) è assunta normale a $\boldsymbol{U}_\infty$ e diretta pertanto secondo y, ed uguale alla velocità critica $W_{cr.} = \sqrt{\frac{\gamma' - 1}{\gamma' + 1} \frac{p_{0,g}}{\varrho_{0,g}}}$; sono però ovvie le varianti che dovrebbero portarsi se si ammettesse che già internamente al corpo cilindrico il fluido si espandesse fino ad una pressione $p_s < p_{cr}$ fissata dalla forma dell'ugello. Si assume infine la forma di Σ_0 circolare di raggio r_0: in un punto generico H di Σ_0, caratterizzato dalla anomalia φ rispetto al centro di Σ_0 come polo e all'asse x come asse polare, il fluido per passare dalla pressione $p_{cr.}$ alla pressione p subisce un'espansione di Prandtl-Mayer, e la deviazione, che si indica qui con ν^*, della direzione di $\boldsymbol{W}$ risulta legata alla pressione dalla

$$(41) \qquad \nu^* = \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\gamma' - 1}\left(\frac{p_{0,g}}{p}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}} - 1}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma'+1}{\gamma'-1}} \arccos\left[1 - (\gamma'+1)\left(\frac{p}{p_{0,g}}\right)^{\frac{\gamma'-1}{2\gamma'}}\right] \quad \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\gamma'+1}{\gamma'-1}}$$

mentre la velocità $\boldsymbol{W}$ in H appartiene al piano (y, H). Le equazioni parametriche della superficie Ω, in vicinanza di Σ_0, si possono perciò scrivere nella forma

$$z = (r_0 + y \operatorname{tg} \nu^*) \sin \varphi \, ; \qquad x = (r_0 + y \operatorname{tg} \nu^*) \cos \varphi \, ; \qquad y = y \, ; \tag{42}$$

in cui ν^* è la funzione di φ che si ricava imponendo la condizione che nei punti H di Σ_0 la pressione sia uguale a quella che vi è determinata dalla

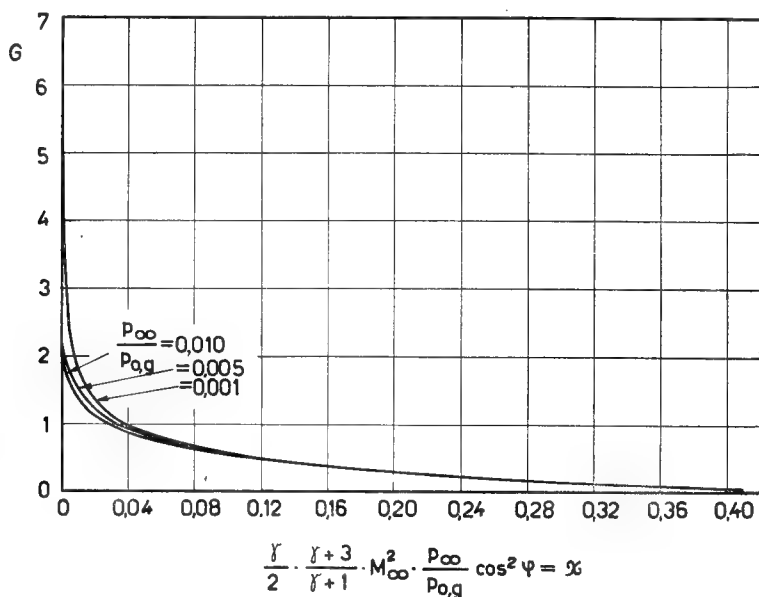



Fig. 3.

Legge di variazione della funzione $G = \operatorname{tang} \nu^*$ in funzione di $\mathfrak{X}$ per diversi valori di $\dfrac{p_\infty}{p_{0,g}}$.

corrente esterna, e che se $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla Ω in H è calcolabile colla

$$\frac{p - p_\infty}{1/2 \varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \cos^2 (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) \, .$$

Ora in H si ha

$$\cos (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) = - \cos \varphi$$

di guisa che si può scrivere

$$\frac{p}{p_{0,g}} = \frac{p_\infty}{p_{0,g}} + \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} M_\infty^2 \frac{p_\infty}{p_{0,g}} \cos^2 \varphi \tag{43}$$

e poiché per la (41) ν^* risulta funzione solo di $(p/p_{0,g})$, appare che ν^* dipende dagli stessi parametri da cui dipende $(p/p_{0,g})$. Si può pertanto scrivere

$$\text{(43')} \qquad \operatorname{tg} \nu^* = G\left(\frac{p_\infty}{p_{0,g}} ; \frac{\gamma(\gamma+3)}{2(\gamma+1)} M_\infty^2 \frac{p_\infty}{p_{0,g}} \cos^2 \varphi \right) = G\left(\frac{p_\infty}{p_{0,g}} ; \mathfrak{X} \right)$$

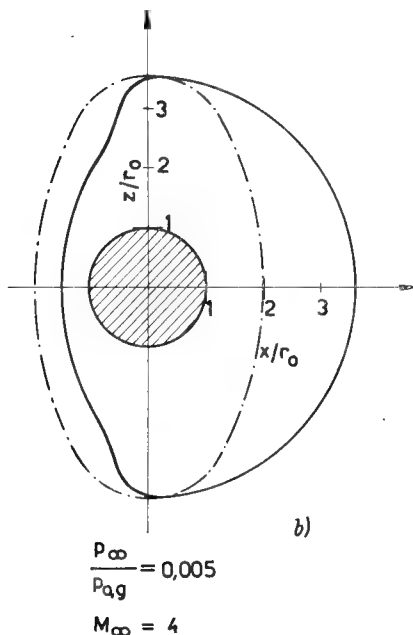
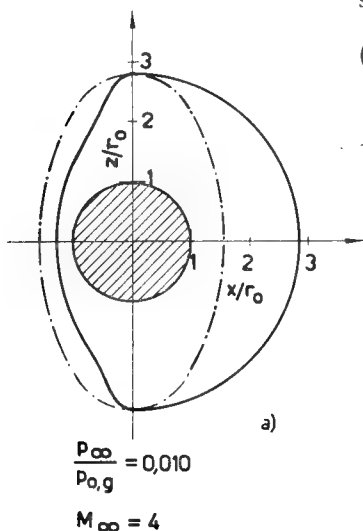



Fig. 4 *a-b*.
Forma della sezione trasversale del getto ad una distanza dell'orificio uguale al raggio di questo per $M_\infty = 4$.

essendo il nuovo parametro $\mathfrak{X}$ definito dalla

$$\mathfrak{X} = \frac{\gamma(\gamma+3)}{2(\gamma+1)} M_\infty^2 \frac{p_\infty}{p_{0,g}} \cos^2 \varphi .$$

La legge di variazione G in funzione di $\mathfrak{X}$ è rappresentata in fig. 3 per diversi valori di $(p_\infty/p_{0,g})$ e per $\gamma = 1{,}4$.

Si assume ora come sezione rappresentativa Σ_r del getto una sezione corrispondente a un valore Δ di y abbastanza piccolo perché per tutto $0 \leq y \leq \Delta$ la Ω si possa considerare rappresentata dalla (42), con $\operatorname{tg} \nu^*$

data dalla (43′), di guisa che si hanno per il contorno della Σ_r le equazioni parametriche

$$z = (r_0 + \Delta \operatorname{tg} \nu^*) \sin \varphi \; ; \qquad x = (r_0 + \Delta \operatorname{tg} \nu^*) \cos \varphi \tag{44}$$

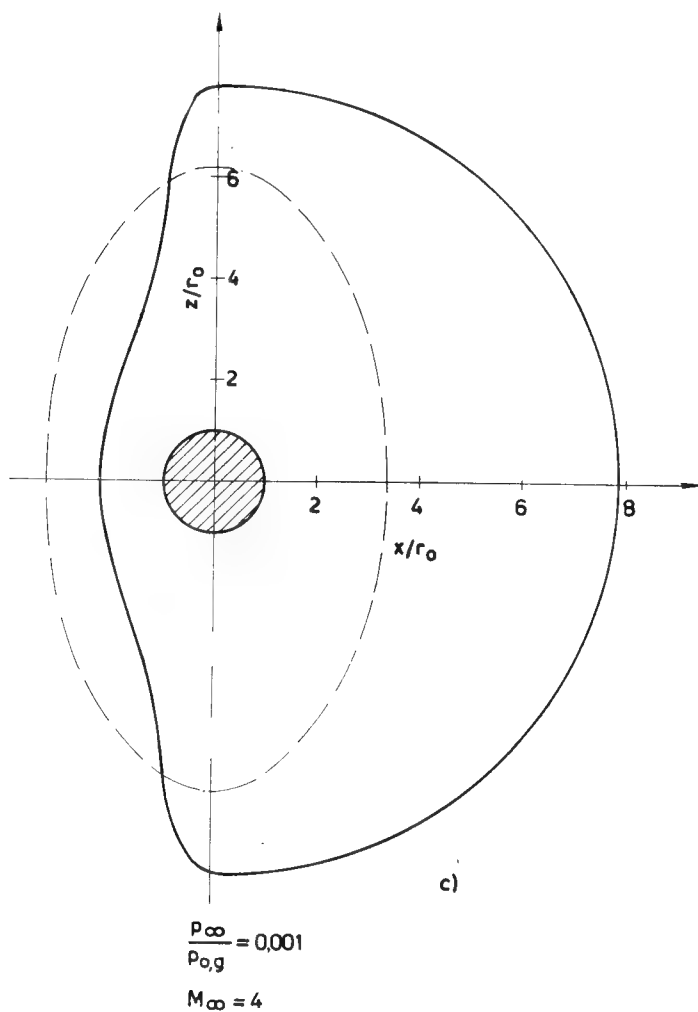



Fig. 4 *c*.

Forma della sezione trasversale del getto ad una distanza dell'orificio uguale al raggio di questo per $M_\infty = 4$

che, in quanto si può assumere per detta sezione $x \equiv X$, definisce la funzione $f(X/l)$ ed il valore di l considerati nei numeri precedenti. Così assumendo $\Delta = \varepsilon r_0$, risulta

$$\begin{cases} z = r_0(1 + \varepsilon \operatorname{tg} \nu^*) \sin \varphi \; ; \\ x = r_0(1 + \varepsilon \operatorname{tg} \nu^*) \cos \varphi \; ; \end{cases} \tag{44'}$$

in cui tg ν^* è da calcolarsi colla (43') per φ compreso tra π e $\pi/2$ mentre è da calcolarsi colla (41), per $p = p_\infty$, per $\pi/2 \geq \varphi \geq 0$.

Per mezzo delle relazioni ora dedotte sono state ricavate le forme della Σ_r, assumendo $\varepsilon = 1$, per $M_\infty = 4; 5; 8$; e per $p_\infty/p_{0,g} = 0{,}010$; $0{,}005$; $0{,}001$. Le Σ_r così ottenute sono date dalle figure 4, 5, 6, in cui è pure segnato l'orificio circolare da cui il getto esce. Da esse appare che

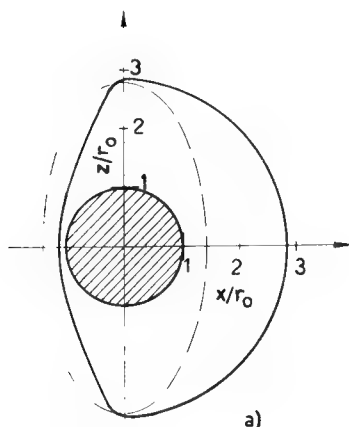
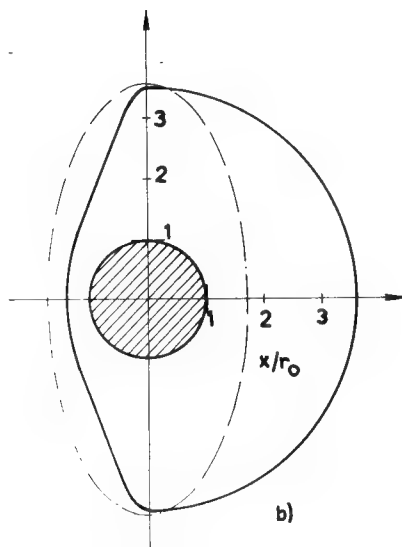



Fig. 5 *a-b*.
Forma della sezione trasversale del getto ad una distanza dell'orificio uguale al raggio di questo per $M_\infty = 5$.

la parte *anteriore* (o di *prora*) del getto tende rapidamente ad appiattirsi in direzione normale a quella della $\boldsymbol{U}_\infty$, e di conseguenza il contorno della sezione trasversale, almeno per detta parte prodiera, è assai più prossimo ad una *ellisse* che ad una *circonferenza*. Si è cercato pertanto di riconoscere quale è il divario tra la forma effettiva del getto, e quella che si ottiene assumendo la sezione trasversale di questa ellittica, ponendo a raffronto le Σ_r, dedotte come sopra è stato detto, colle ellissi così definite: il semi-asse minore di queste è stato assunto uguale al raggio l_0, che dovrebbe

presentare la sezione del getto supposta circolare, qualora la pressione in essa fosse costante ed uguale al *valore medio* $(\bar{p})_0$ della pressione al con-

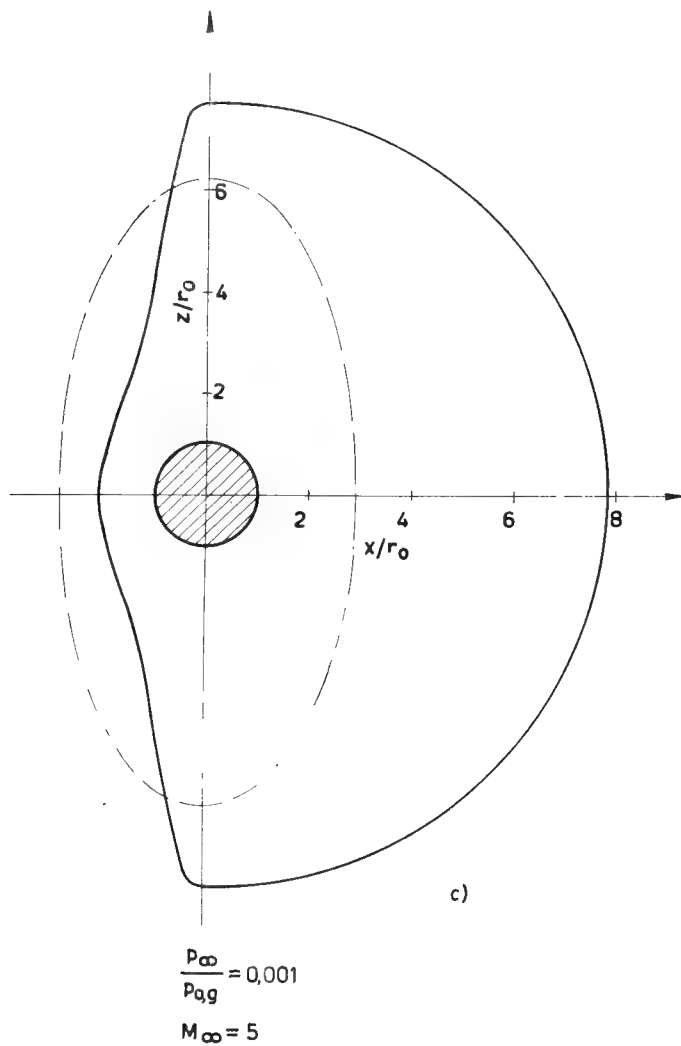



Fig. 5 *c*.
Forma della sezione trasversale del getto ad una distanza dell'orificio uguale al raggio di questo per $M_\infty = 5$

torno circolare esterno dell'orificio Σ_0. Questa pressione si calcola per mezzo della (40) e risulta data dalla

$$\frac{(\bar{p})_0}{p_{0,g}} = \frac{p_\infty}{p_{0,g}} \left(1 + \frac{\gamma}{8} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} M_\infty^2 \right).$$

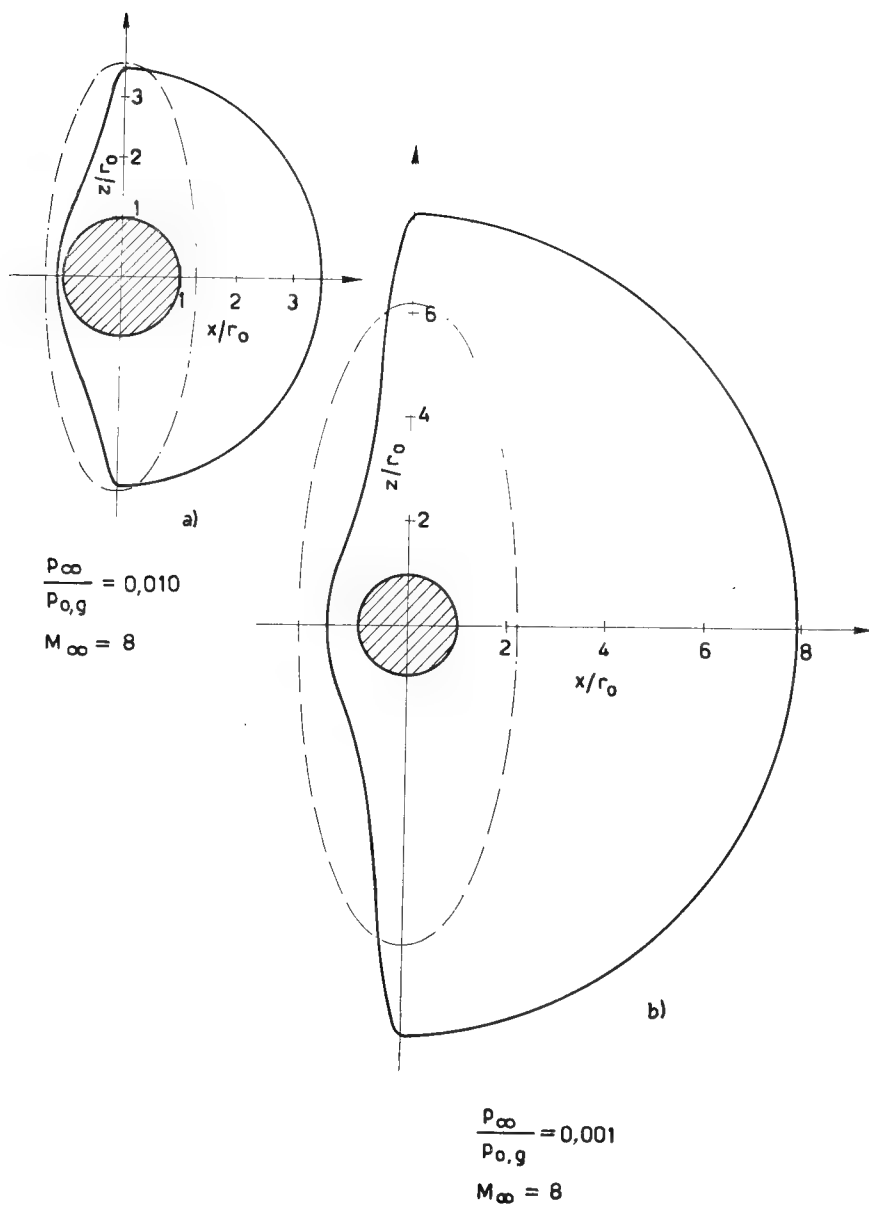



Fig. 6 *a-b*.
Forma della sezione trasversale del getto ad una distanza dell'orificio uguale al raggio di questo per $M_{\infty} = 8$.

Il semiasse maggiore delle medesime ellissi è stato invece preso uguale al raggio R che la sezione trasversale, sempre supposta circolare, dovrebbe avere se la pressione in essa fosse costante ed uguale a p_{∞}.

Le ellissi ora definite sono disegnate nelle figure 4, 5, 6 con linee a punto e tratto: risulta dal confronto che la assunzione sopra indicata può effettivamente servire per rappresentare con una approssimazione non troppo grossolana la sezione trasversale Σ del getto già a distanza molto piccola dalla parete. Poiché poi il fluido che occupa la parte posteriore (o di poppa) del getto, già si è espanso fino alla pressione p_∞, appare che, se si prescinde dall'influenza, sulla forma di una generica Σ, della disuniformità della corrente interna a questa, e quindi delle onde che propagano le perturbazioni corrispondenti, il semiasse maggiore della ellisse-sezione si può ritenere costante lungo il getto, mentre il semiasse minore varierà per effetto della variazione della pressione. Questo giustifica l'assunzione fatta sulla forma della funzione che definisce il contorno della Σ, mentre suggerisce quale forma è da assumere per la funzione stessa.

Un'altra conseguenza che si può dedurre dal rapido appiattirsi della sezione trasversale è che essa può giustificare una trattazione *bidimensionale* del problema. Con questa assunzione le condizioni che determinano il problema sono:

1) lungo un dato segmento dell'asse x (che rappresenta la *fessura* da cui esce il getto) è prescritta la distribuzione della velocità: $\boldsymbol{W} = W_{cr.}\boldsymbol{j}$;

2) la corrente *esterna* al getto è delimitata da una linea L_1, che la separa dalla corrente *interna*, mentre questa è delimitata da una linea L_2 che la separa da una regione in cui il fluido è in *quiete*;

3) lungo la L_1 la pressione p (per corrente esterna *ipersonica*) è una funzione della *pendenza* della linea stessa, ossia della $\dfrac{dy}{dx}$, se $y = y(x)$ è l'equazione della L_1, che si può agevolmente determinare assumendo il *flusso Newtoniano*; lungo la L_2 la pressione è costante ed uguale a p_∞.

Il « metodo delle caratteristiche » permette di ottenere una soluzione *numerica* del problema, in modo concettualmente semplice, se pure con calcoli alquanto laboriosi, almeno fino ad arrivare all'*onda d'urto* che necessariamente si viene a formare nelle condizioni considerate.

11. - Calcolo della curvatura della Σ_r per $\varphi = \pi$.

Dalle (44′) si può ricavare la curvatura della Σ_r per $\varphi = \pi$. Se si indica ancora con $d\mu_1$ l'elemento lineare sul contorno della Σ_r e con $1/R_0$ la curvatura di questa in un punto generico, si ha:

$$\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 \frac{1}{R_0} = \frac{d^2 z}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\mu_1} - \frac{d^2 x}{d\varphi^2}\frac{dz}{d\mu_1}. \tag{45}$$

Ora dalle (44′) si ricava

$$(45')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = -\, r_0 \sin\varphi \left[1 + \varepsilon G + \varepsilon \cos^2\varphi \, \dfrac{\gamma+3}{\gamma+1}\, \gamma M_\infty^2 \, \dfrac{p_\infty}{p_{0,g}}\, \dot G \right] \\[2ex] \dfrac{dz}{d\varphi} = r_0 \cos\varphi \left[1 + \varepsilon G - \varepsilon \sin^2\varphi \, \dfrac{\gamma+3}{\gamma+1}\, \gamma M_\infty^2 \, \dfrac{p_\infty}{p_{0,g}}\, \dot G \right] \end{cases}$$

in cui si è indicato con $\dot G$ la derivata della funzione G rispetto al suo argomento

$$\mathfrak{X} = \frac{\gamma}{2}\, \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\, M_\infty^2 \, \frac{p_\infty}{p_{0,g}} \cos^2\varphi \, .$$

Risulta pertanto $\left(\dfrac{d\mu_1}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = r_0^2 (1 + \varepsilon G_\pi)^2$, se G_π è il valore di G per $\varphi = \pi$. D'altra parte si ha

$$\left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi} = r_0 \left[1 + \varepsilon G_\pi + \varepsilon\gamma \, \frac{\gamma+3}{\gamma+1}\, M_\infty^2 \, \frac{p_\infty}{p_{0,g}}\, \dot G_\pi \right]$$

se $\dot G_\pi$ è il valore di $\dot G$ per $\varphi = \pi$ e quindi

$$(46)\qquad \left(\frac{1}{R_0}\right)_{\varphi=\pi} = \frac{1 + \varepsilon G_\pi + \varepsilon\gamma \, \dfrac{\gamma+3}{\gamma+1}\, M_\infty^2 \, \dfrac{p_\infty}{p_{0,g}}\, \dot G_\pi}{r_0 (1 + \varepsilon G_\pi)^2}$$

essendo

$$\left(\frac{1}{R_0}\right)_{\varphi=\pi} = \left[\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)_\pi \left(\frac{dx}{d\mu_1}\right)_\pi - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)_\pi \left(\frac{dz}{d\mu_1}\right)_\pi \right] \Big/ \left(\frac{d\mu_1}{d\varphi}\right)_\pi^2$$

da cui appare che, essendo $\dot G < 0$, come risulta dalla fig. 3, il raggio di curvatura R_0 del contorno della Σ_r per $\varphi = \pi$ è alquanto più grande di quello r_0 della Σ_0, ed il rapporto $(R_0)_{\varphi=\pi}/r_0$ dipende soltanto dai parametri $M_\infty^2 p_\infty / p_{0,g}$, e $p_\infty / p_{0,g}$.

Parte Seconda

DETERMINAZIONE DELLE PRESSIONI SUL FUSO CILINDRICO INDOTTE DAL GETTO

1. - Schema del procedimento.

Il getto uscente dal fuso produce sulla corrente U_∞ un'onda d'urto staccata, di guisa che in tutta la parte del fuso compresa tra detta onda ed il getto si ha una variazione di pressione rispetto al valore corrispondente a p_∞. Per il calcolo di detta variazione è necessario determinare l'onda d'urto; questo è stato fatto ricorrendo ad alcune drastiche semplificazioni.

Si sostituisce innanzitutto alla superficie Ω effettiva del getto quella di un *toro* $\mathfrak{T}_1^*$ di asse disposto secondo z e generato dalla rotazione di una *ellisse* $\mathfrak{E}_1$, identica a quella definita al termine del n. 10 della parte I: poichè si è riconosciuto che questa non differisce molto dal contorno della parte di prora della sezione trasversale del getto a una distanza Δ molto piccola dalla parete, è da presumere che la configurazione del flusso ottenibile con questa schematizzazione non sia molto diversa da quella reale.

Si sostituisce poi al fuso un piano (che risulta coincidente col piano $y = 0$), di guisa che, per quanto riguarda il campo attorno a $\mathfrak{T}_1^*$, l'influenza del piano si riduce a quella di *rispecchiare* $\mathfrak{T}_1^*$ rispetto al piano stesso. Il problema è così ridotto a quello di determinare il campo di una corrente uniforme U_∞ attorno a una data superficie torica. Ma anche con questa schematizzazione le difficoltà del calcolo rimangono enormi e perciò, oltre a ricorrere all'ipotesi di Lighthill [2] e di Whitham [3], su cui si ritornerà al n. seguente, si determina prima, con tale ipotesi, l'onda d'urto per il caso particolare in cui il toro $\mathfrak{T}_1^*$ degenera in un cilindro di asse disposto secondo y e di direttrice coincidente colla ellisse $\mathfrak{E}_1$. Per tener conto poi dell'influenza che su detta onda d'urto, e in particolare sulla sua posizione, ha la curvatura Gaussiana della $\mathfrak{T}_1^*$ nel punto O^* in cui la $\mathfrak{E}_1$ è intersecata dall'asse x (fig. 7), si fa la determinazione dell'onda d'urto per superfici teoriche $\mathfrak{T}_c^*$ *circolari*, che hanno il cerchio generatore coincidente col cerchio osculatore della $\mathfrak{E}_1$ in O^* e curvatura Gaussiana uguale a quella delle $\mathfrak{T}_1^*$ sempre in detto punto. È così possibile ottenere

il rapporto τ^* tra la distanza δ^* dell'onda d'urto dalla $\mathfrak{E}_1$ in O^* ed il raggio di curvatura R_c della $\mathfrak{E}_1$ in detto punto, in funzione del rapporto μ^* delle due curvature principali delle $\mathfrak{T}_1^*$: il rapporto $\frac{(\tau_c^*)_{\mu^*}}{(\tau_c^*)_{\mu^*=\infty}}$ è una misura della influenza sul valore di τ_c^* della curvatura Gaussiana, e pertanto

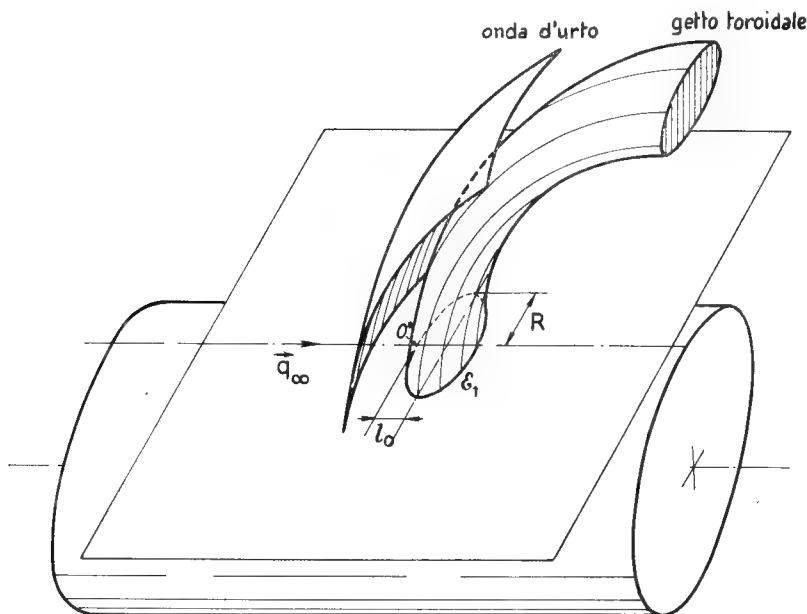



Fig. 7.
Configurazione schematica del getto e dell'onda d'urto.

assumendo detto rapporto come *fattore di correzione*, si otterrà un valore approssimato del rapporto τ^* corrispondente alle $\mathfrak{T}_1^*$ effettive dal valore $(\tau^*)_{\mu^*=\infty}$ calcolato per il cilindro ellittico colla

$$\tau^* = (\tau^*)_{\mu^*=\infty} \frac{(\tau_c^*)_{\mu^*}}{(\tau_c^*)_{\mu^*=\infty}} . \tag{47}$$

DETERMINAZIONE DELL'ONDA D'URTO NEL FLUSSO IPERSONICO ATTORNO A UN CILINDRO ELLITTICO

2. - Ipotesi fondamentali ed equazioni del moto.

Nel caso del flusso Newtoniano ($M_\infty \to \infty$; $\gamma \to 1$) attorno ad una data superficie Ω, l'onda d'urto si riduce, come è noto, alla stessa Ω; nel flusso *ipersonico* le condizioni del moto *tendono* alle condizioni limiti sopra

indicate, di guisa che appare verosimile il prevedere che la superficie d'urto Ω_u debba essere *poco distante* dalla Ω e di forma analoga (nel senso che sarà fra poco precisato) a quella della stessa Ω (fig. 7). Con quale approssimazione questo si verifichi apparirà dalle formule che saranno ricavate: quello che importa ora osservare è che, in dette condizioni, per determinare la Ω_u basta conoscere la lunghezza del segmento dell'asse x intercettato dalle Ω_u e Ω, e poiché per questo occorre conoscere il campo di moto nel solo *intorno* di detto asse, si può considerare per questa determinazione il fluido come *incompressibile*: è questa l'ipotesi fatta da Lighthill e ripresa da Whitham nelle Note citate [2] e [3]. La densità di detto fluido, come ha indicato lo stesso Lighthill, è data dalla

$$\varrho_0 = (1 + \lambda)\varrho_\infty \tag{48}$$

essendo $\lambda = \dfrac{2}{\gamma - 1}$, mentre se ψ è la funzione di corrente, essa deve soddisfare all'equazione

$$\Delta_2\psi = -\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\varrho_\infty\omega \tag{49}$$

in cui ω è la vorticità. Si usano le coordinate ellittiche ζ e μ definite in funzione delle coordinate cartesiane x e y, dirette e orientate come indicato nella parte I, dalle,

$$\begin{aligned} x &= k(1 - \mu^2)^{1/2}(\zeta^2 - 1)^{1/2} \\ y &= k\mu\zeta \end{aligned} \tag{50}$$

in cui k è una opportuna costante. Le $\zeta =$ *costante* sono rappresentate dalla schiera delle *ellissi omofocali* aventi i fuochi nei punti dell'asse y a distanza dall'origine uguale a k; le $\mu =$ *costante* sono date dalla schiera delle iperboli omofocali, ortogonali alle predette ellissi e i cui fuochi coincidono coi fuochi di queste.

Assumendo che il fronte dell'onda d'urto $\mathfrak{E}_u$ sia ellittico, la vorticità immediatamente *dietro* l'onda è data, secondo la formula ricavata da Lighthill [2], dalla

$$\omega = -\frac{4}{\gamma^2 - 1}u_\mu\frac{1}{R_\mu} \tag{51}$$

in cui u_μ è la componente della velocità secondo la tangente all'ellisse $\zeta =$ *costante* $= \zeta_u$ corrispondente alla Ω_u, mentre $\dfrac{1}{R_\mu}$ è la curvatura di questa in un suo punto generico. Ora è

$$u_\mu = U_\infty \cos(\boldsymbol{t}_\mu, \boldsymbol{i}) = U_\infty\mu\frac{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}}{\sqrt{\zeta_u^2 - \mu^2}} \tag{52}$$

dove $\boldsymbol{t}_\mu$ è il versore della tangente all'ellisse $\zeta = \zeta_u$; si ha poi

$$\frac{1}{R_\mu} = -\frac{1}{h^3}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)$$

essendo $ds_\mu = h_\mu\, d\mu = k\sqrt{\frac{\zeta^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}\, d\mu$ l'elemento lineare dell'ellisse $\zeta = \zeta_u$, ed avendo assunta la curvatura *positiva* se la curva rivolge la sua concavità verso il semiasse x positivo. Ne risulta

$$\frac{1}{R_\mu} = \frac{\zeta_u}{k}\frac{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}}{\sqrt{(\zeta_u^2 - \mu^2)^3}} \tag{53}$$

così che si ha

$$\omega = -\frac{4}{\gamma^2 - 1}\frac{U_\infty}{k}\mu\zeta_u\frac{\zeta_u^2 - 1}{(\zeta_u^2 - \mu^2)^2}. \tag{54}$$

Ora, in prossimità dell'asse x, è $\mu \ll \zeta_u$, di guisa che in detta regione la (54) può essere approssimata colla

$$\omega \cong -\frac{4}{\gamma^2 - 1}\frac{U_\infty}{k}\mu\zeta_u\frac{\zeta_u^2 - 1}{\zeta_u^4} = -4\frac{U_\infty}{(\gamma^2 - 1)k}\,y\,\frac{\zeta_u^2 - 1}{\zeta_u^4}; \tag{54'}$$

ma nei punti della Ω_u è

$$\psi = \varrho_\infty U_\infty y \tag{55}$$

e pertanto si ha pure

$$\omega = -\frac{4}{\gamma^2 - 1}\frac{1}{\varrho_\infty k^2}\frac{\zeta_u^2 - 1}{\zeta_u^4}\psi, \tag{55'}$$

e poiché in una corrente incompressibile $\omega = \omega(\psi)$, ossia la vorticità si mantiene costante lungo una linea di corrente, la (55') definisce la legge di variazione di ω in tutto il campo e dalla (49) si deduce la

$$\Delta_2\psi = \frac{4}{(\gamma - 1)^2}\frac{1}{k^2}\frac{\zeta_u^2 - 1}{\zeta_u^4} = \frac{a\psi}{k^2} \tag{56}$$

posto

$$\bar{a} = \frac{4}{(\gamma - 1)^2}\frac{\zeta_u^2 - 1}{\zeta_u^4}. \tag{57}$$

D'altra parte è

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{h_\zeta h_\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\mu}{h_\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_\zeta}{h_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)\right]$$

se $ds_\zeta = h_\zeta d\zeta$ è l'elemento lineare dell'iperbole generica $\mu = costante$, così che risulta

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{k^2}\,\frac{(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}}{\zeta^2-\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{(\zeta^2-1)^{1/2}}{(1-\mu^2)^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{(\zeta^2-1)^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right]\right\}$$

od anche se, con approssimazione analoga a quella già prima fatta, si pone

$$\zeta^2-\mu^2 \cong \zeta^2$$

(e pertanto $\mu \ll \zeta$ in tutto l'intervallo di variazione della ζ)

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{k^2}\,\frac{(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}}{\zeta^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\zeta^2-1}{1-\mu^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right]+\right. \tag{58}$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{(\zeta^2-1)^{1/2}}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right]\right\}$$

da cui

$$\sqrt{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{1-\mu^2}}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right]+\right. \tag{59}$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right]\right\} = \bar{a}\zeta^2\psi\,.$$

3. - Condizioni sull'onda d'urto.

La componente della velocità tangente all'ellisse $\zeta = \zeta_u$ è data dalla (52), mentre la componente della velocità tangente all'iperbole $\mu = cost.$ in un punto qualsiasi di detta ellisse, prima dell'urto è:

$$\frac{(u_\zeta)_I}{U_\infty} = \zeta_u\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_u^2-\mu^2}} \tag{60}$$

di guisa che la componente $(u_\zeta)_{II}$ secondo la medesima direzione, dopo l'urto, è definita dalla

$$\frac{(u_\zeta)_{II}\,(u_\zeta)_I}{U_\infty^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1-\frac{(u_\mu)_I^2}{V_l^2}\right]\frac{V_l^2}{U_\infty^2} \tag{61}$$

se V_l è la velocità limite; e pertanto per $U_\infty \cong V_l$ si ha

$$\frac{(u_\zeta)_{II}}{U_\infty} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\zeta_u\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta_u^2-\mu^2}}\,. \tag{62}$$

Poichè le componenti u_μ e u_ζ si possono pure esprimere colle

$$(63)\quad \begin{cases} u_\mu = \dfrac{1}{\varrho_\infty h_\zeta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \dfrac{1}{\varrho_\infty k}\sqrt{\dfrac{\zeta^2-1}{\zeta^2-\mu^2}}\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta} \\ u_\zeta = \dfrac{-1}{\varrho_\infty h_\mu}\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu} = -\dfrac{1}{\varrho_\infty k}\sqrt{\dfrac{\zeta^2-\mu^2}{1-\mu^2}}\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu} \end{cases}$$

ne deriva che sull'onda d'urto devono essere soddisfatte le

$$(64)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_u} = \varrho_\infty U_\infty k\mu \\ \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_{\zeta=\zeta_u} = \varrho_\infty U_\infty k\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\zeta_u \end{cases}$$

mentre sulla linea che delimita il getto, e che indicheremo ancora con $\mathfrak{E}_1$, deve essere

$$(65)\quad (\psi)_{\mathfrak{E}_1} = 0\,.$$

4. - Determinazione della ψ e della linea delimitante il getto.

Si pone

$$(66)\quad \psi = \varrho_\infty U_\infty k\psi^*$$

e si assume

$$(67)\quad \psi^* = \mu\zeta F_1(\zeta)\,.$$

Dalle condizioni (64) si ricava

$$\begin{cases} \varrho_\infty U_\infty k\left[F_1(\zeta_u) - \zeta_u\left(\dfrac{dF_1}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_u}\right]\mu = \varrho_\infty U_\infty k\mu \\ \varrho_\infty U_\infty k\zeta_u F_1(\zeta_u) = \varrho_\infty U_\infty k\,\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\zeta_u \end{cases}$$

da cui

$$(68)\quad \begin{cases} F_1(\zeta_u) + \zeta_u\left(\dfrac{dF_1}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_u} = 1 \\ F_1(\zeta_u) = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\,. \end{cases}$$

Sostituendo la (66) nella (59), tenuto conto della (67), si ricava poi

$$(69)\quad \bar{a}\zeta^2\cdot\zeta F_1 = (\zeta^2-1)^{1\cdot 2}\frac{d}{d\zeta}\left[\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{d}{d\zeta}(\zeta F_1)\right] - \zeta F_1$$

da cui appare che è possibile soddisfare alla (65) se la $\mathfrak{E}_1$ è una ellisse caratterizzata da un valore ζ_1 di ζ per cui

$$F_1(\zeta_1) = 0 \,. \tag{70}$$

Si può trasformare la (69) ponendo

$$\begin{cases} \zeta = \mathfrak{Cosh}\,\theta \\ \zeta F_1 = F^* \,. \end{cases} \tag{71}$$

Si ricava

$$(1 + \bar{a}\,\mathfrak{Cosh}^2\,\theta) F^* = \frac{d^2 F^*}{d\theta^2} \tag{72}$$

od anche

$$(a^* + q\,\mathfrak{Cosh}\,2\theta) F^* = \frac{d^2 F^*}{d\theta^2} \tag{72'}$$

(se $a^* = 1 + \bar{a}/2;\ q = \bar{a}/2$), che è l'*equazione modificata di Mathieu.* Per essa le condizioni ai limiti diventano

$$\begin{aligned} F^*(\zeta_u) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\zeta_u \\ \left(\frac{dF^*}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_u} &= 1 \,. \end{aligned} \tag{73}$$

Sono state date diverse forme dell'integrale generale della (72'); qui si considera solo quella che si ottiene trasformando la (72') in una *equazione integrale di Volterra* di seconda specie. Integrando due volte la (72'), tenendo conto delle (73), si ottiene infatti

$$\begin{aligned} F^* = \int_{\theta_u}^{\theta} (a^* + q\,\mathfrak{Cosh}\,2\theta')\,(\theta - \theta') F^*(\theta') d\theta' \,+ \\ + (\theta - \theta_u)\,\mathfrak{Sinh}\,\theta_u + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\mathfrak{Cosh}\,\theta_u \,. \end{aligned} \tag{74}$$

La soluzione della (74) si può porre sotto la forma

$$\begin{aligned} F^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\mathfrak{Cosh}\,\theta_u + (\theta - \theta_u)\,\mathfrak{Sinh}\,\theta_u \,+ \\ + \int_{\theta_u}^{\theta} \Gamma(\theta, \theta') \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\mathfrak{Cosh}\,\theta_u + (\theta' - \theta_u)\mathfrak{Sinh}\theta_u\right] d\theta' \end{aligned} \tag{75}$$

in cui il *nucleo risolvente* $\Gamma(\theta, \theta')$ è definito per mezzo dei *nuclei iterati successivi*

$$\Gamma(\theta, \theta') = K(\theta, \theta') + K^{(2)}(\theta, \theta') + \ldots + K^{(n)}(\theta, \theta') + \ldots \tag{76}$$

essendo

$$K(\theta, \theta') = (\theta - \theta')\,(a^* + q\,\mathfrak{Cosh}\,2\theta') \tag{77}$$

$$K^{(2)}(\theta, \theta') = \int_{\theta_u}^{\theta} K(\theta, s)K(s, \theta')ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K^{(n)}(\theta, \theta') = \int_{\theta_u}^{\theta} K(\theta, s)K^{(n-1)}(s, \theta')ds .$$

Il valore $\theta = \theta_1$ che caratterizza l'ellisse $\mathfrak{E}_1$, sezione del getto, si ottiene imponendo che sia soddisfatta la (70); si ha perciò

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\mathfrak{Cosh}\,\theta_u + (\theta_1 - \theta_u)\,\mathfrak{Sinh}\,\theta_u - \tag{78}$$

$$+ \int_{\theta_u}^{\theta_1}\Gamma(\theta_1, \theta')\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\mathfrak{Cosh}\,\theta_u + (\theta' - \theta_u)\,\mathfrak{Sinh}\,\theta_u\right]d\theta' = 0 .$$

Una prima approssimazione, che peraltro se le $\mathfrak{E}_u$ e $\mathfrak{E}_1$ sono abbastanza *vicine* può essere sufficiente, si ha assumendo, per tutto l'intervallo $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_u$ una variazione *lineare* della F_1 con ζ. Si ha, in questa ipotesi,

$$F_1 = (F_1)_{\zeta=\zeta_u} + \left(\frac{dF_1}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_u}(\zeta - \zeta_u) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1}\,\frac{1}{\zeta_u}(\zeta - \zeta_u) \tag{78'}$$

e perciò, poiché per $\zeta = \zeta_u$ deve essere $F_1 = 0$,

$$\zeta_1 = \zeta_u\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\right) = \zeta_u\,\frac{3 - \gamma}{2} . \tag{79}$$

La distanza δ^* delle $\mathfrak{E}_1$ e $\mathfrak{E}_u$ misurata sull'asse x risulta data dalla

$$\delta^* = k\left[\sqrt{\zeta_u^2 - 1} - \sqrt{\zeta_1^2 - 1}\right] \tag{80}$$

ed il rapporto di δ^* al raggio di curvatura R_c della $\mathfrak{E}_1$ nel punto O^* in cui questa interseca l'asse x è perciò

$$\frac{\delta^*}{R_c} = \frac{\delta^*}{k}\,\frac{\sqrt{\zeta_1^2 - 1}}{\zeta_1^2} = (\tau^*)_{\mu^*=\infty} .$$

Si ricava

$$(\tau^*)_{\mu^*=\infty} = \frac{[\sqrt{\zeta_u^2 - 1} - \sqrt{\zeta_1^2 - 1}]\sqrt{\zeta_1^2 - 1}}{\zeta_1^2} = \tag{81}$$

$$= (\mathfrak{Sinh}\,\theta_u - \mathfrak{Sinh}\,\theta_1)\,\frac{\mathfrak{Tgh}\theta_1}{\mathfrak{Cosh}\,\theta_1}.$$

DETERMINAZIONE DELL'ONDA D'URTO NEL FLUSSO IPERSONICO ATTORNO A SUPERFICI TORICHE CIRCOLARI

5. - Introduzione delle coordinate toroidali.

Secondo lo schema di procedimento indicato al n. 1, si considera ora il flusso attorno a una superficie torica circolare $\mathfrak{T}_c^*$, il cui cerchio generatore ha il raggio uguale al raggio di curvatura R_c della $\mathfrak{C}_1$ prima considerata in O^*, mentre la seconda curvatura principale coincide con quella della superficie torica $\mathfrak{T}_1^*$ cui si è assimilato il getto: secondo i risultati ottenuti nella parte I essa è data dalla $\dfrac{1}{R_1^* + l_0}$, in cui

$$R_1^* = \frac{2b\,\dfrac{\gamma'}{\gamma'-1}\,\dfrac{\gamma+1}{\gamma+3}\,\dfrac{P_0}{M_2^\infty} + c''_f}{c'_f}\,l_0 \tag{82}$$

essendo

$$(P)_{\bar{p}=\bar{p}_0} = P_0 - \left(1 + \lambda^*\,\frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\gamma M_\infty^2\right)^{1/\gamma'}\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}} - \tag{83}$$

$$- \frac{\gamma'+1}{2\gamma'}\left[1 + \gamma\,\frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\lambda^* M_\infty^2\right]$$

in cui:

$$\lambda^* = \frac{\dfrac{R^2}{l_0^2}\displaystyle\int_{-a_0/l_0}^{X_0/l_0} \frac{\dot{f}^2}{\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{l_0^2}\dot{f}^2}}\,d(X/l_0)}{\displaystyle\int_{-a_0/l_0}^{X_0/l_0} \sqrt{1 + \frac{R^2}{l_0^2}\dot{f}^2}\,d(X/l_0) + \frac{\pi R}{2l_0}} \tag{83'}$$

mentre

$$\frac{(\bar{p})_0}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\gamma M_\infty^2 \lambda^* \quad \text{per la (40)}.$$

Per la ellisse $\mathfrak{E}_1$, i cui semiassi l_0 e R sono stati dati al n. 10 della parte I, le espressioni che permettono di calcolare c_f', c_f'', λ^* e b risultano

$$c_f' = \frac{R^3/l_0^3}{\frac{R^2}{l^2} - 1}\left[1 - \frac{l_0}{2R\sqrt{\frac{R^2}{l_0^2} - 1}} \log \frac{\frac{R}{l_0} + \sqrt{\frac{R^2}{l_0^2} - 1}}{\frac{R}{l_0} - \sqrt{\frac{R^2}{l_0^2} - 1}}\right] \tag{84}$$

$$c_f'' = -\frac{R^2}{l_0^2}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{1 + \frac{R}{l_0}}\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{R}{l_0}}\right)$$

$$\lambda^* = \frac{1}{\frac{\boldsymbol{E}}{1 - \frac{l_0^2}{R^2}} + \pi}\,\frac{1}{1 - \frac{l_0^2}{R^2}}\left(\boldsymbol{E} - \frac{l_0^2}{R^2}\boldsymbol{K}\right) =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{E} + \pi\left(1 - \frac{l_0^2}{R^2}\right)}\left(\boldsymbol{E} - \frac{l_0^2}{R^2}\boldsymbol{K}\right)$$

$$b = \pi\frac{R}{l_0}$$

essendo $\boldsymbol{K}$ ed $\boldsymbol{E}$ gli integrali ellittici completi di prima e di seconda specie di modulo $\sqrt{1 - l_0^2/R^2}$.

Per i valori del numero di Mach M_∞ e del rapporto di pressione $p_\infty/p_{0,g}$ già considerati nella parte I, le formule sopra indicate dànno i valori corrispondenti di l_0/R, λ^*, c_f', c_f'', P_0 e R_1^*/l_0 riportati nella Tabella I.

TABELLA I.

M_∞	$p_\infty/p_{0,g}$	l_0/R	λ^*	c_f'	$-c_f''$	P_0	R_1^*/l_0
4	0,010	0,562	0,1772	1,428	1,217	7,178	3,939
4	0,005	0,552	0,1791	1,462	1,243	9,669	5,567
4	0,001	0,539	0,1815	1,511	1,278	17,774	10,839
5	0,010	0,502	0,1880	1,643	1,390	8,986	2,889
5	0,005	0,490	0,1899	1,692	1,429	12,335	4,252
5	0,001	0,474	0,1927	1,760	1,484	23,272	8,709
8	0,005	0,379	0,2071	2,312	1,917	20,392	2,288
8	0,001	0,357	0,21	2,472	2,048	41,639	5,490

Per lo studio del campo di corrente attorno alle $\mathfrak{T}_c^*$ è conveniente far ricorso ad un sistema di coordinate toroidali; è necessario considerare separatamente i due casi, nei quali rispettivamente si ha

1º *caso*, $R_1^* + l_0 > 2R_c$;

2º *caso*, $R_1^* + l_0 < 2R_c$.

Si prende dapprima in esame il 1º caso, nel quale il circolo generatore di raggio R_c *non* interseca l'asse attorno al quale deve ruotare per generare la superficie $\mathfrak{T}_c^*$: indicando detto asse con z_1 (che risulta parallelo all'asse indicato con z nei numeri precedenti, ma spostato rispetto ad esso nel piano (xz)), e con $x_1 = x$, y_1 gli altri due assi, si pone

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a\,\frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha\cos\Phi}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha - \cos\beta}\,; \\ y_1 &= a\,\frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha\sin\Phi}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha - \cos\beta}\,; \\ z_1 &= a\,\frac{\sin\beta}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha - \cos\beta}\,. \end{aligned}\right.$$

Le superfici $\alpha = cost.$ sono superfici *toriche circolari*, una delle quali, e sia la $\alpha = \alpha_1$, corrisponde alla $\mathfrak{T}_c^*$: eliminando dalle (85) i parametri Φ e β e ponendo la condizione che la superficie $\alpha = \alpha_1$ abbia le proprietà indicate in questo n. si ottengono i valori di a e di α_1, e precisamente si ha

$$(86)\qquad \mathfrak{Cosh}\,\alpha_1 = \frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c}\,;\quad a = R_c\,\mathfrak{Sinh}\,\alpha_1 = \sqrt{(R_1^* + l_0 - R_c)^2 - R_c^2}$$

mentre è $R_c = \dfrac{R^2}{l_0}$.

Le superfici $\beta = cost.$ sono superfici *sferiche* aventi i loro centri sull'asse z_1 e passanti per il *cerchio* del piano $z_1 = 0$ di raggio uguale ad a, ed il raggio R_α della sfera $\beta = cost.$ è legato al valore di β che caratterizza la superficie stessa dalla

$$(87)\qquad R_\alpha = \frac{a}{\sin\beta}\,.$$

Infine le superfici $\Phi = cost.$ sono *piani* passanti per l'asse z_1, di guisa che le *linee coordinate* sopra una generica *superficie coordinata* $\Phi = cost.$ sono due schiere di *circonferenze*: le circonferenze $\beta = cost.$ formano un *fascio* avente per *punti base* i due punti A_1 e A_2 della retta normale a z_1 per l'origine delle coordinate, distanti da detta origine di a, mentre le

circonferenze $\alpha = cost.$ costituiscono un secondo fascio che ha punti base immaginari e punti limiti coincidenti con A_1 e con A_2 (fig. 8). I due fasci di circonferenze sono traiettorie ortogonali l'uno dell'altro, e sulle $\alpha = cost.$ β *cresce* nel senso pure indicato nella stessa figura 8.

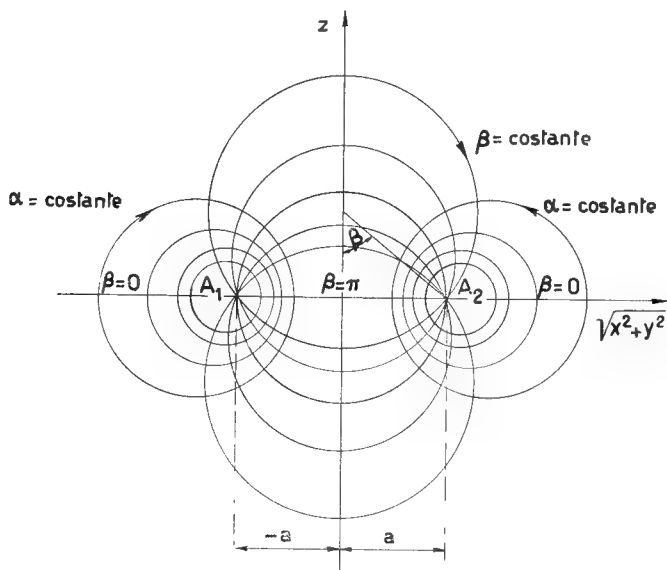



Fig. 8.
Linee coordinate in un piano Φ = cost nel sistema di coordinate toroidali α, β, Φ.

6. - Equazioni del flusso nelle vicinanze dell'asse x_1. Equazioni di continuità e d'urto.

Si indica con $u_\alpha \, \boldsymbol{i}_\alpha$ il componente della velocità secondo il versore della tangente alla linea coordinata ($\beta = cost.$; $\Phi = cost.$), orientato secondo le α crescenti, mentre $u_\beta \, \boldsymbol{i}_\beta$ e $u_\Phi \boldsymbol{i}_\Phi$ hanno significato analogo. Siano poi h'_α, h'_β h'_Φ le grandezze legate ai cosiddetti « fattori di scala » h_α, h_β, h_Φ della trasformazione definita dalle (85) dalle relazioni

$$(88) \qquad h'_\alpha = h_\alpha \, \mathrm{Sinh}\, \alpha \, ; \qquad h'_\beta = h_\beta \sin \beta \, ; \qquad h'_\Phi = h_\Phi \sin \Phi \, .$$

I « fattori di scala » h_α, h_β, h_Φ per il sistema di coordinate toroidali sopra indicato risultano

$$(88') \qquad h_\alpha = \frac{a/\mathrm{Sinh}\, \alpha}{\mathrm{Cosh}\, \alpha - \cos \beta} \, ; \qquad h_\beta = \frac{a/\sin \beta}{\mathrm{Cosh}\, \alpha - \cos \beta} \, ;$$

$$h_\Phi = \frac{a \, \mathrm{Sinh}\, \alpha/\sin \Phi}{\mathrm{Cosh}\, \alpha - \cos \beta}$$

mentre se ds_α, ds_β, ds_Φ sono gli elementi lineari presi sulle « linee coordinate » è

$$ds_\alpha = h'_\alpha d\alpha \; ; \qquad ds_\beta = h'_\beta d\beta \; ; \qquad ds_\Phi = h'_\Phi d\Phi \; . \tag{89}$$

L'*equazione di continuità* ha nelle coordinate ora introdotte la forma

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(h'_\beta h'_\Phi u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h'_\alpha h'_\Phi u_\beta) + \frac{\partial}{\partial\Phi}(h'_\alpha h'_\beta u_\Phi) = 0 \tag{90}$$

mentre la condizione che deve essere soddisfatta sulla superficie $\mathfrak{T}_c^*$, a cui si è assimilato il getto, e che deve pertanto essere superficie di corrente, è espressa dalla

$$u_\alpha = 0 \, , \qquad \text{per} \qquad \alpha = \alpha_1 \; . \tag{90'}$$

Si fa ora l'assunzione che l'onda d'urto sia una superficie torica $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ della stessa schiera a cui appartiene la $\mathfrak{T}_c^*$, e quindi caratterizzata da un valore $\alpha = \alpha_u = cost.$: questa assunzione ha limiti di validità analoghi a quelli indicati per il caso del *cilindro ellittico*, e pertanto può essere ammessa in quanto ci si limiti a considerare il campo nell'intorno dell'asse x, mentre nel caso limite in cui la $\mathfrak{T}_c^*$ diventi un cilindro circolare è in accordo col risultato di Lighthill [2]. Poichè poi l'attuale ricerca ha lo scopo soltanto di ottenere un fattore di correzione dei risultati ottenuti nei numeri $(2 \div 4)$ si fa l'approssimazione consistente nell'assumere per la componente della velocità u_α lungo l'asse x, per il segmento compreso tra le $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ e $\mathfrak{T}_c^*$ una variazione lineare: questo ha il vantaggio di ridurre enormemente la complicazione delle formule, mentre è per lo meno verosimile il supporre che non sia alterato il fattore di correzione in modo sensibile.

Come conseguenza della ipotesi ora detta, la determinazione della $\mathfrak{T}_c^*$ è possibile ricorrendo solo alla (90) e alle equazioni dell'urto. Ora da queste si ricava

$$\frac{(u_\alpha)_I (u_\alpha)_{II}}{V_l^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left[1 - \frac{(u_\beta)_I^2 + (u_\Phi)_I^2}{V_l^2}\right]. \tag{91}$$

Le componenti u_β e u_Φ sono continue attraverso alla $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ e i loro valori per $\alpha = \alpha_u$ sono dati dalle

$$\begin{cases} (u_\beta)_I = (u_\beta)_{II} = - U_\infty \dfrac{\mathfrak{Sinh}\, \alpha_u \sin\beta}{\mathfrak{Cosh}\, \alpha_u - \cos\beta} \cos\Phi \\ (u_\Phi)_I = (u_\Phi)_{II} = - U_\infty \sin\Phi \; . \end{cases} \tag{92}$$

Ne risulta

$$1 - \frac{(u_\beta)_I^2 + (u_\Phi)_I^2}{V_l^2} = \cos^2 \Phi \frac{(\cos\beta \operatorname{Cosh} \alpha_u - 1)^2}{(\operatorname{Cosh} \alpha_u - \cos\beta)^2} \tag{93}$$

coll'approssimazione $V_l \cong U_\infty$. Si ricava poi

$$(u_\alpha)_I = U_\infty \frac{1 - \cos\beta \operatorname{Cosh} \alpha_u}{\operatorname{Cosh} \alpha_u - \cos\beta} \tag{94}$$

che sostituita, insieme colla (93) nella (91) dà

$$(u_\alpha)_{II} = U_\infty \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1 - \cos\beta \operatorname{Cosh} \alpha_u}{\operatorname{Cosh} \alpha_u - \cos\beta} \cos\Phi \, . \tag{95}$$

7. - Determinazione della distanza della $(T_c^*)_u$ dalla T_c^* (1ª approssimazione).

Si pone

$$u_\alpha = U_\infty f_1(\alpha, \beta) \cos\Phi \, ; \qquad u_\beta = U_\infty f_2(\alpha, \beta) \cos\Phi \, ;$$
$$u_\Phi = U_\infty f_3(\alpha, \beta) \sin\Phi \, . \tag{96}$$

Sostituendo la (96) nella (90), tenuto conto delle (88′), si ottiene

$$-f_3 = \operatorname{Sinh} \alpha \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right) + \left(\operatorname{Cosh} \alpha - \frac{2 \operatorname{Sinh}^2 \alpha}{\operatorname{Cosh} \alpha - \cos\beta} \right) f_1 - \\ - \frac{2 \operatorname{Sinh} \alpha \cdot \sin\beta}{\operatorname{Cosh} \alpha - \cos\beta} f_2 \tag{97}$$

mentre per confronto delle (96) colla (95) e colle (92) si deduce

$$f_1(\alpha_u, \beta) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1 - \cos\beta \operatorname{Cosh} \alpha_u}{\operatorname{Cosh} \alpha_u - \cos\beta} \, ;$$
$$f_2(\alpha_u, \beta) = - \frac{\operatorname{Sinh} \alpha_u \sin\beta}{\operatorname{Cosh} \alpha_u - \cos\beta} \, ;$$
$$f_3(\alpha_u, \beta) = -1 \, . \tag{98}$$

Dalla seconda delle (98) si deduce

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right)_{\substack{\alpha = \alpha_u \\ \beta = 0}} = - \frac{\operatorname{Sinh} \alpha_u}{\operatorname{Cosh} \alpha_u - 1}$$

che introdotta nella (97) dà

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_u\\ \beta=0}} = \frac{1}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u} + \frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \tag{99}$$

$$\cdot\left(\frac{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u} - \frac{2\,\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1}\right) - \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1 + \mathfrak{Sinh}^2\,\alpha_u}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u(\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1)} -$$

$$- \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{2 + \mathfrak{Cosh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}.$$

Se $\alpha_1 - \alpha_u$ è *piccolo* si può in prima approssimazione, per l'intervallo dei valori di α compresi tra α_u e α_1 rappresentare la f_1 colla

$$f_1(\alpha, 0) = f_1(\alpha_u, 0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_u\\ \beta=0}} (\alpha - \alpha_u). \tag{100}$$

Poiché sulla $\mathfrak{T}_c^*$ deve essere $(u_\alpha)_{\alpha=\alpha_1} = 0$ si ricava

$$\alpha_1 - \alpha_u = \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u \cdot (\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1)}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u - 1 + \mathfrak{Sinh}^2\,\alpha_u} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \tag{101}$$

$$\cdot\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{2 + \mathfrak{Cosh}\,\alpha_u} = \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{2 + \mathfrak{Cosh}\,\alpha_u}.$$

Se R_u è il raggio del cerchio sezione della $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ col piano $z_1 = 0$, e R_u^* la distanza del centro di detto cerchio dall'origine, si ha, in analogia colle (86)

$$\frac{R_u^*}{R_u} = \mathfrak{Cosh}\,\alpha_u\,; \qquad a = R_u\,\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u \tag{102}$$

e pertanto risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{R_c}{R_u} = \frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_1} = \frac{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u}{\mathfrak{Sinh}\,\alpha_u\left[1 + \dfrac{\mathfrak{Cosh}\,\alpha_u}{2 + \mathfrak{Cosh}\,\alpha_u}\,\dfrac{\gamma-1}{2}\right]} \cong \\ &\qquad \cong 1 - \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{\dfrac{R_u^*}{R_u}}{2 + \dfrac{R_u^*}{R_u}} \\ &\frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_u^*} \cong 1 - \frac{\gamma-1}{2}\,\frac{R_u/R_u^*}{2 + R_u^*/R_u}. \end{aligned}\right. \tag{103}$$

La distanza sull'asse x tra la $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ e la $\mathfrak{T}_c^*$ risulta pertanto

$$(104)\qquad \frac{\delta}{R_u} = \frac{R_u^* + R_u - (R_1^* + l_0 - R_c) - R_c}{R_u} =$$

$$= \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{2 + R_u^*/R_u} \left(1 + \frac{R_u^*}{R_u}\right) = (\tau_c^*)_{\mu^*}.$$

Poiché

$$\frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c} = \frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_u^*} \frac{R_u}{R_c} \frac{R_u^*}{R_u}$$

si ricava che

$$(105)\qquad \frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{R_u/R_u^*}{2 + R_u^*/R_u}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} \dfrac{R_u^*/R_u}{2 + R_u^*/R_u}} \frac{R_u^*}{R_u}$$

e pertanto sia $\dfrac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c}$, sia $\dfrac{\delta}{R_c}$ sono funzioni del parametro R_u^*/R_u, e di conseguenza δ/R_c può essere espresso come funzione di $\dfrac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c}$, ossia del rapporto delle curvature principali della superficie torica $\mathfrak{T}_c^*$.

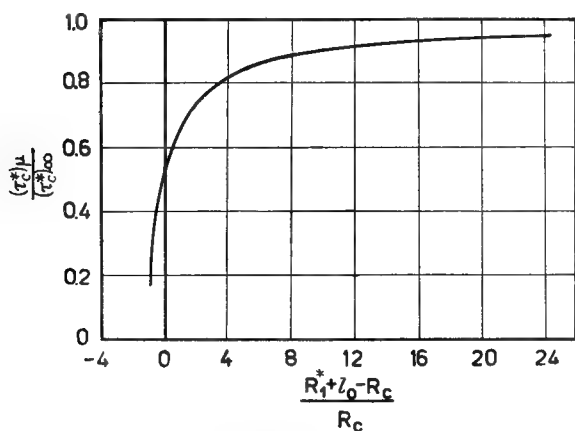



Fig. 9.

Fattore di correzione per la distanza dell'onda d'urto del getto in funzione del rapporto delle curvature principali del getto toroidale.

Si osservi poi che per $\dfrac{R_u^*}{R_u} = \infty$ (e pertanto per il caso limite in cui la $(\mathfrak{T}_c^*)_u$, e quindi la $\mathfrak{T}_c^*$, si riducano a cilindri circolari coassiali) dalla prima delle (103) si ricava $\dfrac{R_c}{R_u} = 1 - \dfrac{\gamma - 1}{2}$, da cui $\dfrac{R_u - R_c}{R_u} = \dfrac{\gamma - 1}{2}$, che per $\gamma = 1{,}4$ dà $\dfrac{\delta}{R_u} = \dfrac{R_u - R_c}{R_u} = 0{,}2$, men-

tre la ricerca più completa di Whitham dà $\frac{\delta}{R_u} = 0{,}177$, abbastanza prossimo al valore sopra trovato. Per $\gamma = 1{,}66$ si ha $\frac{\delta}{R_u} = 0{,}330$, mentre le ricerche sperimentali di Vas, Bogdonoff e Hammit [6] dànno $\frac{\delta}{R_u} = 0{,}358$, che è pure molto prossimo al valore ora ricavato in prima approssimazione, nonostante il valore relativamente elevato di $(\gamma - 1)$.

Il *fattore di correzione* per la determinazione di τ^* appare pertanto essere

$$(106) \qquad \frac{(\tau_c^*)_{\mu^*}}{(\tau_c^*)_{\mu^* \infty}} = \frac{1}{2 + R_u^*/R_u}\left(1 + \frac{R_u^*}{R_u}\right)$$

e la legge colla quale questo fattore varia in funzione del parametro $(R_1^* + l_0 - R_c)/R_c$ è data nella fig. 9.

Poiché la (82) permette di calcolare $R_1^* + l_0$, noto essendo il rapporto delle pressioni $p_\infty/p_{0,g}$, è facile ricavare il diagramma, come quelli dati in fig. 10, che stabilisce la correlazione tra i parametri $p_\infty/p_{0,g}$, e

Fig. 10.
Rapporto delle curvature principali del getto in funzione del rapporto tra le pressioni $\frac{p_{0,g}}{p_\infty}$ per vari numeri di Mach.

$\frac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c}$ per i vari numeri di Mach. Se ne deduce di conseguenza, per ogni M_∞, la legge di variazione del *fattore di correzione* con $p_{0,g}/p_\infty$, che per $M_\infty - 4; 5; 8$ è rappresentata in fig. 11.

8. - Coordinate toroidali per $R_1^* + l_0 < 2R_c$.

In questo caso il cerchio generatore della superficie $\mathfrak{T}_c^*$ interseca l'asse attorno a cui ruota per tale generazione; assumendo ora l'asse z_2 nella direzione dell'asse x, e orientato in senso contrario, l'asse x_2 in quella dell'asse z (e pertanto x_2 dà l'asse attorno al quale ruota il cerchio genera-

tore della superficie $\mathfrak{T}_c^*$), si pone:

$$(107) \qquad x_2 = a' \frac{\mathfrak{Sinh}\, \alpha'}{\mathfrak{Cosh}\, \alpha' - \cos \beta'} \; ; \qquad y_2 = a' \frac{\sin \beta' \cdot \sin \Phi'}{\mathfrak{Cosh}\, \alpha' - \cos \beta'} \; ;$$

$$z_2 = a' \frac{\sin \beta' \cdot \cos \Phi'}{\mathfrak{Cosh}\, \alpha' - \cos \beta'} \, .$$

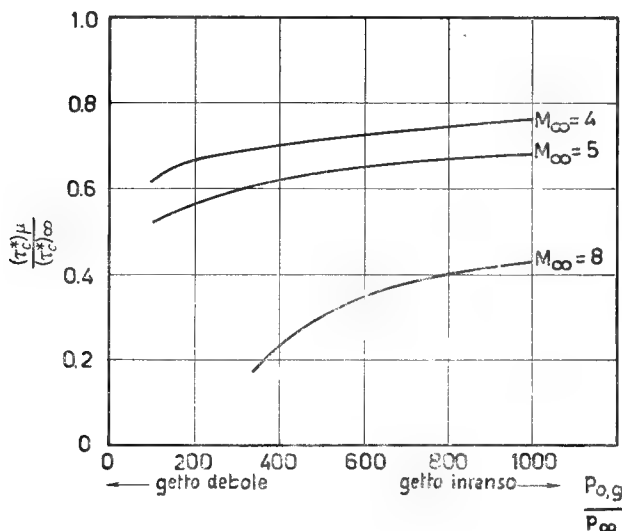



Fig. 11.
Fattori di correzione per la distanza dell'onda d'urto dal getto in funzione del rapporto $\frac{p_{0,g}}{p_\infty}$ per vari numeri di Mach.

Le superfici $\beta' = cost.$ sono superfici toroidali (*non anulari*), una delle quali, e sia la $\beta' = \beta'_1$ corrisponde alla $\mathfrak{T}_c^*$. Procedendo in modo analogo a quello indicato al n. 15 si ottengono i valori di α' e di β'_1, e precisamente risulta ora

$$(108) \qquad \begin{cases} \cos \beta'_1 = \dfrac{R_1^* + l_0 - R_c}{R_c} \\[2ex] a' = R_c \sin \beta'_1 = \sqrt{R_c^2 - (R_1^* + l_0 - R_c)^2} \, . \end{cases}$$

Le superfici $\alpha' = cost.$ sono costituite da *coppie* di *superfici sferiche* aventi i loro centri sull'asse x_2, mentre le $\Phi' = cost.$ sono i *piani* del fascio di asse coincidente con x_2.

L'elemento lineare ds_α della linea ($\beta = cost.$; $\Phi' = cost.$) è ancora dato dalla prima delle equazioni (89), e analogamente l'elemento lineare ds_β, della ($\alpha' = cost.$; $\Phi' = cost.$) è espresso dalla seconda, mentre l'ele-

mento ds_{Φ}, della ($\alpha' = cost.$; $\beta' = cost.$) è dato dalla terza delle stesse (89), in cui però le h'_{α}, h'_{β}, h'_{Φ}, sono ora definite dalle

$$(109) \qquad h'_{\alpha'} = \frac{a'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'}\,; \qquad h'_{\beta'} = \frac{a'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'}\,;$$

$$h'_{\Phi'} = \frac{a' \sin\beta'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'}\,.$$

Colle stesse ipotesi già indicate nei numeri precedenti si deduce per la condizione sull'onda d'urto la

$$(110) \qquad \frac{(u_{\beta'})_I\,(u_{\beta'})_{II}}{V_l^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left[1 - \frac{(u_{\alpha'})_I^2 + (u_{\Phi'})_I^2}{V_l^2}\right]$$

e poiché

$$(111) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(u_{\alpha'})_I = (u_{\alpha'})_{II} = U_\infty \frac{\sin\beta'_u\,\mathfrak{Sinh}\,\alpha' \cos\Phi'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'_u} \\ &(u_{\Phi'})_I = (u_{\Phi'})_{II} = U_\infty \sin\Phi'\,; \quad (u_{\beta'})_I = U_\infty \frac{1 - \cos\beta'_u\,\mathfrak{Cosh}\,\alpha'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'_u}\cos\Phi' \end{aligned} \right.$$

se $\beta' = \beta'_u$ è l'equazione della $(\mathfrak{T}_c^*)_u$, si ha

$$(112) \qquad \frac{(u_{\beta'})_{II}}{U_\infty} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{1 - \cos\beta'_u\,\mathfrak{Cosh}\,\alpha'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'_u}\cos\Phi'\,.$$

Assumendo, come prima

$$(96') \qquad \begin{aligned} u_{\alpha'} &= U_\infty f_4(\alpha', \beta') \cos\Phi'\,; \\ u_{\beta'} &= U_\infty f_5(\alpha', \beta') \cos\Phi'\,; \\ u_{\Phi'} &= U_\infty f_6(\alpha', \beta') \cos\Phi'\,; \end{aligned}$$

si ricava

$$(113) \qquad \left\{ \begin{aligned} f_4(\alpha', \beta'_u) &= \frac{\sin\beta'_u\,\mathfrak{Sinh}\,\alpha'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'_u}\,; \\ f_5(\alpha', \beta'_u) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{1 + \cos\beta'_u\,\mathfrak{Cosh}\,\alpha'}{\mathfrak{Cosh}\,\alpha' - \cos\beta'_u} \\ f_6(\alpha', \beta'_u) &= 1 \end{aligned} \right.$$

e dall'equazione di continuità, tenute presenti le (113) si ha

$$\left(\frac{\partial f_5}{\partial \beta'}\right)_{\substack{\alpha' \to 0 \\ \beta' = \beta'_u}} = -\,\frac{2}{\gamma + 1}\,\frac{2 + \cos\beta'_u}{\sin\beta'_u}\,.$$

Sempre nell'ipotesi che per il segmento dell'asse $x(=z_2)$ compreso tra il getto e l'onda si possa ritenere la variazione della velocità lineare e quindi si possa porre

$$f_5(0, \beta') = f_5(0, \beta'_u) + (\beta' - \beta'_u)\left(\frac{\partial f_5}{\partial \beta'}\right)_{\substack{\alpha'=0\\ \beta'=\beta'_u}}$$

poiché sulla $\mathfrak{T}_c^*$, ossia per $\beta' = \beta'_1$, deve essere $f_5 = 0$, si ha

$$\beta'_1 - \beta'_u = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sin \beta'_u}{2 + \cos \beta'_u}. \tag{114}$$

Siano sempre R_u il raggio del cerchio generatore della $(\mathfrak{T}_c^*)_u$ ed R_u^* la distanza del centro di detto cerchio dall'asse z_2; si ha ora

$$R_u^* = R_u \cos \beta'_u \, ; \qquad a' = R_u \sin \beta'_u \, . \tag{115}$$

Poiché appare dalla (114) che $\beta'_1 - \beta'_u$ è effettivamente piccolo a fronte dell'unità (inferiore certo, per $\gamma = 1{,}4$, a $0{,}2$), si ricava procedendo come al n. 7,

$$\left\{\begin{aligned} R_c &= R_u\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{R_u^*/R_u}{2 + R_u^*/R_u}\right) \\ R_1^* + l_0 - R_c &= R_u^*\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{2 + R_u^*/R_u} \frac{R_u}{R_u^*}\right) \end{aligned}\right. \tag{116}$$

ed infine

$$\frac{\delta}{R_u} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1 + R_u^*/R_u}{2 + R^*/R_u} = (\tau_c^*)_{\mu^*} \tag{117}$$

che coincidono colle corrispondenti formule ricavate nel caso precedente, e pertanto il fattore di correzione risulta sempre dato dalla (106).

Si può osservare poi che per $\dfrac{R_u^*}{R_u} = 0$ (*onda d'urto sferica*), il risultato dato dalla (117) coincide con quello trovato da Lighthill [2]: $\dfrac{\delta}{R_u} = \dfrac{\gamma - 1}{4}$.

Come già detto in n. 1 le formule trovate possono essere utilizzate per la determinazione della *distanza effettiva* δ_e (sull'asse x) delle sezioni trasversali dell'onda d'urto e della superficie Ω del getto, e precisamente si può porre

$$\frac{\delta_e}{R_c} = \frac{\delta}{R_c} \frac{(\tau_c^*)_{\mu^*}}{(\tau_c^*)_{\mu^* \ \infty}}$$

in cui $\frac{\delta}{R_c}$ si può calcolare per mezzo della (81), mentre $\frac{(\tau_c^*)_\mu}{(\tau_c^*)_{\mu^*=\infty}}$ può essere ottenuto dalla (106). Nella Tabella II sono riportati i valori di $\frac{\delta_e}{R_c}$ così determinati per diversi valori di $p_\infty/p_{0,g}$ e di M_∞.

TABELLA II

M	$p_\infty/P_{o,g}$	δ/R_c	$\frac{(\tau_c^*)_{\mu^*}}{(\tau_c^*)_{\mu^*=\infty}}$	δ_e/R_c
4	0,010	0,211	0,5846	0,123
4	0,005	0,209	0,6666	0,139
4	0,001	0,203	0,7661	0,155
5	0,010	0,200	0,4722	0,094
5	0,005	0,198	0,5600	0,111
5	0,001	0,197	0,6798	0,136
8	0,005	0,174	0,3563	0,062
8	0,001	0,169	0,4800	0,081

9. - Determinazione della forza indotta dal getto sulla parete: caso della parete piana.

Il calcolo della forza indotta dal getto sul fuso richiede la determinazione, oltre che della posizione dell'onda d'urto anche del campo di pressione nella regione compresa tra detta onda e il getto. Tale problema, anche nelle condizioni semplici poste al n. 2, presenta difficoltà grandissime; d'altra parte l'ipotesi della incompressibilità non può ovviamente essere accettata per tutta la parte del campo che interessa. È sembrato perciò opportuno fare il calcolo della forza ricorrendo ad assunzioni sia pure grossolane, ma giustificate, se la distanza dell'onda d'urto dalla superficie del getto è piccola, e che consentono tale determinazione in modo del tutto elementare.

Innanzi tutto si osserva che la configurazione qualitativa del getto, quale risulta dalle considerazioni svolte nella parte I, e in particolare dai risultati ottenuti al n. 10 di detta parte è quella rappresentata dalla figura 12 a tratto pieno, mentre quella assunta per la determinazione dell'onda d'urto è indicata a tratti. Appare da detta figura che condizioni analoghe a quelle supposte per il calcolo della superficie d'onda si verificano non sul corpo cilindrico B che porta l'orificio, ma su una superficie cilindrica D, coassiale a B, e di raggio poco diverso. Ora dai risultati speri-

mentali di Amick, Bond e Liepmann [8] in particolare dalle numerose fotografie della configurazione del flusso per diversi rapporti di $p_{0,g}/p_\infty$, e, in una certa misura anche dai risultati teorici di Garabedian [7], non sembra che la rapidissima variazione della sezione del getto da D a B produca una sensibile variazione della posizione dell'onda d'urto, così che l'ammettere, che l'ellisse $\mathfrak{E}_u$ ottenuta come è indicato nei numeri precedenti rappresenti la traccia dell'onda proprio su B, o sul piano $y = 0$ ad esso tangente, appare lecito; la regione del corpo su cui si esercitano *sovrapressioni* risulta così essere quella compresa tra $\mathfrak{E}_u$ il e contorno S_0 dell' orificio Σ_0. Ora, la variazione di pressione prodotta dall'urto, nei vari punti della ellisse $\mathfrak{E}_u$ $(\zeta = \zeta_u)$ è data dalla

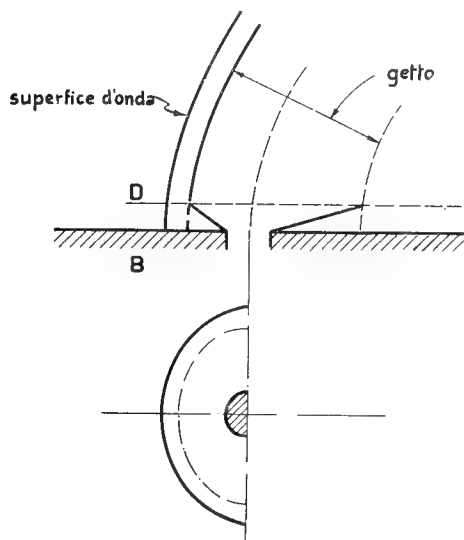



Fig. 12.
Configurazione schematica del getto e dell'onda.

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2} = \zeta_u^2 \frac{1 - \mu^2}{\zeta_u^2 - \mu^2} \frac{2}{\gamma + 1} = \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 (\boldsymbol{t}_\mu, \boldsymbol{i})_{\zeta_u} \tag{118}$$

mentre la pressione nei punti di S_0, nel flusso Newtoniano, è data dalla

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \cos^2 \varphi \tag{119}$$

se φ è l'anomalia di un punto generico di S_0. Appare perciò che nei punti P_u e P_0 di $\mathfrak{E}_u$ e di S_0 in cui la normale è inclinata dello stesso angolo sull'asse x la pressione è molto prossimamente la medesima, essendo $\frac{2}{\gamma + 1}$ e $\frac{1}{2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1}$ non molto differenti tra loro. D'altra parte, per la *piccola* distanza dei punti stessi P_u e P_0, sembra pure che l'assumere come *isobare* nel piano (x, z) le rette P_u P_0 non debba portare verosimilmente a risul tati troppo discosti da quelli esatti, per quanto ha riferimento al calcolo della forza che si esercita sulla regione H compresa tra S_0 e la $\mathfrak{E}_u$. Ma tali rette, in quasi tutto H, poco differiscono dalle rette uscenti dal centro di S_0 (caso limite per $r_0 \to 0$), e di conseguenza si fa l'ulteriore approssimazione che le *isobare* siano le stesse rette $\varphi = cost.$, e che sopra ciascuna di dette rette la pressione sia uguale al valore che si ha nel punto della $\mathfrak{E}_u$

in cui questa è intersecata dalla retta stessa. In queste condizioni la forza F_y indotta dal getto sul fuso è data dalla

$$F_y = \iint_H (p - p_\infty) dx dy = \iint_H (p - p_\infty) r dr d\varphi \tag{120}$$

in cui

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \cos^2 (\boldsymbol{t}_\zeta, \boldsymbol{i})_{\zeta_u} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \frac{\dfrac{R_u^4}{l_u^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi}{1 + \dfrac{R_u^4}{l_u^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi} . \tag{121}$$

Sostituendo la (121) nella (120) si ottiene

$$F_y = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \left[\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{R_u/\sqrt{1 + \epsilon^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\dfrac{R_u^4}{l_u^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi}{1 + \dfrac{R_u^4}{l_u^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi} r dr d\varphi \right] \varrho_\infty U_\infty^2 \tag{122}$$

essendo

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\frac{R_u^2 - l_u^2}{l_u^2}}$$

Risulta

$$F_y = \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \frac{\pi}{4} R l_0 \left[\frac{R_u}{R} \frac{l_u}{l_0} \frac{\dfrac{R_u}{l_u}}{\dfrac{R_u}{l_u} + 1} \right] = \tag{123}$$

$$= \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1} \frac{\pi}{4} R l_0 \left[\frac{\zeta_u}{\zeta_1} \frac{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}}{\sqrt{\zeta_1^2 - 1}} \frac{\zeta_u}{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}} \frac{1}{\dfrac{\zeta_u}{\sqrt{\zeta_u^2 - 1}} + 1} \right] .$$

Per quanto è stato detto al n. 10 (Parte I) la R risulta definita in funzione del raggio r_0 dell'orificio dalla

$$\frac{R^2}{r_0^2} = \left(\frac{2}{\gamma' + 1} \right)^{\frac{\gamma' + 1}{2(\gamma' - 1)}} \frac{\left(\dfrac{p_{0,g}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma' + 1}{2\gamma'}}}{\left\{ \dfrac{2}{\gamma' - 1} \left[\left(\dfrac{p_{0,g}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma' - 1}{\gamma'}} - 1 \right] \right\}^{1/2}} \tag{124}$$

mentre per la l_0 si ha

$$\frac{l_0^2}{r_0^2} = \left(\frac{2}{\gamma' + 1} \right)^{\frac{\gamma' + 1}{2(\gamma' - 1)}} \frac{\left(\dfrac{p_{0,g}}{(\bar{p})_0} \right)^{\frac{\gamma' + 1}{2\gamma'}}}{\left\{ \dfrac{2}{\gamma' - 1} \left[\left(\dfrac{p_{0,g}}{(\bar{p})_0} \right)^{\frac{\gamma' - 1}{\gamma'}} - 1 \right] \right\}^{1/2}} \tag{125}$$

in cui, sempre secondo il risultato indicato al n. 10 (Parte I) è da prendersi

$$\frac{(\bar{p})_0}{p_{0,g}} = \frac{p_\infty}{p_{0,g}}\left(1 + \frac{\gamma}{8}\,\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\,M_\infty^2\right). \tag{126}$$

Si ha di conseguenza

$$F_y = \varrho_\infty U_\infty^2\,\frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\frac{\mathfrak{C}}{2}\left(\frac{2}{\gamma'+1}\right)^{\frac{\gamma'+1}{2(\gamma'-1)}} \cdot \tag{127}$$

$$\cdot\frac{\pi r_0^2/2}{\left(\frac{2}{\gamma'-1}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\gamma}{8}\,\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\,M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma'+1}{4\gamma'}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'+1}{2\gamma'}}}{\left[\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}-1\right]^{1/4}\left[\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma}{8}\,\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\,M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}}-1\right]^{1/4}}$$

avendo indicato con $\mathfrak{C}$ il termine posto tra le parentesi quadre a secondo membro della (123).

Poiché la forza normale effettiva, per un getto che fluisce da un ugello semplicemente convergente in un ambiente a pressione p_∞, è

$$F_{y,e} = p_{0,g}\pi r_0^2\left[2\left(\frac{2}{\gamma'+1}\right)^{\frac{1}{\gamma'-1}} - \frac{p_\infty}{p_{0,g}}\right] \tag{127'}$$

ne risulta che il rapporto tra la forza indotta sul fuso e quella dovuta all'azione diretta del getto è

$$\frac{F_y}{F_{y,e}} = \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\frac{\mathfrak{C}}{2}\cdot \tag{128}$$

$$\cdot\frac{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2}{\left(1+\frac{\gamma}{8}\frac{\gamma+3}{\gamma+1}M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma'+1}{4\gamma'}}\left(\frac{\gamma'+1}{\gamma'-1}\right)^{1/2}\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{2\gamma'}}\left[\left(\frac{\frac{p_{0,g}}{p_\infty}}{1+\frac{\gamma}{8}\,\frac{\gamma+3}{\gamma+1}M_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}-1\right]^{1/4}\left[\left(\frac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}-1\right]^{1/4}}$$

$$\cdot\frac{1}{1-\frac{p_\infty}{2p_{0,g}}\left(\frac{\gamma'+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma'-1}}}\cdot$$

Si deve osservare che la (128) ha una struttura analoga a quella indicata nella nota (1), pure essendo completamente diverso il modo della sua deduzione.

10. - Determinazione della forza indotta dal getto sul fuso.

La formula (128) è stata ricavata assumendo *piana* la parete da cui il getto esce; per tener conto, sia pure in modo grossolano, dell'effetto della curvatura della parete stessa (supposta cilindrica) si determina ora un *fattore di correzione,* per il quale si deve moltiplicare la (128), procedendo nel modo seguente.

Si sostituisce ancora, come nella determinazione del fattore di correzione del rapporto δ/R_c, al getto *ellittico* il getto *rotondo* di raggio che si assume ora uguale al semiasse maggiore della ellisse $\mathfrak{E}_1$; l'ipotesi che conduce, per il caso del getto ellittico e della parete piana, alla legge di variazione della pressione data dalla (119), dà, per il caso del getto rotondo e della parete piana la

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2} = \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \cos^2 \varphi \tag{129}$$

se φ è l'angolo che un raggio generico uscente dal centro della circonferenza $\mathfrak{E}_u^*$ traccia dell'onda d'urto nel piano $y = 0$, forma coll'asse x. Ottenute colla (129) le isobare nel piano $y = 0$, per tener conto della curvatura della superficie rigida da cui esce il getto, si assume il campo di pressione su questa identico a quello che risulta semplicemente *avvolgendo* il piano $y = 0$ sulla superficie cilindrica del fuso: le isobare risultano così archi di elica, ciascuna caratterizzata dal suo angolo di inclinazione φ rispetto alle generatrici del cilindro (il cui raggio si indica con R_b). Poiché il procedimento ora detto dà la soluzione corretta nel caso limite $\frac{R}{R_b} \to 0$, è da credere che la sua applicazione anche per valori di $\frac{R}{R_b}$ non molto piccoli (ma naturalmente sempre alquanto minori di uno) dia, almeno da un punto di vista qualitativo, l'influenza del rapporto R/R_b sul valore della forza che si vuole calcolare.

Ora, se nel piano $y = 0$, in cui si pensa sviluppato il cilindro costituente il fuso, si indicano con r e con φ le coordinate polari di un punto generico, rispetto al centro della $\mathfrak{E}_u^*$ come polo e all'asse x come asse polare, la forza agente sull'elemento di superficie $dS = r dr d\varphi$ è data dalla $(p - p_\infty) r dr d\varphi$ e pertanto, se β è l'angolo che il piano per l'asse del cilindro e per il punto di questo, nel cui intorno si considera l'elemento

dS, forma col piano (x, y), la componente secondo y della forza stessa risulta

$$d^2F_y^* = (p - p_\infty) \cos \beta r dr d\varphi = \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \cos^2 \varphi \cos \beta r dr d\varphi .$$

Ma è

$$z = r \sin \varphi = R_b \varphi ,$$

da cui

$$\beta = \frac{r}{R_b} \sin \varphi .$$

Si ha di conseguenza

$$F_y^* = \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \int_0^{R'_u} r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cos\left(\frac{r}{R_b} \sin \varphi\right) d\varphi$$

se si indica con R'_u il raggio della $\mathfrak{C}_u^*$: se si fa ancora l'ipotesi di potere trascurare l'area dell'orificio di raggio r_0 rispetto a quella del cerchio di raggio R'_u, e si assume, nell'approssimazione corrispondente alla natura di questo calcolo, $R'_u \cong R$, si ha

$$(130) \qquad F_y^* = \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \int_0^{R} r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cos\left(\frac{r}{R_b} \sin \varphi\right) d\varphi =$$

$$= \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \pi R^2 \frac{R_b}{R} \int_0^1 J_1\left(\frac{R}{R_b} \frac{r}{R}\right) d\left(\frac{r}{R}\right)$$

in cui J_1 è la funzione cilindrica di Bessel di prima specie e d'ordine uno.

Nell'ipotesi della parete *piana* ($R_b = \infty$) si ricava invece

$$(130') \qquad F_y^{**} = \varrho_\infty U_\infty^2 \frac{\gamma + 3}{2(\gamma + 1)} \pi \frac{R^2}{4}$$

e di conseguenza è

$$(131) \qquad \frac{F_y^*}{F_y^{**}} = \chi^* = 4 \frac{R_b}{R} \int_0^1 J_1\left(\frac{R}{R_b} \frac{r}{R}\right) d\left(\frac{r}{R}\right)$$

e si potrà ottenere il valore di $\frac{F_y}{F_{y,e}}$ per il caso della parete cilindrica moltiplicando il valore dato dalla (128) per χ^*.

I valori del coefficiente di correzione dato dalla (131) per $\frac{r_0}{R_b} = \frac{1}{15}$ e per i valori di $p_\infty/p_{0,g}$ già considerati nei numeri precedenti risultano:

$p_\infty/p_{0,g} = 0,01 \qquad 0,005 \; ; \qquad 0,001$

$\chi^* \qquad = 0,9981 \qquad 0,9963 \; ; \qquad 0,9802 .$

11. - Confronto tra risultati teorici e sperimentali.

I valori del rapporto $F_y/F_{y,e}$ dati dalla (128) sono stati calcolati per diversi valori di M_∞ e di $p_{0,g}/p_\infty$ e i risultati sono dati dai diagrammi di fig. 13: in questi sono pure segnati i risultati sperimentali ottenuti da Amick, Bond e Liepman [8] per $M_\infty = 2{,}84$, e da Amick, Carvalho e Liepman [11] per $M_\infty = 3{,}9$. Un confronto diretto tra valori teorici e sperimentali è possibile solo per quelli che si riferiscono a $M_\infty = 4$. È sembrato perciò opportuno fare innanzi tutto un controllo indiretto delle formule stesse determinando il rapporto tra il valore di F_y dato dalla (123) con quello che risulta dalla formula semi-empirica data nelle Note [1] e [11], che interpreta bene i risultati sperimentali per $M_\infty = 2{,}84$, e che corrisponde alla linea a tratti disegnata nella stessa fig. 13.

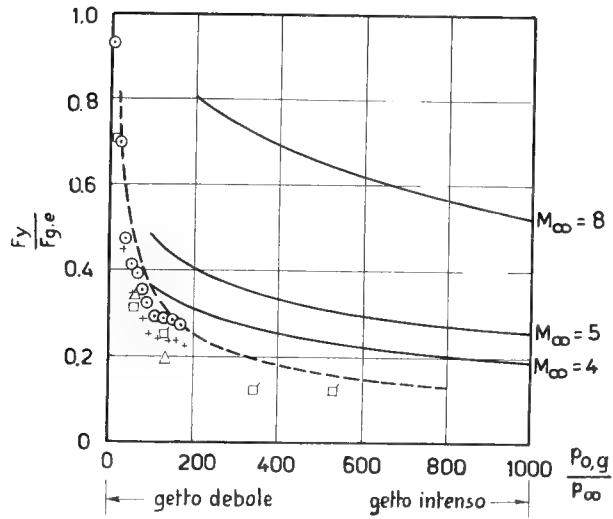
Si ottiene:

$$(132)\quad \sigma^* = \frac{\dfrac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}\,\dfrac{\mathfrak{C}}{2}\left[\left(\dfrac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}-1\right]^{1/4}(M_\infty^2-1)^{1/2}}{\left[\left(\dfrac{p_{0,g}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}\dfrac{1}{\left[1+\dfrac{\gamma}{8}\dfrac{\gamma+3}{\gamma+1}M_\infty^2\right]^{\frac{\gamma'-1}{\gamma'}}}-1\right]^{1/4}\left[1+\dfrac{\gamma}{8}\dfrac{\gamma+3}{\gamma+1}M_\infty^2\right]^{\frac{\gamma'+1}{4\gamma'}}}.$$

Corrispondentemente si ha per $\gamma = \gamma'$

$p_{0,g}/p_\infty$	=	100 ;	200 ;	1000
M_∞	=	4 ;	4 ;	4
σ^*	=	0,987 ;	1,03 ;	1,08
M_∞	=	5 ;	5 ;	5
σ^*_∞	=	1,051 ;	1,105 ;	1,191
M_∞	=	— ;	8 ;	8
σ^*	=	— ;	1,412 ;	1,519 .

Appare dal confronto che l'accordo è soddisfacente per $M_\infty = 4$, e che i valori dati dalla (128) crescono alquanto più rapidamente di quelli corrispondenti alla formula semi-empirica col crescere di M_∞.

Per quanto poi si riferisce al confronto diretto tra risultati teorici e risultati sperimentali è da osservarsi che mentre essi mostrano una dipendenza qualitativa dal rapporto $p_{0,g}/p_\infty$ analoga, il divario quantitativo appare essere dovuto alla propagazione entro lo strato limite nel fluido reale dell'incremento di pressione prodotto dall'urto a monte di questo.

esperimenti dell'Università del Michigan

Simboli	M_∞	L/D	Strato limite	Diametro orificio
⊙	2.84	3.4	Laminare	0 159
+	2.84	3.4	Laminare	0 221
□	3.90	4 5	Laminare	0 159
□́	3.90	4 5	Turbolento	0 159
Δ	3 90	4.5	Laminare	0 159

– – – – Curva empirica per M_∞ = 2,84 ; d/D = 1/15 (Vedi NASA Memo 12-5-58W)

———— Risultati teorici della presente teoria

Fig. 13.

Rapporto della forza di interferenza prodotta dal getto alla forza di reazione diretta per un getto uscente da una superficie cilindrica circolare.

Questo incremento di pressione lungo lo strato limite produce *distacco della vena* dalla parete rigida, e nella regione di «separazione» del flusso si ha una propagazione «laterale» dell'incremento stesso, così che *sovrapressioni* si producono non soltanto nel semipiano meridiano che contiene l'asse del getto, ma anche sul semipiano opposto. Si ha così, per quanto ha riguardo alla grandezza della forza normale indotta sul fuso dal getto, una specie di *compensazione*, che ovviamente diminuisce notevolmente la grandezza della forza stessa.

In effetto esperimenti fatti provvedendo il fuso di alette, e facendo effluire il getto da un orificio disposto tra le alette stesse, così che queste impedivano la propagazione «laterale» dell'incremento di pressione, hanno dato valori della forza indotta alquanto più grandi di quelli qui ricavati. Poiché nel caso del «fuso alettato» il distacco produce una amplificazione dell'effetto di interazione favorevole alla generazione di una forza normale, i risultati teorici qui ottenuti appaiono come un limite inferiore dei valori della forza indotta dal getto sul fuso, la quale risulta di conseguenza essere anche nel caso di getto con forte valore del rapporto $p_{0,g}/p_\infty$ dello stesso ordine di grandezza della forza direttamente prodotta dal getto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Liepman H. P., *Experimental Jet Interference* Appendice III di *Minutes of 38th Regular Meeting of the Bumhlehee Aerodynamics Panel*, « Amer. Aer. Lab. NACA » 21 Marzo 1959, « APL/JHU TH » 14-35, Agosto 1958.

[2] Lighthill M. J., *Dynamics of a Dissociating gas*, « Journ. Fluid Mech. », Vol. 2 1957.

[3] Whitham G. B., *A note on the stand-off distance of the shock in high speed flow past a circular cylinder*, « Comm. on pure and Appl. Math. », Vol. X, N. 4, 1957.

[4] Levi-Civita T., *Sui getti liquidi*, « Rendic. del Semin. Matem. e Fisico di Milano », Vol. IV, N. VIII, 1931.

[5] Penland J. A., *Aerodynamic Characteristics of a circular cylinder at Mach number* 6,86 *and angles of attack up to* 90°, « NACA T. N. », N. 3861, Gennaio 1957.

[6] Vas I. E., Bogdonoff S. M., Hammit A. G., *An experimental investigation of the flow over simple two-dimensional and axial symmetric bodies at hypersonic speeds*, « Jet Propulsion », Vol. 28, N. 2, Febbraio 1958.

[7] Garabedian P. R., Lieberstein H. M., *On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow*, « Journ. of the Aeron. Scienc. », Vol. 25, N. 2, Febbraio 1958.

[8] Amick J. K., Bond C. E., Liepman H. P., *An experimental investigation of the forces and flow fields produced by a jet exhausting laterally from a cone-cylinder in a Mach* 2,84 *Stream* Univ. Michigan, Eng. Res. Inst. Report WT M, 255, Novembre 1955.

[9] LIEPMAN H. P., *Experimental Jet interference summary of material for 40th Aerodynamic Panel Meeting*, App. V di *Minutes of the 40th. Regular Meeting of the Bumblebee Aerodyn. Panel*, « Appl. Physics Laborat. John Hopkins Univers. », 13-14 Maggio 1959, « APL/J.H.U. TG » 14-37.

[10] VINSON P. N., AMICK J. L., LIEPMAN H. P., *Interaction effects produced by jet exhausting laterally near base of ogive-cylinder model in supersonic main stream* «NASA memor. MEMO » 12-5-58 N, Febbraio 1959.

[11] AMICK J. L., CARVALHO G. F., LIEPMAN H. P., *Interaction experiments on lateral jets with supersonic streams*, App. di *Minutes of 40th regular Meeting of the Bumblebee Aerod. Panel*, « APL/JHU T. G. » 14-36.

MEMORIE DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
1759-1957

Tomi 1-115 divisi nelle seguenti:
Serie I Tomi 1-40; Serie II Tomi 1-71; Serie III Tomi 1-4.

---

[1] Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis. Tomus I: 1759.

[2-5] Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin pour les années 1760-61 [e [3] 1762-1765; [4] 1766-1769; [5] 1770-1773]. *Senza data.*

[6-10] Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Années 1784-1785 [-1790-91]: 1786-93.

[6] 1784-85: *Première partie:* 1786;
[7] *Seconde partie:* 1786.
[8] 1786-87: 1788.
[9] 1788-89: 1790.
[10] 1790-91: 1793.

[11] Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin. Années 1792 à 1800. Tome VI: 1801.

[12] Mémoires de l'Académie des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Turin pour les années X et XI [1803-1804]. Sciences physiques et mathématiques. *Première partie:* An. XII [1803-4].

[13] [Gli stessi, *Seconde partie*]. Littérature et Beaux-Arts: 1803.

[14-15] Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts pour les années XII et XIII [1803-05]: 1805.

[14] *Sciences physiques et mathématiques:* 1805.
[15] *Lettres et Beaux-Arts:* 1805.

[16-21] [Gli stessi] pour les années 1805-08 [e 1809-10, 1811-12]: 1809-13.

[16] 1805-08 *Sciences physiques et mathématiques:* 1809.
[17] *Lettres et Beaux-Arts:* 1809.
[18] 1809-10 *Sciences physiques et mathématiques:* 1811.
[19] 1809-10 *Lettres et Beaux-Arts:* 1811.
[20] 1811-12 *Sciences physiques et mathématiques:* 1813.
[21] *Lettres et Beaux-Arts:* 1813.

[22] Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin pour les années 1813-14. Tome XXII: 1816.
(Diviso in due parti, ognuna con propria numerazione).

[23-40] Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Tomo XXIII [-XL]: 1818-38.
(Divise in due parti, ognuna con numerazione propria, ed intitolate: (I) *Memorie della Classe di Scienze fisiche e matematiche*, e (II) *Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche*).

[41-111] Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Serie II, Tomo 1 [-71]: 1839-1952.
Sino al Tomo 67 divise come i tomi 23-40 della prima serie; dal Tomo 68 divise in *Parte prima*: Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e *Parte seconda*: Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

[112-15] Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Serie terza. Tomi 1-4, divisi come nella serie prec. (tt. 68-71):
Parte I: Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali:
Tomo 1-3: 1955-57.
Parte II: Classe di Scienze morali, storiche e filologiche:
Tomi 1-4: 1952-57.